系统工程丛刊

运筹学

上册

〔美〕FREDERICK S. HILLIER
GERALD J. LIEBERMAN 著

赵孟养 主译

中国系统工程学会

《系统工程丛刊》出版说明

一、我们编辑出版《系统工程丛刊》，是为了及时交流国内外有关系统工程的理论研究和学术著作、系统工程的教育与普及用书和资料、系统工程在各方面应用的经验。内容兼顾学术研究、实际应用、教育和普及的需要。

二、本丛刊作为内部交流。稿件的著者、译者和编者可另行联系公开出版。

三、丛刊编辑工作由中国系统工程学会组织的编辑委员会负责，印刷出版由中国系统工程学会教育与普及工作委员会的挂靠单位上海机械学院负责。编委会设于上海机械学院系统工程研究所。

四、读者对本丛刊有什么意见和要求，欢迎写信给中国系统工程学会《系统工程丛刊》编委会。地址是：上海市军工路516号上海机械学院系统工程研究所

中译本序

运筹学是在第二次世界大战期间首先在英美两国发展起来的一门科学，主要是研究人力、物力的运用和筹划，以期发挥最大的效益。四十年来，它迅猛发展，不仅分枝日益繁多，且应用范围愈来愈广，已成为系统工程及管理科学所不可缺少的工具。

在我国，虽然运筹学的引进是五十年代的事，但追溯运筹学的思想可说是古已有之。例如，脍炙人口的战国时田忌赛马故事正是一个绝妙的对策论问题。我国运筹学先驱者从《史记》“运筹策帷幄之中，决胜于千里之外”一语摘取“运筹”二字作为这门科学的名称，既显示其军事的起源，也表明其悠久存在于我国的萌芽，是十分恰当的。

自1958年以来，我国对于运筹学个别分枝如线性规划、统筹方法等的应用与研究曾盛极一时。近年来关心运筹学的人更日见增多，迫切需要一本全面论述运筹学的书。本书是美国和加拿大比较流行的《运筹学》教材，内容丰富，阐释明白；各项理论都从数学的观点提出，但用到的数学尽可能保持在比较初等的水平；并有大量逼真的实例与习题。因此，我们决定把它翻译出来，供国内从事于系统工程或管理科学的广大同志使用。本书经中国系统工程学会审定为《系统工程丛刊》之一。

此书的移译工作由我所赵孟养主持。先后协同翻译的有赵永昌（第6章）、王龙德（第8及12章）、王晨（第9章前半部分）、蔡兴国（第9章后半部分、第10及13章）、朱自强（第14及16章）、闵仲求（第15章）、及顾文琪（第17章）。部分初稿曾经王晨校阅。全书由赵孟养统一润饰，最后定稿。全体译者都认真负责，尤其是校阅全书的赵孟养同志治学谨严、考虑周详，不但力求译文明白晓畅，更力求体现作者的原意。

由于运筹学的广泛适用性，此书必然与资本主义的政治、经济、文化、教育等方面都有牵连，译者缺乏资本主义社会的感性认识，对于许多具体问题的理解难免隔靴搔痒之讥。译文中如有错误，欢迎读者批评指正。为保存原书的真面目起见，对原文未作任何增删。但书中有许多实例显然不合我国国情，只能作为参考，亦望读者注意。

此书的付印，得到我院印刷厂通力合作，书中图表的制版得到蔡兴国同志的协助，尤其是在排版过程中王龙德同志不辞辛劳，配合印刷厂同志，精益求精，一并在此志谢。

车宏安
上海机械学院系统工程研究所
一九八一年十二月

第二版原序

对于本书第一版的广泛响应至今依旧使我们深感高兴。可是，由于认识到每年有成千上万的大学生正在通过我们的书被引进运筹学的堂奥，又使我们怀有重大的责任感。所以在接到来自许多教师和大学生的反馈后，我们化费了象我们在编写整个第一版时所用去的那么多时间与精力来修订并琢磨此第二版的材料。可是，当要求我们描述此修订本里的“巨大变化”时，我们却处于无法作答的困境！各项论题大部分并未变更。方向依旧大致相同。许多章节没有本质的变动。实在说，唯一的巨大变化是不计其数的细小改进。抱着叠加原理在此适用的信念，我们希望并且期待这些小的变化叠加起来就成为一部显著地优越的书，一部将是既令人鼓舞而又阐释明白的书。

最明显的变化之一是已新增一章线性规划的应用来强调此项技术的实际重要性。也有好几章已完全重写，借以使材料更为简明清晰，并且还添加或更新了一些段落来反映新的趋势和发展。习题的数目大约已增加一倍，并在书末给出经过挑选的部分答案。我们强调运筹学各项技术之间的相互关系，且应用一些不同的技术来求解同一问题。最后，只有关于可靠性的短章是题材全新的。著者觉得此论题正在日趋重要，因此理应纳入。

我们也煞费苦心于拟出许多有趣味而比较逼真的实例。这许多实例有些是现在这一代大学生所关心的当前社会问题，有些涉及更传统相沿的大规模企业问题，等等。可是，所有这些都旨在引起形形色色大学生的兴趣。

对数学上不那么成熟而更醉心于实际的大学生说来，这些实例应当大大地增强本书的吸引力和易读性。我们还多少更加突出了问题构成及其他一些实际考虑。可是，我们依旧觉得基本的运筹学理论，要从数学的观点来提出，才最能使人理解和领会。所以第二版跟第一版一样，仍然针对着那些宁愿有时适当地运用一些数学而不喜欢过度噜嗦的读者，即在许多不同领域（工程、商业、各门数学科学、及各门社会科学）里的形形色色大学生。

可是，本书用到的数学一直保持在比较初等的水平。关于数学规划的第 2 至第 7 章（第一篇），所要求的数学不超过中学代数。在提出概率性模型的第二篇（第 8 至第 15 章）里，稍多一些的数学训练就合乎需要。虽然第二篇的若干部分可以无须更多的先决条件来修习，在少数几处却假定读者已有初等微积分的基础知识，而且一个大学生在数学上经由选修初等微积分课程所达到的成熟也不无实用。第 8 章给本书所需要的概率论提供了入门或复习教材，但概率的先期引用想必是有帮助的。关于数学规划高深论题的第三篇(第 16 至第 18 章)则是写给那些希望超越数学规划初等材料而继续攀登的大学生的；这也需要在数学上经由通晓微积分所达到的成熟。此外，在第三篇的若干部分里还用到一些（在附录中加以复习的）基本矩阵运算。

有多种方式把此课本里的材料装配成各门课程。本书是按难度的等级来分篇的，因此足以适应各种相当悬殊的大学生能力。它大部分针对着三、四年级大学生水平，并且可供第一

年（硕士水平）研究生使用。本书很具有灵活性。第一篇、或第一与第三篇（数学规划）基本上可独立于第二篇（概率性模型）来修习，且反之亦然。此外，在第一与第三篇内的各章也基本上独立，唯一的例外是它们都用到第2章所提供的基本材料。在第二篇内，修习的范围有相当大的灵活性，纵然材料的稍稍综合还是做得到的。

运用第1至第15各章的一些材料，例如第1至第7、第9至第11、及第15各章的大部分，就可以轻而易举地在一季度（40学时）或一学期里讲授一门包括数学规划与某些概率性模型在内的综述性基础课程。（这是假定已预先具备第9至第15章所必需的初等概率论；否则将要求额外的时间来容纳第8章的材料。）第1至第15各章的大部分材料（除第8章外）可以纳入一门综述性的连续二季度（60学时）课程。第1至第4、及第16各章给一门（一季度）线性规划课程提供出色的基础。第5至第7、第17及第18各章材料所包含的论题成为另一门关于其他确定性模型的（一季度）课程。最后，第9至第15各章的材料含有概率性模型的一些主题，也适于在一门（一季度）课程里讲授。事实上，后面这三门课程（整个课本的材料）可以看作是关于运筹学技术的连续一学年基本课程，形成一项硕士进修计划的核心。目前在斯坦福大学经常开出上述每一门课程，并且一向按所建议的方式在使用此课本。我们在讨论各门课程所取材的篇章时尚未明确提到第19章，策划运筹学研究。第19章类似于第一版里的第2章，但目前不在课本开始时而改在结束时提出。我们觉得，任何大学生，要在已通晓各种可使用于一个课题的技术以后，才有最充分的准备来理解一项运筹学研究是怎样策划的；而不宜在他知道什么是运筹学之前就讨论这样一项研究。所以我们建议把这一章纳入上述每一门课程的结尾，借以使先前所讲授的材料各自占有其适当的位置；但如果教师喜欢，也不妨依旧在开始时提出。*

FREDERICK S. HILLIER
GERALD J. LIEBERMAN

斯坦福大学

1973年十一月

---

*此序最后两段，系著者志谢，在译本中已删去——译注。

上册目录

第二篇 概率性模型

第 1 章 绪　　论

1.1　运筹学的由来

自从产业革命以来，世人已目击各种组织在规模上与复杂性上都有异常的增长。旧时代的手工业小工场已演变成为今天佣资亿万的大企业。此革命变化的一个主要部分就是在这些组织中劳动的分工和管理职责的划分已有惊人的提高。由此取得的成果蔚为奇观。可是，这样有增无已的专门化，除福国利民之外，也已造成新的问题，即，至今仍然正在许多组织中出现的问题。问题之一是一个组织的许多部门倾向于各自发展成相对地独立的王国，具有各自的目的与价值体系，因而忽视了怎样使各自的活动与目标跟整个组织的活动与目标紧紧相啮合。对某一部门最好的事情却常常有损于另一部门，因此就可能终于各行其是，互相抵触。一个相关的问题是随着某一组织中复杂性与专门化的日见提高，要把它的各项可利用资源，以对该组织整个说来最有效的方式，分配给它的各项活动，就变得愈来愈困难。诸如此类的问题及寻求其较好解决办法的需要便提供了运筹学出现的环境。

运筹学的根源可以追溯至好几十年前在某些组织的管理中最先试用科学手段的时候。可是，现已普遍认为，我们叫做运筹学的活动是从二次世界大战初期的军事任务开始的。当时为了全力以赴地作战，迫切需要把各项稀少的资源以有效的方式分配给各种不同的军事经营及在每一经营内的各项活动。所以英国及随后美国的军事管理当局都号召大批科学家运用科学手段来处理这样或那样的战略与战术问题。实际上这便是要求他们对种种（军事）经营进行研究。这些科学家小组正是最早的运筹小组。他们的努力对于赢得不列颠空战、太平洋岛屿战役、北大西洋之战，等等据说都是起了作用的。

受到运筹学在军事上显著成功的鼓舞，工业界对此新领域逐渐感到兴趣。当战后的工业正在自然地恢复繁荣时，由于组织内与日俱增的复杂性和专门化所产生的问题就再一次引起众目睽睽的注意。有愈来愈多的人，包括那些战时曾在运筹小组里或小组外一起工作过的企业顾问在内，逐渐看清楚这些问题基本上便是军事当局所曾经面临的同样问题，只是具有不同的现实环境而已。运筹学就这样开始不知不觉地潜入工商企业和民事政府。截至 1951 年，它早已在英国扎根，而美国也正处于同样演变的进程中。从那时以来，该领域已非常迅速地扩大，这将在 1.3 节中进一步描述。

我们还可以至少识别另外两个因素，对于运筹学在此期间的迅速成长，起了关键的作用。一个因素是关于可供运筹学利用的一些技术，在其革新中很早就取得实质性的进展。战后有许多曾是运筹小组成员或曾听到过这种工作的科学家，在得到启发后从事有关本领域的研究；结果是技术发展水平上的若干重大推进。一个最好的例子就是 George Dantzig 在 1947 年所研究出来的关于求解线性规划问题的单纯形法。运筹学所使用的许多标准工具，例如线性规划、动态规划、排队论、及存贮论，在五十年代结束之前就已经发展得相当完备。除运筹学理论上的这种迅速推进之外，给该领域的扩展以巨大动力的第二个因素是计算机革命的

崛起。为了最有效地处理运筹学所典型地考虑的复杂问题，通常需要大量的计算。这些计算想用笔算来完成，往往是毫无可能的。所以电子数字计算机的发展，把算术计算能力提高到比人力快几万倍或甚至几百万倍，正是对于运筹学的极大恩赐。

1.2 运筹学的性质

什么是运筹学？试图回答这个提问，一种办法便是下定义。例如，我们可以把运筹学描述为就组织系统的各种经营作出决策的科学手段。然而，这个描述，如较早的一些定义尝试一样，是那么笼统，以致同样适用于其他许多领域。所以要掌握运筹学独有的性质，最好的办法或许是让我们来考察它的一些显著特征。

顾名思义，operations research（运筹学）不外乎“research on operations（对各种经营的研究）”。这便多少说出了该领域的手段及应用范围。因此，凡是应用到运筹学的问题就涉及怎样在一个组织内进行并协调各种经营或活动。那个组织的性质基本上无关紧要，而且事实上运筹学已被广泛应用于工商企业、军事部门、民事政府与机构、医院、等等。所以应用的幅度是异常广阔的。运筹学的手段则是科学方法的手段。详细说来，其过程是一开始先仔细观察并构成问题，然后建立一个试图抽出现实问题本质的科学（典型地数学）模型。于是假设此模型充分确切地表示本场合的各主要特点，因而从模型得到的结论（解）也对现实问题有效。此假设随后通过适当的实验工作来修改并核实。这样，在某种意义上说来，运筹学不外乎对各种经营的根本性质进行创造性的科学研究。可是，事情还不止于此。明确说来，运筹学也牵涉到组织的实际管理。所以要取得成功，它还得在必要时向（各）决策者提供建设性的、可理解的结论。总之，运筹学不外乎对各种经营的研究，但并无象牙塔*的利益。

运筹学的又一特征是其宽广的观点。如已在上一节中所暗示，运筹学采取一种组织上的观点。这样，它企图以对整个组织说来最佳的方式解决该组织各部门之间的利害冲突。这并不意味每一问题的研究必须明显地考虑到该组织的所有各方面；宁可说，所追求的目标必须跟整个组织的目标一致。已顺便提过的另一个特征是运筹学试图对考虑中的问题求出最佳或最优解。不满足于仅仅改进现状，其目的在于识别尽可能最佳的行动路线。这种“对最优性的寻求”，虽然必须审慎地来解释，正是运筹学中一个很重要的论题。

所有这些特征很自然地导致又一个特征。显然我们不应当期望任何单独一个人在运筹学工作的所有许多方面或在典型地所考虑的各种问题上都是一名专家；这需要一群具有各种不同背景与技能的个人。所以在对一个新问题作规模齐全的运筹学研究时，通常就必须采用小组协作的手段。这样一个运筹小组典型地必须包罗好些个人，他们是集体说来在数学、统计与概率论、经济学、企业管理、电子计算、工程与物理科学、行为科学、以及运筹学的专门技术上都有高度训练的。该小组也须拥有必要的经验与各种技能来适当地考虑问题中贯穿于整个组织的许多枝节，并且有效地完成运筹学研究的所有不同阶段。

总而言之，运筹学涉及怎样就起源于现实生活的确定性与概率性系统来作出最优决策并塑造模型。这些在政府、企业、工程、经济、以及自然与社会科学里出现的应用大都以有必要分配有限的资源为特征。在这些场合，由运筹学所提供的那种科学分析可以得到相当深入的了解。运筹学手段的贡献主要产生于：

---

* 象牙塔比喻脱离现实生活的小天地——译注。

1. 从现实生活场合抽出本质的要素来构筑一个数学模型，因而可寻求一个跟决策者的目标有关的解。这不外乎在整个系统的现实环境中考察问题。

2. 探索这样一些解的结构并导出有系统的求解过程。

3. 导出一个解，必要时包括数学理论在内，使系统需要性量度有最优值（或许也有可能就备选择的各种行动路线估算它们的需要性量度来进行比较）。

1.3 运筹学的影响

在最近几年中运筹学已对各种组织的管理有愈来愈大的影响。其应用的数量与种类继续在迅速地增长，并且看不到有任何衰退。事实上，此影响之深远，除了电子计算机的问世外，似乎是任何其他最近的发展都无与伦比的。

在二次大战期间使用运筹学获得成功之后，英美军事机关往往在不同的指挥级上继续拥有活跃的运筹小组。结果是现在有着大批叫做“军事运筹学者”的人正在把运筹学手段应用于种种国防问题。例如，他们不仅忙于武器系统规格与使用的战术计划，而且也在考虑更大的关于力量的分配与综合问题。他们的有些技术涉及政治学、数学、经济学、概率论、及统计学中十分尖端的概念。

运筹学也正在被广泛应用于其他类型的组织，包括工商企业在内。几乎所有十多家世界最大的公司以及相当一部分小的工业组织都有设置完善的运筹小组。许多工业、包括飞机与导弹、汽车、通讯、计算机、电力、电子、粮食、冶金、采矿、造纸、石油、及运输在内，已广泛使用运筹学。还有金融机关、政府机构及医院也正在迅速地增多运筹学的使用。

为了更明确起见，让我们来看一些已由运筹学的各项特定技术所解决的问题。线性规划已被卓有成效地运用于解决有关人事安排、物料掺和、配给与运输、及有价证券投资等问题。动态规划已被成功地应用于诸如筹划广告费用、配置推销力量、及生产调度等领域。排队论在解决有关交通拥挤、保养易损机器、确定服务队水准、空运调度、水坝设计、生产调度、及医院经营等问题中都已得到应用。运筹学的其他技术，如存贮论、对策论、及仿拟也已成功地被应用于各式各样的现实环境。

在1972年，Turban① 发表一份关于运筹学活动的调查报告，提供了1969年活动情形的一幅快照。当时他把通讯调查表寄给475家公司的运筹部或管理科学部主任。这些公司选自《幸福(Fortune)》最高500家一览表，使用了其中的最大工业公司300家，从名列300与500之间的公司中所抽出的工业公司50家，以及银行、公用事业、贸易、人寿保险、及运输各类服务行业的最大公司每类25家。寄回的调查表共107份，其中47份(即将近一半)报告它们的总管理处有一个专设的部，主要从事运筹学活动。此外，有13家公司指出，它们在那时已打算在最近的将来设立这样一个部。而且增长率给人以深刻印象：在这些公司中，大约有百分之4在1950年之前已经设部，百分之15在1951与1959年之间，百分之50在1960与1965年之间，以及百分之30在1966年以后。另一个相当有趣的发现是几乎所有这些部都向公司的总经理、副经理、或主管人汇报。该调查又指出，运筹学的各项技术已被多么广泛应用于当前的科研与发展项目；这些结果已在表1.1中示出。

①E. Turban, “A Sample Survey of Operations Research Activities at the Corporate Level（公司级运筹学活动的抽样调查）”, 《Operations Research》, 20:708—721, 1972。

表 1.1 运筹学在当前活动中的使用(Turban 调查)

技术	项目数	使用频率(%)
统计分析†	63	29
仿拟	54	25
线性规划	41	19
存贮论	13	6
统筹方法	13	6
动态规划	9	4
非线性规划	7	3
排队论	2	1
试探规划	2	1
其他	13	6

† 包括概率论、回归分析、指数修匀、统计抽样、及假设检验。

显而易见，统计分析、仿拟、及线性规划是当前被最广泛使用的技术。此外，该调查还揭示，所报告的大多数项目都使用了计算机。

由于运筹学的巨大影响，在全世界好些国家中已成立了致力于此一领域及相关活动的专门学会。在美国，创立于1952年的美国运筹学会(ORSA)约有8,000名会员；成立于1953年的管理科学学会(TIMS)约有6,500名会员。这两个学会各出版一种期刊(《运筹学》与《管理科学》)，现在以每年1,000页以上的篇幅来报导该领域中新的研究与应用。此外，还有其他许多类似的期刊在美、英、法、印度、日本、加拿大、及西德等国家出版。

运筹学在大专院校中也已有相当大的影响。今天大多数主要的美国大学都开设此领域的课程，并且许多大学设有运筹学专门化的或跟此专门化有关的高级学位。结果是每年有成千上万的大学生至少修习运筹学中的一门课程。在该领域中的不少基本研究也是在各大学里进行的。

1.4 运筹学人才的培养

由于运筹学的大发达，在这个领域中的就业机会看来是突出的。训练有素的人才仍然远远供不应求，而且美好的起始职位及迅速的提升都是唾手可得的。运筹小组，由于其工作的性质，势必有出众的幕僚地位，且接近组织中高阶层的领导。他们所探究的问题势必是重要、复杂、而有趣的。所以具有数学与科学倾向而又对实际组织管理感兴趣的任何个人都会发现运筹学职业是报酬丰厚的。

三种互相补充的大学培养是对运筹学职业特别有关系的。第一种是关于运筹学所赖以建立的各项基础的根本训练。这包括数学与科学的基本方法论以及一些专题，如线性代数与矩阵论、概率论、统计推断、随机过程、计算机科学、微观经济学、会计与企业管理、组织理论、以及行为科学。

第二种重要的培养是在运筹学本身，包括该学科的特殊技术，如线性与非线性规划、动

态规划、存贮论、网络流转理论、排队论模型、可靠性、对策论、及仿拟。它还应当含有运筹学方法论的入门，其中把各种不同技术及这些技术对于一项在特定问题领域内的运筹学研究所起作用都安放在各自的应有位置上。包含上述某些专题在内的课程往往在一所大学里由商业、工业管理、数学、统计、计算机科学、经济、及电机工程等不止一个系来开设。这是该学科有广泛应用范围的一种自然反映。由于它确已跨越传统的学科界线，在有些大学里也正在设置单独的运筹学专业或运筹学系。

最后，还不妨在运筹学以外的某一学科，例如数学、统计学、工业管理、商业、或经济学，接受专业化训练。此额外的训练让人拥有一个特别能应用运筹学的领域，而这就应当使那人成为运筹小组的更得力成员。

表 1.2 运筹学工作人员的教育背景（Turban 调查）

主修学科	各学位级上总数的百分比			
	学士	硕士	博士	所有学位级
运筹学与管理科学	3	24	32	12
数学与统计学	26	16	21	22
企业管理	20	27	2	22
工程学	34	17	29	28
其他	17	16	16	16
总数的百分比	27	53	20	

早期的运筹学者都是曾在某一传统学科，如物理学、化学、数学、工程学、或经济学，受到主要训练和做过工作的。他们势必少有或未有运筹学本身的正式教育。可是，随着专门知识主体的扩大，不先受此学科中相当多的教育，要进入本领域，已变得愈来愈困难。结果是虽然依旧常见新的运筹学者持有传统学科的大学学位，但他们一般也已专修运筹学作为其大学学习计划的一部分。根据上述 1972 年 Turban 调查所制成的表 1.2 就指出有哪些传统学科最寻常地充当进入运筹学的运载工具。可是，现在的趋势表明，许多未来的运筹学者将兼有传统学科的大学生学位和运筹学本身的研究生学位。

1.5 全书一瞥

作为运筹学的入门，本书旨在使大学生通晓运筹学模型的构成、求解、及实施，供分析工业或政府中的复杂系统问题之用。第一篇介绍数学规划，这是运筹学一个很突出的领域，大都牵涉到怎样在一个组织的各项活动中间分配有限的资源。第二篇考虑若干概率性模型，这种模型要计及跟未来事件相关联的不确定性，借以分析某些类型的重要问题。第三篇接着讨论数学规划中的一些较高深论题；对专修运筹学的任何人说来，这些论题都是重要的。

在第一与第二篇中所提供的材料大部分可以用实践中所见各种场合的典型实例来描述。

下面便提出这样几个实例的梗概，以后再分别在各章中来详细求解。

举例来说明线性规则技术，有一家公司经营着一个回收中心，专事收集几种固体废材料，并加以处理，俾能合并起来成为一种有销路的产品。此产品可制成不同的等级，视所用材料的配合比而定。虽然每一等级的配合比具有一些灵活性，质量标准却规定某些材料在该产品等级中所允许的最小或最大（按重量）百分比。关于每一等级的合并费及售价都有数据可查。回收中心从一些正规的来源收集其固体废材料，因此通常能够保持稳定生产率来处理这些材料。此外，对于每种材料，每周可供收集并处理的数量以及处理费用都是已知的。运用所给资料，该公司要确定每一等产品的产量以及所用材料的精确配合比，使其每周总利润（总销售收入减去合并与处理两者的总费用）达到极大。

线性规划的另一实例涉及一家炼钢公司正面临着从生产车间散发出各种污染物所引起的大气污染问题。大气层中的三种主要污染物是物质粒子、氧化硫、及碳氢化合物。新的标准要求公司降低这些污染物的年散发量。钢厂有两项主要的污染来源，即制造生铁的高炉和变铁为钢的平炉。在这两处，工程师们已判定最有效的几种消除方法是：(1)增加烟囱的高度，(2)在烟囱里使用过滤装置（包括凝气瓣），及(3)在炉用燃料内加入较洁净的高级原料。所有这些方法究竟能够消去多少散发量有着已知的工艺限度。幸而各种方法都可以按其消除能力的任何分数量来使用。由费用分析已估计出每种消除方法在供高炉与平炉使用时所招致的年度总费用(一种方法，如果以小于全能力来使用，所需费用实质上跟其分数能力成比例)。运用前述数据，现在要确定污染消除的最优计划（极小费用）。这就包括对于(1)高炉与(2)平炉都规定要使用哪几种消除方法以及按其消除能力的多大分数量来使用。

线性规划问题有一种重要的特殊类型叫做运输问题；一个典型实例涉及一家生产罐装豌豆的公司。豌豆在几家距离遥远的罐头厂里加工，然后用卡车装运至美国西部的各调拨仓库。因为运费是一笔主要开支，管理处正在发动一项研究，旨在尽可能降低这些费用。对于即将到来的季度，已估定每家罐头厂的产量将是多少，并且从总的豌豆供应量中已分配一定数额给每一仓库。此项资料（以卡车装车数计）连同每一罐头厂、仓库组合的每装车运费都已给定。使用这些数据，现在要确定一个（最优）计划，在把这些装运量分派给不同的罐头厂、仓库组合时总运费达到极小。

在线性规划之外，还有一些相关的数学规划技术可供处理类似问题之用。这些技术之一是动态规划，它牵涉到作出一系列相互有关的决策。举例来说明，有一家工作量因季节性变化而颇不稳定的加工厂。可是，机器操作工难以雇到，且培训代价高，因此经理不愿意在淡季辞退工人。他又不愿意在无需要时保持高峰工资单。而且他明确地反对在正规基础上的加班工作。由于所有加工业务是按客户订货单来做的，就不可能在淡季里积累存货。所以关于雇用水准应当采取怎样的方针，经理正处于进退两难的境地。在可预见的未来一年四季中，劳动力需要量已有估计数可查。雇用数字不允许降到低于这些水准。超过这些水准的任何雇用则属浪费。工资、雇用费、及解雇费都是已知的。假定雇用水准由于有少数非全时雇员而可能取分数值，现在要确定使总费用达到极小的每季雇用数字。

第二篇所考虑的概率性模型中，有些属于排队（等待线）论的范围。现以某处医院急诊室为例来说明排队论模型。急诊室对于用救护车或私人汽车送至医院的急症患者提供迅速的

医疗。在任何时候总有一个医生在急诊室值勤。可是，由于急症患者有日益增长的趋势宁愿使用这些急救设施而不去看私人医师，该医院已察觉到急诊室就诊人数正在逐年增加。结果是在高峰使用时间（黄昏）到达的病人就不得不挨次等待医生来诊治。所以有人建议，在这段时间内应当增派第二个医生至急诊室，以便同时可看两个急症病号。认识到急诊室是一个排队系统，就有几种备选择的排队论模型可用来预测该系统拥有一个医生及拥有两个医生的等待特征，从而将帮助医院来评定增添第二个医师的建议。

一个类似的排队实例，来自完全不同的现实环境，是要确定一群机器的修理工的最优人数。有一家公司在其生产设备中使用着10台相同的机器。可是，由于这些机器经常发生故障而需要修理，公司只有足够的操作工来同时操作八台机器，因此有两台机器可以在其他机器停下时作为后备来使用。这样，每当等待修理的机器不超过两台时，总有八台在运转；但等待修理的机器每增多一台，运转中机器就减少一台。关于某一台机器在其发生故障前已运转时间的概率分布以及修理一台机器所需要时间的概率分布都是由过去记录已知的。直到现在为止，该公司只有一个修理工来修理这些机器。可是，这就经常造成因运转中机器不到八台而降低产量。所以正在考虑雇用第二个修理工，以便同时可修理两台机器。这样，所要研究的排队系统以修理工为服务者及需要修理的机器为顾客，其中的问题是要在一个或两个（或可能更多个）服务者之间作出抉择。已知每一个修理工的费用及机器不能运转时的损失费，现在要确定修理工的最优人数。

举例来说明存贮论，有一家电视机制造公司自行生产扬声器，使用于自己的电视机产品。电视机以已知的月生产率在流水线上装配。扬声器则成批生产，因为没有理由要建立流水线，而且能够在短时间内生产较大的数量。该公司所关注的就在于确定何时生产扬声器以及生产多少。必须考虑到好几笔费用：（1）在每次成批生产时，要负担一笔准备费。这笔费用包括“加工机械装备”费、管理费、记录保管、等等。（2）扬声器的大批量生产导致大量存货，结果是贮存一个扬声器的每月费用。这笔费用包括资金搁置损失、贮存场地、保险费、税款、保护设备、等等。(3) 要负担单独一个扬声器的生产成本（不包括准备费在内）。（4）公司的方针严禁故意造成任何部件的短缺。可是，扬声器会意外地出现短缺，结果是每个扬声器在需要时无法供应的每月损失费。这笔费用包括电视机完全装竣后再安上扬声器的代价、贮存场地、延迟的收益、记录保管、等等。已知这几笔费用的数据，现在要确定最优批量（及生产周期）。

Markov决策过程的应用可以通过一种生产过程来描述，该过程包含一台在繁重使用下质量与产量都迅速恶化的机器，因而要在每天收工时加以检查。在检查之后，立即记下机器的情况，区别为四种可能状态之一：0（完好如新），1（可运转——小恶化），2（可运转——大恶化），3（不可运转——产品质量不合格）。该系统的状态假定是按照某种已知的概率性“运动规律”演变的。在每天收工时，可以作出三种决策之一：（1）不碰机器，（2）检修机器，使其以小恶化可运转，及（3）加以更换，结果是一台新机器。根据当天收工时所看到的系统的状态及所作出的决策，就招致一笔费用。已知这些费用及概率性“运动规律”的描述，现在要寻求最优维修方针。

第一篇　数学规划

第2章　线性规划

许多人把线性规划的发展列为二十世纪中期最重要的科学进步之一，而我们也不得不同意这种评价。正是从1950年起，它的影响一直非同小可。今天它是那样一种标准工具，已使世界各工业化国家中即使中等大小的公司或企业节约了数以千计或兆计的美元；它在社会其他部分的使用也正在迅速蔓延。关于这门学科，现在已编有几十种课本，而描述重要应用的已发表论文早就远远超过100篇。事实上，已有估计数字表明①，计算机上全部科学计算的百分之25是由线性规划及一些密切相关技术来使用的。

此非凡的工具有什么性质？它是对付哪类问题的？对这些提问，随着读者看过后面的实例，便会有深入的了解。可是，一句口头的概括或许有助于勾勒全貌。简单说来，线性规划所典型地处理的问题就是怎样以尽可能最佳（即最优）的方式在各项竞争着的活动中间分配有限的资源。每当人们必须选择某些活动的水平来竞争为进行那些活动所必需的稀少资源时，就可以产生这样的分配问题。此描述所适用的种种场合真是五花八门：从生产设备按产品的调拨到国家资源对国内需要的分配，从有价证券的挑选到装运模式的抉择，从生产调度到客厅博戏的对策，等等，几乎是无穷无尽的。可是，这些场合无不含有一个共同的要素，即必须把某些资源分配给某些活动。

Linear（线性）programming（规划）利用一个数学模型来描述所关注的问题。形容词"linear"意味着在此模型中所有的数学函数必需是线性的。单词"programming"在这里并不指计算机的程序设计；相反地，它实质上就是"planning"（拟订计划）的同义词。这样，线性规划就是拟订活动计划以便得到一个"最优"结果，即在所有可行的备选择方案中（按照数学模型看来）最佳地达到规定目标的那个结果。

鉴于它的重要性，我们用以下三章的篇幅来论述线性规划。在这一章中，我们就线性规划的一般特点，包括模型的形式及求解过程在内，提供基本的入门。下一章考虑若干特殊类型的线性规划问题，这些问题因为它们的重要性是有理由要个别地来研讨的。第4章于是集中探究线性规划的应用，包括更困难的构成问题以及灵敏度分析在内。比较专门的论题则留给第16章。读者还可以指望在其他几章中看到线性规划被应用于运筹学的其他领域。

在这一章中我们首先阐述一个线性规划问题的小型典范实例。此实例小到能够用图形直截了当地解出。在提出一般线性规划模型及另外一些实例后，我们将接着利用此同一个典范实例来具体说明线性规划（叫做单纯形法的）一般求解过程的原理和技术细节。

① 根据1970年国际商用机器公司关于计算机用途的研究报告。

2.1 典范实例

温多尔玻璃公司专事制造优质玻璃产品，包括窗户与玻璃门在内。它拥有三个工厂。铝框与金属附件在工厂 1 生产，木框在工厂 2 生产，而工厂 3 则用来制造玻璃并装配产品。

由于收益日见减少，总管理处已决定要整顿产品线。几种无利可图的产品正在逐渐停产，从而可腾出生产能力来承制一两种已有需求的潜在新产品。这些拟制的产品之一（产品 1）是 8 呎铝框玻璃门。另一种产品（产品 2）是大号（4×6 呎)双链木框窗户。销售部已断定，任何一种产品，该公司如果以可利用的能力来制造，能造多少就能销多少。可是，由于两种产品要竞争工厂 3 的相同生产能力，还不清楚这两种产品要有怎样的配合比才最为有利可图。所以管理处已要求运筹部来探究这个疑问。

在经过一番调查之后，运筹部确定了（1）各工厂生产能力可供这些产品利用的百分比，（2）各产品所需要的百分比，按每分钟内所制成的每件计算，以及（3）各产品的单件利润*。此项资料已在表 2.1 总括起来。因为在工厂 3 里凡是一种产品所已占去的能力，另一种产品就无法利用，所以运筹部立即认识到这是经典“产品配合比”型的线性规划问题，并且下一步就来着手问题的构成与求解。

表 2.1 温多尔玻璃公司数据

工厂 \ 产品	每件所用能力 生产率 1	2	可利用能力
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
单件利润	$3	$5	

作为线性规划问题的构成 为了构成此问题的数学（线性规划）模型，设 x_1 与 x_2 分别表示每分钟内所制成产品 1 与产品 2 的件数，并设 Z 为从而对每分钟利润所作出的贡献。这样，x_1 与 x_2 就是模型的决策变量，而目标是要选择这些变量的值，使

$$Z = 3x_1 + 5x_2$$

达到极大，且满足有限的可利用工厂能力所施加在这些值上的各项限制。我们从表 2.1 可知，每分钟内所制成的每件产品 1 要用去工厂 1 能力的百分之 1，然而只有百分之 4 可利用。此项限制在数学上由不等式 $x_1 \leq 4$ 来表达。类似地，工厂 2 所施加的限制是 $2x_2 \leq 12$. 在选定 x_1 与 x_2 作为新产品的生产率后，工厂 3 所消耗能力的百分比将是 $3x_1 + 2x_2$。所以工厂 3 的限制有算式 $3x_1 + 2x_2 \leq 18$。又因生产率不可能是负数，还必须限制决策变量为非负：$x_1 \geq 0$ 及 $x_2 \geq 0$。

用线性规划的数学语言概括说来，本问题是要选择 x_1 与 x_2 的值，借以使

$$Z = 3x_1 + 5x_2 \text{ 达到极大，}$$

* 以美元计。在本书中所有的“元”系指“美元”——译注。

且满足各项限制：

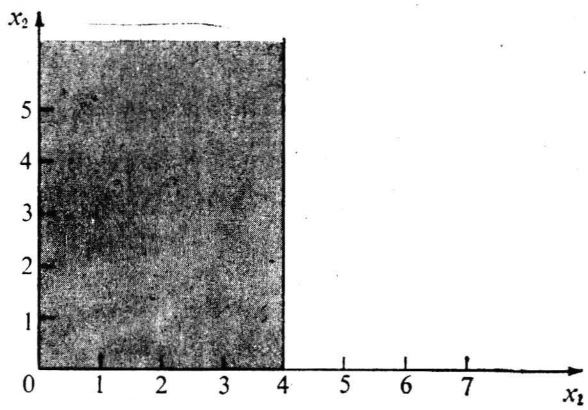
$$x_1 \leq 4,$$
$$2x_2 \leq 12,$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18,$$

及

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

（读者注意在此线性规划模型中 x_1 与 x_2 各系数的配置实质上跟表 2.1 中所总括的资料一模一样。）

图 2.1 阴影部分显示 $x_1 \geq 0$，$x_2 \geq 0$，$x_1 \leq 4$ 所容许的（x_1，x_2）值



图形求解法　此很小的问题只有两个决策变量，因而只有二“维”，所以可利用图形来求解。这不外乎以 x_1 与 x_2 为坐标轴作出一个二维图形。第一步是要识别各项限制所许可的(x_1,x_2)值，其法是绘出许可值范围所必具的边界线。首先，注意非负性限制 $x_1 \geq 0$ 及 $x_2 \geq 0$ 要求（x_1，x_2）都在两坐标轴的正侧。其次，可以看出 $x_1 \leq 4$ 的限制意味着（x_1，x_2）不能在直线 $x_1 = 4$ 的右侧。这些结果已在图 2.1 示出，只有阴影部分所包含的（x_1,x_2）值依旧被容许。以类似的方式可给许可区域的边界添上直线 $2x_2 = 12$。最后一项限制 $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ 则要求标绘满足 $3x_1 + 2x_2 = 18$ 的各（x_1，x_2）点（另一条直线），从而完成全部边界。（注意，满足 $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ 的点就是那些在直线 $3x_1 + 2x_2 = 18$ 下方的点，所以这是一条极限线，越过此线不等式便不再成立。）由此得出的（x_1，x_2）许可值区域已在图 2.2 示出。

最后一步是要在此区域里挑出使 $Z = 3x_1 + 5x_2$ 有极大值的点。这一步在稍经实践后便将自动化，但为了揭示它的基础，从试错法入手是有教益的。举例来说，试以 $Z = 10 = 3x_1 + 5x_2$ 来看许可区域里是否有任何(x_1,x_2)值产生跟 10 一样大的 Z 值。绘出直线 $3x_1 + 5x_2 = 10$，可见在此直线上有许多点都在该区域之内。所以试用一个更大的 Z 值，比如说 $Z = 20 = 3x_1 + 5x_2$. 又有直线 $3x_1 + 5x_2 = 20$ 的一段在该区域之内，因而 Z 的最大许可值必然至少是 20. 注意这一条有更大 Z 值的直线比第一条更高一些并离开原点更远一些，而且两条线是平行的。这样，此试错法无非是要绘出一族平行线①，其中各线至少含有许可区域里的一点，并从中选出（在 Z 值增大的方向）离开原点最远的线。此线经过点（2，6），如图 2.3所示，所以其方程是 $3x_1 + 5x_2 = 3(2) + 5(6) = 36 = Z$. 因此，所要的解是 $x_1 = 2$，$x_2 = 6$，也就是说，温多尔玻璃公司应当分别以每分钟二件与每分钟六件的生产率制造产品 1 与产品 2，由此获得的利

① 在稍经实践后，可知更简易的方法是实际只要绘出这些直线中的一条来确定斜率，然后凭视觉平行自身来移动此线。