爱因斯坦引力论导引

AIYINSITAN YINLILUN DAOYIN

沈 葹著

杭州大学出版社

爱因斯坦引力论导引

YINLILUNDAOYIN

沈 施著

杭州大学出版社

（浙）新登字第 12 号

爱因斯坦引力论导引
沈 葹 著
*
杭州大学出版社出版
（杭州天目山路 34 号）
*
浙江省新华书店发行 杭州大学印刷厂印刷
850×1168 毫米 1/32 6.5 印张 163 千字
1995 年 4 月第 1 版 1995 年 4 月第 1 次印刷
印数：0001—1000
书号：ISBN7-81035-755-7/O·051
定 价：6.50 元

爱因斯坦引力论导引

AIYINSITA

AIYINSITANYINLILUNDAOYIN

引　言

爱因斯坦引力论，即广义相对论，是继牛顿万有引力理论之后最卓越的引力理论，并被认作现代理论物理的主要支柱；与狭义相对论一样，它在物理学发展史上占据重要的地位。在该理论中，爱因斯坦正确地揭示了引力的本质，并创造性地勾划出物质场空间的弯曲时空结构。再则，爱因斯坦凭借黎曼几何及其张量分析表示他的引力理论，反过来，此新引力理论的建树，充实和发展了这门抽象的数学理论，从而为理论科学提供了数学和物理学紧密结合的杰出楷模。

普遍认为，广义相对论是一门比较艰深的理论，问世后的相当长一段时间里科学界只有少数人理解它。近几十年中，世界各国的高校将该理论列作研究生修读的理程，遂使其在一定范围里得到普及。但由于许多有关的教科书和参考书都偏重于抽象的数学论证，物理图象描绘甚少，故而读者不易接受，徒增玄秘枯燥之感——简言之，人们把学习广义相对论视作"畏途"。

然而，如果增加该理论的物理图象描绘的比重，融会以爱因斯坦的新颖清晰的物理思想，体现相对论体系高度对称的特色，并结合以科学方法论的论述，那末可避免数学掩盖物理的弊端，破除玄秘枯燥的感觉，从而使读者易于接受，反倒增添了理解的深度。本教程力图在这些方面作一尝试。

从某种意义上说，物理理论的发展过程是时空观不断变革的过程。从牛顿理论的绝对时空变为相对论的相对时空，从非引力场空间的平直时空结构变为引力场空间的弯曲时空结构，此乃时空

观的两次重大转折；爱因斯坦为这两次根本性变革作出决定性贡献。时空合一的相对时空观念和以柔性度规为标志的弯曲时空结构是两项伟大的创造，它们使物理理论从概念结构基础中得到更新和发展。本教程以时空观念的转变和创新为主线，将其贯穿于整个理论的解说论述之始终。

且说说本教程的主要脉络和基本思路。其一，在复习和考查牛顿引力论和狭义相对论的形式体系时引出平直时空结构及其张量表示。作为描述电磁体系的张量场的运动变化的麦克斯韦方程组，是一种线性张量微分方程。与此作类比，自然过渡到对引力场的线性近似描述，建立其线性张量微分方程；该线性近似理论在极限情况下，回复到牛顿引力论。其二，与电磁场在时空中运动形成电磁波作类比，用线性近似引力理论讨论引力波的辐射和对物质的作用问题，还用以解释光线偏转等观测效应，尔后再转向对引力场时空结构的探索。而从弱引力场时空度规对平直的闵可夫斯基度规的偏离推而广之，得出“引力场的时空弯曲”这样一个必然的结论。其三，介绍黎曼几何及其张量分析，为弯曲时空结构提供数学表示形式。其四，在引入弯曲时空结构的柔性度规以后，考虑到爱因斯坦对相对性原理的形式拓广——广义协变性原理，将线性近似引力理论改造成非线性理论，导出非线性的引力场方程——爱因斯坦场方程，由以建立起相对论性引力理论。其五，从爱因斯坦场方程出发讨论球对称物质分布体系和转动的球对称物质分布体系的引力场，具体导出施瓦兹西尔德度规和克尔度规及其时空结构。进而介绍 60 年代以来天体物理和宇宙学的一些新课题：黑洞、引力塌缩、宇宙膨胀、宇宙红移、大爆炸等等，凡提及的课题都用宇宙学原理、标准宇宙模式及其时空度规进行较圆满的解释，从而反映出广义相对论在应用到现代天体物理、现代宇宙学研究以后的进展面貌。

对于上述思路特别需要说明一点：大部分关于广义相对论的

书籍，往往先介绍弯曲时空，先建立非线性引力场方程，然后才讨论弱场近似、非相对论近似；而本教程并不沿袭这种通常的习惯路子，却试以更符合科学方法论的逻辑来展示引力理论：把引力场与电磁场作类比，在与电动力学的比较中建立线性近似引力场方程，之后再把它改进，推广到非线性的一般情况；与此同时，平直空间便自然地过渡为弯曲空间。这样，较难的非线性场方程和违反传统观念的弯曲时空结构就不致令人过于费解。我们的教学实践证明了这一点。

广义相对论的基本思想是“引力＝弯曲时空”，进而引伸为“物理学＝几何学”，这种思想十分清新深刻，虽然因与传统观念相悖而至今为某些科学家所非议，但现代理论物理学正循着这种思想所倡导的途径而发展，所以有人提议将“广义相对论”改名为“几何动力学”。我们认为，后者对于披露物质场与时空结构的内在联系，显得更为明朗。因此，本教程采用这个名称，将其作为“广义相对论”的一种别名，并尽量充分地反映爱因斯坦的这一非凡思想。

目　　录

第一章　牛顿引力论和狭义相对论之考查

牛顿引力论是20世纪之前最成功的引力理论；对天体运动规律的正确描绘，功出于此. 爱因斯坦对牛顿引力论的成就赞叹不已. 诚然，每个理论都有一定的适用范围，与新的实验观测事实相左往往导致对理论的推广和改造. 解释水星近日点的进动是牛顿引力论遇到的主要困难，该理论的计算结果与观测数据相差每百年43弧秒. 这不是一个小数值，自然引起人们对牛顿引力论的重新考查.

然而，牛顿引力论是人们企求的新引力理论的出发点，加入新的条件，将牛顿引力论推广；反之，新的引力理论在极限条件下回复到牛顿引力论. 这是构造新引力理论的基本思路.

狭义相对论是立足于相对性原理的经典电磁场理论，不涉及引力问题. 然而引力场也作为一种经典场，就场的意义而论，它与电磁场当有共性的一面. 描绘电磁场运动规律的是线性张量微分方程；与此作类比，用张量形式表示引力场，便自然衍化出对引力场的线性近似描述，建立其线性张量微分方程. 再则，将狭义相对论的相对性原理作形式拓广，得出广义协变性原理；考虑到引力场的时空结构是弯曲的，将线性近似引力理论改造为非线性理论，导出以曲率张量为标志的非线性引力场方程，从而建立起相对论性引力理论.

可见，相对论引力论是狭义相对论形式体系的一种自然推广，亦是其时空结构演变后的一个必然结果；以研究对象而论，广义相对论与牛顿引力论是一脉相承的. 因此，在全面展开广义相对论的

理论体系之前,先简单考查一下牛顿引力论和狭义相对论,是甚有必要的.

1-1 牛顿引力论及其时空观评析

1-1-1 万有引力定律和引力势的多极矩展开

一、万有引力定律

牛顿力学中的万有引力是一种超距作用,并服从平方反比定律.众所周知,该定律乃指,两质点之间的吸引力与二者的质量成正比,而与二者的距离平方成反比,即

$$\boldsymbol{F}=\frac{Gmm'}{r^3}\boldsymbol{r}, \qquad [1\text{-}1]$$

其中,引力常数 $G=6.67\times10^{-8}$ 达因·厘米^2/克^2,对应之引力势能

$$V(\boldsymbol{r})=-\frac{Gmm'}{r}. \qquad [1\text{-}2]$$

设质量为 m 的物体相对于中心物体(质量为 m')的运动速度为 v,而如果 $v\ll c$(c 为光速),且 $|V(\boldsymbol{r})|\ll mc^2$,则牛顿万有引力定律能很好成立.以[1-2]式表示的 $V(\boldsymbol{r})$ 代入此不等式,便有

$$r\gg Gm'/c^2. \qquad [1\text{-}3]$$

这表示,当与中心物体相距足够远,而且运动速度足够小时,牛顿引力论是一个相当精确的理论.以太阳为例,$m'=M_\odot\approx2\times10^{33}$ 克,代入[1-3]式,$r\gg2\times10^5$ 厘米就是太阳引力场中万有引力定律成立的条件;一般说来,该条件是能够满足的.

在通常的距离上,平方反比定律是成立的.但 r 并非可无限增大,现代天体物理的研究发现,当 $r\sim10^7$ 光年 $\approx10^{25}$ 厘米时,引力作用会明显偏离该定律.对平方反比定律的最简修正是汤川形式:

$$V(\boldsymbol{r}) = -Gmm'\frac{e^{-\kappa r}}{r}, \qquad [1\text{-}4]$$

其中 κ 是一常数. 显然当 $\kappa = 0$ 时,[1-4] 式就回复为[1-2] 式.

引力是长程力,所以常数 κ 极小. 若令 r 取银河系半径 10^{22} 厘米,而 $\kappa r < 1$ 则

$$\kappa < 10^{-22}\ 厘米^{-1}. \qquad [1\text{-}5]$$

那末,当 $r \ll 10^{22}$ 厘米时,[1-4] 式偏离平方反比式[1-2] 甚小;即便在银河系半径的尺度上,偏离也不很大. 因此可以说,牛顿万有引力定律的适用范围是相当大的;当然,汤川形式并不能就算是引力势的作为比较标准的正确形式,而只是在一定范围里可用的一个修正公式.

二、引力势及其泊松方程

位于 $\boldsymbol{X}$ 处的粒子 m 受 N 个分别位于 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_N$ 的粒子(其质量分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_N$) 的引力总和为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = -Gm\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_i|^3}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_1), \qquad [1\text{-}6]$$

对应之势能

$$V(\boldsymbol{X}) = -Gm\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_i|}. \qquad [1\text{-}7]$$

引入引力场,作为引力作用的荷载者. 以引力势 $\Phi(\boldsymbol{X})$ 描述引力场的性质,定义为单位质量的粒子在引力场中的引力势能,即

$$\Phi(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{m}V(\boldsymbol{X}) = -\sum_{i}\frac{Gm_i}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_i|}, \qquad [1\text{-}8]$$

如果物质连续分布,和式改为积分,则有

$$\Phi(\boldsymbol{X}) = -\int\frac{G\rho(\boldsymbol{X}')}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}'|}\mathrm{d}V', \qquad [1\text{-}9]$$

其中 $\rho(\boldsymbol{X}')$ 为质量密度. 以拉普拉斯算符作用于上式,便得

$$\nabla^2\Phi(\boldsymbol{X}) = 4\pi G\rho(\boldsymbol{X}); \qquad [1\text{-}10]$$

这就是引力势 $\Phi(\boldsymbol{X})$ 所满足的泊松方程.

[1-10] 式与静电场的电势方程的形式相同. 那末，与[1-8] 式相应的有

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})=\frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})=-\frac{1}{m}\nabla V(\boldsymbol{X})=-\nabla\Phi(\boldsymbol{X}),\quad [1\text{-}11]$$

乃指单位质量的粒子所受之引力，可定义为引力场的强度，与静电场的电场强度相当. 实际上 $\boldsymbol{g}$ 即为引力加速度.

三、引力势的多极矩展开

考虑一宽展质量分布体系(见图 1-1)，即设物质分布在区域 V 内. 在离该区域的远处，可将[1-9] 式中的 $1/|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}'|$ 作泰勒展开(以坐标原点为展开中心)：

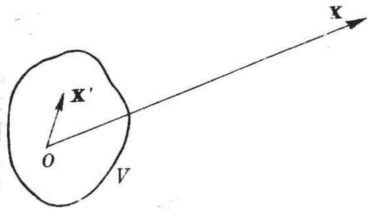

图 1-1

$$\frac{1}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}'|}$$
$$=\frac{1}{[(x_1-x'_1)^2+(x_2-x'_2)^2+(x_3-x'_3)^2]^{1/2}}$$
$$=\frac{1}{r}+\sum_k\frac{x'^k x^k}{r^3}+\frac{1}{2}\sum_k\sum_l(3x'^k x'^l-r'^2\delta_k{}^l)\frac{x^k x^l}{r^5}+\cdots,$$

其中，$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$*. 将此展开式化入[1-9] 式，得

$$\Phi(\boldsymbol{X})=-\frac{GM}{r}-\frac{G}{r^3}\sum_K x^k D^k-\frac{G}{2r^5}\sum_{kl}Q^{kl}x^k x^l-\cdots$$
$$=-\frac{GM}{r}-\frac{G}{r^3}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{D}-\frac{G}{2r^5}\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{X}:\overleftrightarrow{\boldsymbol{Q}}\cdots;\quad [1\text{-}12]$$

这就是引力势的多极矩展开式，式中

$$M=\int_V\rho(\boldsymbol{X}')\mathrm{d}V',\quad [1\text{-}13]$$

$$\boldsymbol{D}=\int_V\boldsymbol{X}'\rho(\boldsymbol{X}')\mathrm{d}V',\quad [1\text{-}14]$$

---

* x^k,x'^k,x^l,x'^l 中，上标 k,l 均取 1,2,3，分别对应于三个直角坐标，例如 $x^1=x,x^2=y,x^3=z$.

$$Q^{kl} = \int_V (3x'^k x'^l - r'^2 \delta_k{}^l) \rho(\boldsymbol{X}') \mathrm{d}V'. \qquad [1\text{-}15]$$

M是V内物质的总质量，亦可称作该体系的质零极矩；$\boldsymbol{D}$是体系的质偶极矩矢量；$\overleftrightarrow{Q}$是体系的质四极矩张量.[1-15]式或写作

$$\overleftrightarrow{Q} = \int_V (3\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}' - r'^2 \overleftrightarrow{I}) \rho(\boldsymbol{X}') \mathrm{d}V', \qquad [1\text{-}15a]$$

其中$\overleftrightarrow{I}$是单位张量.[1-12]式的前三项后面的各项是包含高阶质量极矩的高级小量项，一般可忽略不计.

如果只取第一项，[1-12]式相当于所有物质都集中在坐标原点，这是多极矩展开的零级近似.

如果将物质体系的质心取作坐标原点，则$\boldsymbol{D} = 0$，多极矩展式中的第二项消失.通常总将质心取作原点，故而不必考虑质偶极矩项.

质四极矩项是关键性的一项.质四极矩一般总不为零，除非是球对称物质体系.展式中质四极矩项的存在，就已使总引力与r的关系偏离平方反比定律.这是宽展质量分布体系与点质量的引力场的不同之处.唯有零级近似，把宽展体系看作处在原点的点质量，总引力依然满足平方反比定律.

球对称物质体系的质四极矩为零.星球往往不是绝对的圆球，其质四极矩就不为零，于是引起绕其运行的星球轨道的变动(近"日"点的进动)；观测此变动情况可确定中心星球的质量分布及其质四极矩.但如果星球的偏心率极小，质四极矩便几乎为零；太阳便是这样的例子，对于水星等行星的运行轨道，难以测量其因太阳质四极矩所引起的进动值.

1-1-2 等效原理

一、等效原理的伽利略表述和牛顿表述

等效原理是广义相对论的基本出发点，它对这相对论引力论

的作用有多大，后面会清楚可见.这里先介绍其早期表述形式.

点粒子在引力场中作加速运动，其方程为

$$m_I \frac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}t^2} = - m_G \frac{\partial \Phi}{\partial x^k}, \tag{1-16}$$

左边 m_I 是惯性质量，右边 m_G 是引力质量.由实验可知

$$m_I = m_G, \tag{1-17}$$

那末

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}t^2} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x^k}, \tag{1-18}$$

此即[1-11]式.方程中不出现质量因子，表示“所有不同的点粒子在引力场中的给定点均以相同的加速度下落”.这种表述形式由于历史上的原因，称作伽利略等效原理.而[1-17]式表示惯性质量和引力质量等效，这就是牛顿等效原理.

若非点粒子，而是其体积为 V、质心加速度为$\frac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}t^2}$ 的宽展物体，对应于[1-18]式的乃有

$$m_I \frac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}t^2} = - \int_V \rho_G(\boldsymbol{X}') \frac{\partial \Phi}{\partial x'^k}(\boldsymbol{X}') \mathrm{d}V', \tag{1-19}$$

其中 $\rho_G(\boldsymbol{X}')$ 是引力质量密度.如果 V 不大，$\frac{\partial \Phi}{\partial x^k}$ 在 V 区域里又几乎不变，此式可回复成[1-16]式；表示在均匀引力场中，所有宽展物体也与点粒子一样以相同的加速度下落.反之，如果引力场是非均匀的，宽展物体的尺寸又较大，那末不同形状和尺寸的物体就以不同的加速度下落.

可见，对于点粒子来说，可从[1-17]式导出[1-18]式，反之亦然；那末，伽利略表述形式和牛顿表述形式是等价的.而对于宽展物体，唯有其尺寸不大，并在几乎均匀的引力场中，情况才与点粒子相同.至于就处在非均匀引力场中的尺寸较大的宽展物体来说，两种表述是互补的.当然，上面的推导依赖于牛顿力学的正确性；

乃是局限于引力场是弱场$\left(\frac{GM}{rc^2} \ll 1\right)$和物体运动速度甚低的场合.但伽利略表述可推广到非牛顿力学范畴的点粒子体系.

二、等效原理的爱因斯坦表述

地球表面的物体既受到地球的引力,又受到因地球转动而产生的惯性离心力,前者正比于引力质量m_G,后者正比于惯性质量m_I.上述等效原理的牛顿表述得到无数实验证实.早期有法国物理学家厄缶(R. v. Eötvös),他通过精巧的扭秤实验,证明不同物体的$\frac{|m_I - m_G|}{m_I}$不超过3×10^{-9};现代的一些实验,将其数量级提到10^{-12}以上.这就表明,$m_I = m_G$在很高的精度上成立.对于这个古老的实验事实,爱因斯坦认为,"应当在理论物理的原理中找到它自身的反映";①他相信,"这种数值上的相等,暗示着性质上的相同",②因为"只有当这种数值上的相等归结为两个概念的真正本质上的等同之后,科学才能有充分的理由来规定这种数值上的相等."③以地面上随地球转动的物体为例,爱因斯坦分析了二者性质相同的理由:"如果我把作用在一切对地球相对静止的物体的离心力设想为一种'实在的'引力场,或者这种场的一部分,我岂不是可以把地球看作是不在转动的吗?如果这个观念能够行得通,那末我们就将真正地证明了引力和惯性的同一性.因为这一性质从不参与转动的体系来看,是惯性;而从参与转动的体系来看,却可以解释为引力."④

既然一切物体在引力场中都被同样地加速,那末爱因斯坦以为,"引力场与参考系的相当的加速度在物理上完全等价"⑤便是

① 引自《爱因斯坦文集》第二卷(商务印书馆 1977 年版)第 224 页.

② 引自《爱因斯坦文集》第一卷(商务印书馆 1976 年版)第 153 页.

③ 同上,第 160 页.

④ 同上,第 153 页.

⑤ 引自《爱因斯坦文集》第二卷(商务印书馆 1977 年版)第 199 页.