线性代数同步辅导

XIANXING DAISHU TONGBU FUDAO

主编 王志平

主审 杨晓春

大连海事大学出版社

线性代数同步辅导

主编　王志平

主审　杨晓春

大连海事大学出版社

内容提要

本书是根据教育部制订的线性代数教学大纲的要求，结合同济大学数学系所编《线性代数》（第五版）编写而成，也是编者多年来进行线性代数课教学和辅导实践的总结。本书共 6 章，包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换，各章包含知识脉络图、重要结论、常考题型、分类剖析、单元测验、单元测验答案，书后还有 2006 年至 2010 年线性代数考研真题及解答。本书是工科大学生、报考研究生的同志及自学线性代数者的辅导教材，也可供从事工科线性代数教学的教师、非数学专业的研究生参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数同步辅导 / 王志平主编 .—大连：大连海事大学出版社，2010.9
ISBN 978-7-5632-2473-9

I. ①线… II.①王… III. ①线性代数—高等学校—教学参考资料 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 170481 号

大连海事大学出版社出版
地址：大连市凌海路 1 号 邮编：116026 电话：0411-84728394 传真：0411-84727996
http://www.dmupress.com E-mail:cbs@dmupress.com
大连华伟印刷有限公司印装 大连海事大学出版社发行
2010 年 9 月第 1 版 2010 年 9 月第 1 次印刷
幅面尺寸：185 mm×260 mm 印张：11.25
字数：238 千 印数：1~3 500 册
责任编辑：沈荣欣 封面设计：王 艳

前 言

本书是根据教育部制订的线性代数教学大纲的要求，结合同济大学数学系所编的《线性代数》（第五版）编写而成，也是编者多年来进行线性代数课教学和辅导实践的总结。本书共 6 章，包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换。

每章包含：

- ✧ 知识脉络图。系统地给出了本章的基本概念、定理、公式等知识结构，使读者对本章的知识点有一个总体的了解。
- ✧ 重要结论。言简意赅地总结了必须掌握的核心知识点，并将结论进行分类、归纳。
- ✧ 常考题型。详细地归纳了考试中出现频率较高的题型。针对这些题型，后面的分类剖析中列举了相应的例题进行了讲解。
- ✧ 分类剖析。结合例题（含历年考研真题），对解题方法加以分类、归纳、总结并进一步阐明各类解题方法所适用题型及其解题步骤。
- ✧ 单元测验。用考试实战的形式对学生进行测评，目的是考察学生对本章基本概念、定理、公式等知识的理解及掌握程度。

书后还有 2006 年至 2010 年线性代数考研真题及解答。

本书由大连海事大学数学系王志平主编，参加编写的还有任英、庄举娟、王科伦、李静、朱全英、谢海燕、周若虹。由于时间和水平的限制，书中难免存在不足和错误，恳请读者批评指正。

编者

2010 年 6 月

目 录

第一章　行列式

本章知识脉络图

- ✧ 行列式的定义
- ✧ 行列式的性质
- ✧ 行列式展开及计算
- ✧ 克莱默（Cramer）法则

重要结论

1 行列式的概念

n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 是 D 中不同行不同列的 n 个元素的乘积，t 是该项列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，$\sum$ 表示以这样的方式得到的 n！个项的代数和.

n 阶行列式也可定义为 $D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$，其中 t 为行标 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

2 行列式的性质

性质 1：行列式与它的转置行列式相等.

性质 2：行列式的两行（列）互换，行列式改变符号．特别地，若行列式有两行（列）完全相同，则行列式等于零.

性质 3：以数乘行列式，等于以这个数乘该行列式的任一行（列）．行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质 4：行列式 $D=0$ $\begin{cases}\text{当}D\text{中某一行（列）元素全为零；}\\ \text{当}D\text{中某两行（列）元素对应成比例。}\end{cases}$

性质 5：若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，则这个行列式等于两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a_{1i}') & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a_{2i}') & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a_{ni}') & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6：将行列式某一行（列）的所有元素的 k 倍加到另一行（列）的对应元素上，行列式值不变.

3 行列式展开

设 D 是 n 阶行列式，则

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} D, i=j \\ 0, \ i\neq j \end{cases} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases} D, i=j \\ 0, \ i\neq j \end{cases} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

4 范德蒙（Vandermonde）行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

5 上（下）三角行列式及对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & a_{1n} \\ & a_{2,n-1} & \\ \iddots & & \\ a_{n1} & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & & \iddots & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

上述行列式中未写出的元素都是 0.

6 两种特殊的拉普拉斯（Laplace）展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1k} & \\ \vdots \quad \vdots & \\ a_{k1} \cdots a_{kk} & \\ c_{11} \cdots c_{1k} & b_{11} \cdots b_{1n} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ c_{n1} \cdots c_{nk} & b_{n1} \cdots b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1k} & d_{11} \cdots d_{1n} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{k1} \cdots a_{kk} & d_{k1} \cdots d_{kn} \\ & b_{11} \cdots b_{1n} \\ & \vdots \quad \vdots \\ & b_{n1} \cdots b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1k} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{k1} \cdots a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} \cdots b_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ b_{n1} \cdots b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} & a_{11} \cdots a_{1k} \\ & \vdots \quad \vdots \\ & a_{k1} \cdots a_{kk} \\ b_{11} \cdots b_{1n} & c_{11} \cdots c_{1k} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ b_{n1} \cdots b_{nn} & c_{n1} \cdots c_{nk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} \cdots d_{1n} & a_{11} \cdots a_{1k} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ d_{k1} \cdots d_{kn} & a_{k1} \cdots a_{kk} \\ b_{11} \cdots b_{1n} & \\ \vdots \quad \vdots & \\ b_{n1} \cdots b_{nn} & \end{vmatrix} = (-1)^{kn} \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1k} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{k1} \cdots a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} \cdots b_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ b_{n1} \cdots b_{nn} \end{vmatrix}$$

7 克莱默（Cramer）法则

1. 非齐次线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$的系数行列式$D \neq 0$时，该方程组有唯一解：$x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \dfrac{D_n}{D}$，其中，$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$，$j = 1, 2, \cdots, n$.

2. 齐次线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$的系数行列式$D \neq 0$时，方程组有唯一零解，即$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$；反之，如果齐次线性方程组有非零解，则系数行列式$D = 0$.

8 行列式在线性代数中有较多应用（结合以后章节），例如：

1. 当$|\boldsymbol{A}| = 0$时，齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解，而非齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$不是唯一解（可能无解，亦可能有无穷多解）．而当$|\boldsymbol{A}| \neq 0$时，由克莱默法则，可求出$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的唯一解（结合第三章线性方程组的解）．

2. 可用来证明矩阵$\boldsymbol{A}$可逆，并由伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$求出$\boldsymbol{A}^{-1}$（结合第三章）．

3. 对n个n维向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$，可通过计算行列式$|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2 \cdots \boldsymbol{\alpha}_n|$是否为零来判断它们是线性相关或线性无关（结合第四章）．

4. 矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{A})$是用$\boldsymbol{A}$中非零子式的最高阶数来定义的（结合第三章）．

5. 求矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，即计算$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$（结合第五章）．

6. 判断二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正定性，可用顺序主子式全大于零（结合第五章）.

在以后各章节中，常用的与行列式相关的几个重要公式有：

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$.
2. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.
3. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$；若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$.
4. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $|\boldsymbol{A}| = \prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$.
5. 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$.

常考题型

- 有关行列式概念与性质的题型
  - 与全排列及其逆序数相关的题型
  - 与行列式性质相关的题型
  - 与代数余子式相关的题型
- 行列式的计算
  - 化为上（下）三角形行列式，或展开
  - 递推公式法
  - 公式法
    - 利用范德蒙行列式
    - 利用拉普拉斯展开
    - 换元公式法
  - 加行（列）法
- 与克莱默法则相关问题

分类剖析

题型一：有关行列式概念与性质的题型

✧ 与全排列及其逆序数相关的题型

例 1：若排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 t，则排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少？

解：$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 中任意两个不同的 x_i,x_j 必在且仅在 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 或 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 之一中构成一个逆序，同时这两个排列的逆序总数为：$C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$，因此 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为 $\dfrac{n(n-1)}{2} - t$.

例 2：已知$a_{23}a_{31}a_{ij}a_{64}a_{56}a_{15}$是 6 阶行列式中的一项，试确定$i,j$的值及此项所带符号．

分析：根据行列式的定义，它是不同行不同列元素乘积的代数和．因此行指标 2,3,i,6,5,1 应取自 1 至 6 的排列，故$i=4$，同理可知$j=2$．

关于此项所带的符号，可有两种思路：

（1）将该项按行的自然顺序排列，有$a_{23}a_{31}a_{42}a_{64}a_{56}a_{15}=a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{64}$，后者列的逆序数为$0+1+2+2+0+2=7$，故该项应带负号．

（2）直接计算行标排列（2　3　4　6　5　1）的逆序数和列标排列（3　1　2　4　6　5）的逆序数，有$6+3=9$，亦知该项应带负号．

✧　与行列式性质相关的题型

例 3：若n阶行列式D中为零的元素的个数比n^2-n还多，问D的值为多少？

解：n阶行列式D中共有n^2个元素，由于D中等于零的个数比n^2-n还多，这说明非零元素的个数比$n^2-(n^2-n)=n$还少，因而至少有一行全为零，故$D=0$．

例 4：已知 221,323,459 都能被 17 整除，不求出行列式的值，试证明：行列式$D=\begin{vmatrix}1&2&2\\3&2&3\\9&5&4\end{vmatrix}$能被 17 整除．

证明：将D中第 3 列的 100 倍，第 2 列的 10 倍分别加至第 1 列：$D=\begin{vmatrix}221&2&2\\323&2&3\\459&5&4\end{vmatrix}$．由已知条件知，上行列式第 1 列有公因数 17，将 17 提到行列式记号以外，所剩行列式记为D_1，则$D=17D_1$，且D_1中每个元素都是整数，由行列式的定义，D_1也是整数，因而D能被 17 整除．

例 5：方程$f(x)=\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}=0$的根的个数为________．

（A）1；　（B）2；　（C）3；　（D）4．

分析：问方程$f(x)=0$有几个根，也就是问$f(x)$是x的几次多项式，为此应先对$f(x)$作恒等变形：

$$f(x)\xlongequal[C_3-C_1,C_4-C_1]{C_2-C_1}\begin{vmatrix}x-2 & 1 & 0 & -1\\2x-2 & 1 & 0 & -1\\3x-3 & 1 & x-2 & -2\\4x & -3 & x-7 & -3\end{vmatrix}\xlongequal{C_4+C_2}\begin{vmatrix}x-2 & 1 & 0 & 0\\2x-2 & 1 & 0 & 0\\3x-3 & 1 & x-2 & -1\\4x & -3 & x-7 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-2 & 1\\2x-2 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x-2 & -1\\x-7 & -6\end{vmatrix}$$

易知 $f(x)$ 是关于 x 的二次多项式，因而应选（B）.

例 6：已知 $f(x)=\begin{vmatrix}x & 1 & 2 & 4\\1 & 2-x & 2 & 4\\2 & 0 & 1 & 2-x\\1 & x & x+3 & x+6\end{vmatrix}$，证明 $f'(x)=0$ 有小于 1 的正根.

分析：由行列式定义易知 $f(x)$ 是 x 的多项式，显然 $f(x)$ 连续且可导．根据罗尔定理，我们只需证明 $f(0)=f(1)$.

证明：因为

$$f(0)=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & 4\\1 & 2 & 2 & 4\\2 & 0 & 1 & 2\\1 & 0 & 3 & 6\end{vmatrix}=0,\quad (3,4\text{两列对应成比例})$$

$$f(1)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 4\\1 & 1 & 2 & 4\\2 & 0 & 1 & 1\\1 & 1 & 4 & 7\end{vmatrix}=0,\quad (1,2\text{两行相等})$$

又知多项式 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，故 $\exists\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$，即 $f'(x)=0$ 有小于 1 的正根.

✧　与代数余子式相关的题型

代数余子式的性质除用于按行（列）展开公式计算行列式外，还有两条重要性质：

1. 只改变 a_{ij} 所在行或列中元素的值并不影响其代数余子式 A_{ij}，特别地，A_{ij} 与 a_{ij} 的取值没有关系.

2. 行列式一行（列）元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和必为零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j)$$
$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0\quad(i\neq j)$$

例 7：已知行列式 $D=\begin{vmatrix}1&0&1&2\\-1&1&0&3\\1&1&1&0\\-1&2&5&4\end{vmatrix}$，求（1）$A_{12}-A_{22}+A_{32}-A_{42}$；（2）$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$，

其中 A_{ij} 是 D 中第 i 行第 j 列元素的代数余子式.

分析：（1）虽然我们可以先分别算出每一个代数余子式，然后再求和，但这往往是烦琐的. 注意到 $a_{11}=1, a_{21}=-1, a_{31}=1, a_{41}=-1$，因而

$$A_{12}-A_{22}+A_{32}-A_{42}=a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{33}+a_{41}A_{42}=0$$

（2）由于 A_{ij} 与 a_{ij} 的取值无关．根据要求，可构造一个新的行列式 D'（将行列式 D 中第 4 行元素用所求表达式中 A_{4j} 的系数替换），即 $D'=\begin{vmatrix}1&0&1&2\\-1&1&0&3\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}$．$D$ 与 D' 仅第 4 行元素不同，

因而它们的代数余子式 $A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44}$ 是完全一样的，将 D' 按第 4 行展开有

$$D'=1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43}+1\cdot A_{44}=A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$$

因而解（2）只需算出 D' 的值即可．为此

$$D'\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix}1&0&1&2\\-1&1&0&3\\1&1&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第四行展开}}\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&0\end{vmatrix}=-1$$

即 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=-1$．

例 8：已知四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\3&3&4&4\\1&3&3&2\\1&1&4&4\end{vmatrix}=-24$，求 $A_{41}+A_{42}$ 与 $A_{43}+A_{44}$，其中 A_{4j} $(j=1,2,3,4)$ 是 D 中第 4 行第 j 列元素的代数余子式.

解：将 D 按第 4 行展开，以及用第 2 行元素乘以对应的第 4 行元素的代数余子式，得

$$\begin{cases}A_{41}+A_{42}+4(A_{43}+A_{44})=-24\\3(A_{41}+A_{42})+4(A_{43}+A_{44})=0\end{cases}$$

由此解得

$$A_{41}+A_{42}=12$$
$$A_{43}+A_{44}=-9$$

例 9：设 A_{ij} 是 3 阶行列 D 的元素 a_{ij} 的代数余子式，$A_{ij}=a_{ij}$，且 $a_{11}\neq 0$，D^2 等于 D 的转置行列式，则 D 的值是多少？

解：因 $D^2=D^{\mathrm{T}}=D$，因而 $D(D-1)=0$，得 $D=0$ 或 $D=1$.

又因为 $A_{ij}=a_{ij}$，$a_{11}\neq 0$，因而 $D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2\neq 0$，故 $D=1$.

例 10：设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix}$，把 D 的第 i 行 $(i=1,2,3,\cdots,n)$ 换成 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},1$，而其他的行不变，得到新的行列式 D_i，试证：$D=D_1+D_2+\cdots+D_n$.

证明：

$$D_1+D_2+\cdots+D_n=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=(x_1A_{11}+x_2A_{12}+\cdots+x_{n-1}A_{1,n-1}+A_{1n})+(x_1A_{21}+x_2A_{22}+\cdots+x_{n-1}A_{2,n-1}+A_{2n})+\cdots+\\&\quad(x_1A_{n1}+x_2A_{n2}+\cdots+x_{n-1}A_{n,n-1}+A_{nn})\\&=x_1(A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1})+x_2(A_{12}+A_{22}+\cdots++A_{n2})+\cdots+x_{n-1}(A_{1,n-1}+\\&\quad A_{2,n-1}+\cdots+A_{n,n-1})+(A_{1n}+A_{2n}+\cdots+A_{nn})\end{aligned}$$

其中 A_{ij} 为 D 中 a_{ij} 的代数余子式.

由于 $A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1}=\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & 1 \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix}=0$，同理：

$A_{12}+\cdots+A_{n2}=\cdots=A_{1,n-1}+\cdots+A_{n,n-1}=0$，而 $A_{1n}+A_{2n}+\cdots+A_{nn}=D$，故结论成立.

例 11：设$D=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$，计算$D_1=\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots A_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots \\ A_{n-1,1} & \cdots A_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$，其中$A_{ij}$为$a_{ij}$在$D$中的代数余子式.

解：$D_1=\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots A_{1,n-1} & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n-1,1} & \cdots A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ 0 & \cdots 0 & 1 \end{vmatrix}$

而$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots A_{1,n-1} & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n-1,1} & \cdots A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ 0 & \cdots 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} D & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & D & 0 \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{vmatrix}=D^{n-1}\cdot a_{nn}$

故$D_1=D^{n-2}\cdot a_{nn}$.

评注：此题利用了矩阵乘法性质$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$，$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$为同阶矩阵.

题型二：行列式的计算

✧ 方法 I：根据行列式元素的特点，或者化为上（下）三角形行列式，或者利用行列式展开方法求解.

例 12：计算$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$

解：从第 4 行开始，后行减前行得

$$D\ \underline{\underline{\ r_4-r_3\ }}_{r_3-r_2,r_2-r_1}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}\ \underline{\underline{\ r_4-r_3\ }}_{r_3-r_2}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}\ \underline{\underline{\ r_4-r_3\ }}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4$$

评注：行列式恒等变形时，把某行（列）的倍数加至其余行（列），使其出现零是最常用的.

例 13：计算$D=\begin{vmatrix}2+x & 2 & 2 & 2\\ 2 & 2-x & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2+y & 2\\ 2 & 2 & 2 & 2-y\end{vmatrix}$的值.

分析：首先利用众多相同的元素 2，化出许多 0 元素，显然利用第 1、2 行做运算，第 3、4 行做运算，然后再进一步化简.

解：

$$D\xlongequal[r_3-r_4]{r_1-r_2}\begin{vmatrix}x & x & 0 & 0\\ 2 & 2-x & 2 & 2\\ 0 & 0 & y & y\\ 2 & 2 & 2 & 2-y\end{vmatrix}\xlongequal[C_4-C_3]{C_2-C_1}\begin{vmatrix}x & 0 & 0 & 0\\ 2 & -x & 2 & 0\\ 0 & 0 & y & 0\\ 2 & 0 & 2 & -y\end{vmatrix}=x\cdot\begin{vmatrix}-x & 2 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 2 & -y\end{vmatrix}=x(xy^2)=x^2y^2$$

例 14：计算$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ x+1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}$的值.

解法一：把每列均加至第 1 列，提取公因式x，再将第 1 列加至第 2、4 列，第 1 列的−1 倍加至第 3 列，得

$$D=\begin{vmatrix}x & -1 & 1 & x-1\\ x & -1 & x+1 & -1\\ x & x-1 & 1 & -1\\ x & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & x\\ 1 & 0 & x & 0\\ 1 & x & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=x^4$$

评注：行列式恒等变形时，将每行（列）加至同一行（列）是重要技巧之一.

解法二：把第 2 行的−1 倍加到第 1 行，再把第 4 列加至第 3 列，按第 1 行展开，得

$$D=\begin{vmatrix}0 & 0 & -x & x\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ x+1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & x\\ 1 & -1 & x & -1\\ 1 & x-1 & 0 & -1\\ x+1 & -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=(-x)\begin{vmatrix}1 & -1 & x\\ 1 & x-1 & 0\\ x+1 & -1 & 0\end{vmatrix}=(-x^2)\begin{vmatrix}1 & x-1\\ x+1 & -1\end{vmatrix}=x^4$$

解法三：由于行列式$D=\begin{vmatrix}0+1 & 0-1 & 0+1 & x-1\\ 0+1 & 0-1 & x+1 & 0-1\\ 0+1 & x-1 & 0+1 & 0-1\\ x+1 & 0-1 & 0+1 & 0-1\end{vmatrix}$中每列都是两个数之和，则$D$可以拆成$2^4$个 4 阶行列式之和，在这些行列式中凡是包含两列对应成比例的，值均为 0，故只有 5 个行列式的值不为 0，于是有

$$D=\begin{vmatrix} & & & x\\ & & x & \\ & x & & \\ x & & & \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} & & & -1\\ & & x & -1\\ & x & & -1\\ x & & & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} & & 1 & x\\ & & 1 & \\ & x & 1 & \\ x & & 1 & \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} & -1 & & x\\ & -1 & x & \\ & -1 & & \\ x & -1 & & \end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & & & x\\ 1 & & x & \\ 1 & x & & \\ 1 & & & \end{vmatrix}=x^4-x^3+x^3-x^3+x^3=x^4$$

例 15：计算行列式$D=\begin{vmatrix}a+x_1 & a & \cdots & a\\ a & a+x_2 & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a & \cdots & a+x_n\end{vmatrix}$，其中$x_1x_2\cdots x_n\neq 0$.

解法一：将行列式第 1 行的-1倍分别加至其余各行，由于$x_1x_2\cdots x_n\neq 0$，再从第i行提出$x_i(i=2,3,\cdots,n)$，将行列式化为下三角形行列式，得

$$D=\begin{vmatrix}a+x_1 & a & a\cdots a\\ -x_1 & x_2 & 0\cdots 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\ \ \vdots\\ -x_1 & 0 & 0\cdots x_n\end{vmatrix}=x_2x_3\cdots x_n\begin{vmatrix}a+x_1 & a & a\cdots a\\ -\frac{x_1}{x_2} & 1 & 0\cdots 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\ \ \vdots\\ -\frac{x_1}{x_n} & 0 & 0\cdots 1\end{vmatrix}=x_2x_3\cdots x_n\begin{vmatrix}a+x_1+\frac{ax_1}{x_2}+\cdots+\frac{ax_1}{x_n} & 0 & 0\cdots 0\\ -\frac{x_1}{x_2} & 1 & 0\cdots 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\ \ \vdots\\ -\frac{x_1}{x_n} & 0 & 0\cdots 1\end{vmatrix}$$

$$=x_2x_3\cdots x_n(a+x_1+\frac{ax_1}{x_2}+\cdots+\frac{ax_1}{x_n})=ax_1x_2\cdots x_n(\frac{1}{a}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n})$$

解法二：由于$x_1x_2\cdots x_n\neq 0$，先从第i行提出x_i，得：$D=x_1\cdots x_n\begin{vmatrix}1+\frac{a}{x_1} & \frac{a}{x_1} & \cdots & \frac{a}{x_1}\\ \frac{a}{x_2} & 1+\frac{a}{x_2} & \cdots & \frac{a}{x_2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{a}{x_n} & \frac{a}{x_n} & \cdots & 1+\frac{a}{x_n}\end{vmatrix}$，

再将第 2 行，…，第n行都加到第 1 行，提出公因子，得

$$D=x_1x_2\cdots x_n(1+\frac{a}{x_1}+\frac{a}{x_2}+\cdots+\frac{a}{x_n})\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \frac{a}{x_2} & 1+\frac{a}{x_2} & \cdots & \frac{a}{x_2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{a}{x_n} & \frac{a}{x_n} & \cdots & 1+\frac{a}{x_n}\end{vmatrix}$$

$$
= x_1 x_2 \cdots x_n \left(1+\frac{a}{x_1}+\frac{a}{x_2}+\cdots+\frac{a}{x_n}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a}{x_2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{a}{x_n} & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= a x_1 x_2 \cdots x_n \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)
$$

评注：对于类似于此例的爪形行列式，把每一行（列）的适当倍数加至第 1 行（列），将其化为下（上）三角行列式．此例中若存在某个 $x_i = 0$，则在解法一中，将第一步得到的行列式沿第 i 列展开来计算．

结合上例中的解法二，根据行列式的特点，将行列式的各行（列）都加到第1行（列），每行（列）的加和相等，然后提取公因子，再计算得到的行列式，也是计算行列式时常用的方法，如下面两个例题．

例 16：计算下列行列式

（1）$D_n = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

（2）$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$

（3）$D_n = \begin{vmatrix} x_1 - a & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - a \end{vmatrix}$

解：（1）将第 2 列，…，第 n 列都加到第 1 列，再沿第 1 列展开，得