21世纪普通高等院校本科应用型规划教材
——经管类

Xianxing
DAISHU

线性代数

主　编　潘春跃
副主编　林映光　汤红英

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

21世纪普通高等院校本科应用型规划教材——经管类

线 性 代 数

主 编 潘春跃
副主编 林映光 汤红英

西南交通大学出版社
·成 都·

内 容 提 要

本书主要内容包括行列式、Cramer 法则；矩阵的运算；线性方程组、向量的运算；特征值和特征向量、矩阵的对角化、投入产出数学模型；二次型．本书侧重于有关理论、方法的应用和经济数学模型的介绍，各章附有习题．例题丰富，习题量较大，可供高等院校经济类、管理类专业学生选用，也可供理工科学生选用和参考．

本书在内容安排上还考虑了经济管理类学生考研的需要，因而也适合于考研学生复习选用．

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 /潘春跃主编．—成都：西南交通大学出版社，2008.8
21 世纪普通高等院校本科应用型规划教材．经管类
ISBN 978-7-5643-0017-3

Ⅰ．线… Ⅱ．潘… Ⅲ．线性代数－高等学校－教材
Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 126142 号

21 世纪普通高等院校本科应用型规划教材——经管类

线 性 代 数

主编 潘春跃

*

责任编辑 张宝华
封面设计 本格设计
西南交通大学出版社出版发行
（成都二环路北一段 111 号 邮政编码：610031 发行部电话：028-87600564）
http://press.swjtu.edu.cn
四川锦祝印务有限公司印刷

*

成品尺寸：170 mm×230 mm 印张：12.125
字数：224 千字 印数：1—3 000 册
2008 年 8 月第 1 版 2008 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5643-0017-3
定价：19.80 元

前　言

根据高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革总体目标的要求，为适应我国在 21 世纪社会主义建设和经济发展的需要，培养“厚基础、宽口径、高素质”的人才，我们编写了本套经济数学教材．本套教材包括《线性代数》和《概率论与数理统计》两个部分．

《线性代数》作为现代数学的重要分支，用代数方法解决实际问题已渗透到现代科学、技术、经济、管理的各个领域，因此，《线性代数》是高等院校经济管理本科各专业的一门重要基础课程．由于线性问题大量存在于科学技术的各个领域，而某些非线性问题在一定条件下可以转化为线性问题而加以解决，因此，《线性代数》的基本理论和方法广泛地应用于各个学科领域．

参加本教材编写工作的都是具有多年教学实践经验的教师，他们在编写过程中结合自己多年来的教学实践经验，使本教材具有自身的特色和优势：

一是在注重学科体系系统性和科学性的基础上，突出教材“主线”，即剔除了枝节问题和烦琐的证明，做到理论体系的介绍系统、规范、简洁，使学生阅读和学习本教材时更能抓住重点，容易理解和掌握相关知识并易于接受．

二是教材在阐述过程中注重不同数学基础的学生的学习，由浅入深，深入浅出，尤其是对一些重要、典型的解题方法给出了提示和强调，重在方法和解题思路的介绍，以便使学生注意学习和掌握解题思路．

三是本教材结合了本科教学的现状和特点，体现“大众化教育”和“社会应用型人才”培养的要求，注重培养学生的实际应用能力，例题选择时，注重典型性、多样性和可变性相结合．

本书可作为高等院校经济管理类专业数学基础课程本科教材，也可作为自学、多练类型学习者的辅导书和参考资料．

本书由潘春跃副教授任主编，林映光副教授、汤红英副教授任副主编．参加编写的还有叶一军、彭祖成．其中，第一章由潘春跃负责编写；第二章由汤红英负责编写；第三章由林映光负责编写；第四章由叶一军负责编写；第五章由彭祖成负责编写．

编写过程中得到了西南交通大学出版社的大力协助和支持，在此表示诚挚的谢意.

由于时间仓促，本书难免存在不足和错误的地方，请各位专家和读者批评指正，我们一定虚心接受并不断修正完善.

编　者

2008 年 4 月于四川理工学院

目　　录

第一章 行列式

【本章要点】

（1）排列及逆序数.

（2）行列式的定义.

（3）行列式的性质及计算.

（4）行列式按行（列）展开.

（5）克莱姆（Cramer）法则.

【学习目标】

（1）理解排列、逆序数、奇排列、偶排列的定义.

（2）理解对换改变排列的奇偶性及奇排列偶排列各占一半.

（3）理解行列式的定义.

（4）掌握行列式的性质、展开和计算.

（5）会用克莱姆（Cramer）法则解方程.

第一节 行列式的定义

一、排 列

定义 1.1 由 n 个不同的数码1, 2, ⋯, n 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 级排列，简称排列． n 个自然数1, 2, ⋯, n 的排列共有 $n!$ 个．

例如，12345; 23145; 32514; ⋯5 级排列，共有 $5! = 1\times2\times3\times4\times5=120$ 种．

排列具有以下特点：

(1) 排列的对象是自然数1, 2, ⋯, n，并且是这 n 个自然数的全排列.

(2) 具有有序性.

(3) n 个自然数无重复.

定义 1.2 在一个排列中，如果一个大的数排在一个小的数之前，就称这

两个数组成一个反序或逆序.

在$n!$个n级排列中，只有 $123\cdots n$是按数码从小到大的自然顺序组成的一个排列，称为顺序排列（或标准排列）.

例如，12345 为顺序排列，而排列 23145 中，2 与 1；3 与 1 组成逆序，共有 2 个逆序，即此排列的逆序总数为 2.

定义 1.3 一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数，用$N(i_1i_2\cdots i_n)$表示，逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列. 逆序数为零的排列，如$12\cdots n$，规定为偶排列.

例如，排列 23145 中，$N(23145)=2$，为偶排列；排列 32514 中，$N(32514)=5$，为奇排列；

排列 12345 中，$N(12345)=0$，为顺序排列，也为偶排列.

在一个排列$i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$中，如果将其中的两个数码$i_s$与$i_t$对调，其他数码不变，得到另一个排列$i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这样的变换称为一个对换，记为对换$(i_s,\ i_t)$.

例如，排列 23145 中，$N(23145)=2$，施以对换$(1, 4)$后为 23415，$N(23415)=3$，对换前为偶排列，对换后为奇排列. 因此，我们很容易理解以下定理.

定理 1.1 任意一个排列经过一次对换后奇偶性改变.

证明 （1）首先证明对换相邻两个数码$i,\ j$的情形. 设排列为

$$AijB$$

其中A, B表示除$i,\ j$两个数码外其余的数码. 对换$(i,\ j)$后排列变为

$$AjiB$$

A, B中数码次序未变，并且A, B相对$i,\ j$的次序也未改变，只有i与j的次序改变. 此时，有以下结论：

① 当$i<j$时，逆序数增加 1 个，奇偶性改变；

② 当$i>j$时，逆序数减少 1 个，奇偶性改变.

（2）证明一般情形. 设原排列为

$$Aik_1k_2\cdots k_s jB$$

对换$(i,\ j)$后排列变为

$$Ajk_1k_2\cdots k_s iB$$

上面对换的结果可以看成是经过下面两个步骤完成的：

① 首先，在原排列中将数码 i 依次与 $k_1, k_2, \cdots, k_s, j$ 作 $s+1$ 次相邻对换，变为

$$Ak_1k_2\cdots k_s\,jiB$$

② 再将 j 依次与 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 作 s 次相邻对换得到新排列

$$Ajk_1k_2\cdots k_s iB$$

即新排列可由原排列经过 $2s+1$ 次相邻对换得到. 也就是说，作了奇数次相邻对换，由（1）的结论知新排列与原排列的奇偶性改变.

定理 1.2 $n(n>1)$ 阶排列总数中，奇排列、偶排列各占一半，即奇排列数等于偶排列数，均为 $\dfrac{n!}{2}$.

证明 设奇排列为 p 个，偶排列为 q 个. 若将每一个奇排列都进行相同的对换，如都对换 $(1, 2)$，则由定理 1.1 知，p 个奇排列全部变为偶排列，于是有

$$p\leqslant q$$

同理，将全部偶排列也进行相同的对换，则 q 个偶排列全部变为奇排列，于是有

$$q\leqslant p$$

故

$$p=q$$

即奇排列、偶排列各占一半，均为 $\dfrac{n!}{2}$ 个.

例 1 计算下列各排列的逆序数，并讨论它们的奇偶性.

（1）217986354;

（2）$(2k)1(2k-1)2(2k-2)3(2k-3)\cdots(k+1)k$;

（3）$n(n-1)(n-2)\cdots321$.

解 (1) 分别算出每个数码前面比它大的数码的个数，即逆序数，再求和. 计算结果如表 1.1 所示.

表 1.1

排列	2	1	7	9	8	6	3	5	4	$N(217986354)$
逆序数	0	1	0	0	1	3	4	4	5	18

故 $N(217986354)=0+1+0+0+1+3+4+4+5=18$，为偶排列.

（2）计算结果如表 1.2 所示.

表 1.2

排列	$2k$	1	$2k-1$	2	$2k-2$	3	$2k-3$	…	$k-1$	$k+1$	k
逆序数	0	1	1	2	2	3	3	…	$k-1$	$k-1$	k

故
$$N\left[(2k)1(2k-1)\cdots k\right]=0+1+1+2+2+\cdots+(k-1)+(k-1)+k$$
$$=2\times\frac{1+(k-1)}{2}(k-1)+k=k^2$$
所求排列的奇偶性与 k 的奇偶性相同.

(3) 计算结果如表 1.3 所示.

表 1.3

排列	n	$n-1$	$n-2$	…	3	2	1
逆序数	0	1	2	…	$n-3$	$n-2$	$n-1$

故
$$N\left[n(n-1)\cdots 21\right]=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)$$
$$=\frac{1+(n-1)}{2}(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

例 2 选择 i 与 j 使排列 $1i25j4869$ 成为

(1) 奇排列;

(2) 偶排列.

解 $1i25j4869$ 是 9 级排列，其中 i 与 j 可取的数有两种：$i=3$，$j=7$ 或 $i=7$，$j=3$.

当 $i=3$，$j=7$ 时，排列为 132574869，依次进行（3，2），（5，4），（7，5），(7，6)，(8，7) 对换后分别为：123574869，123475869，123457869，123456879，123456789，最后对换成了顺序排列，即为偶排列.

由于对换改变排列的奇偶性，所以对换 5 次，即奇数次后变成了顺序排列，即偶排列．故当 $i=3$，$j=7$ 时，为奇排列；当 $i=7$，$j=3$ 时，即进行一次对换，变成偶排列.

由此引入如下定理.

定理 1.3 任意一个 n 级排列都可经过一些对换变成自然顺序，并且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.（证明略）

二、行列式的定义

定义 1.4 用 n^2 个元素 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，其中横排称为行，纵排称为列．n 阶行列式可记为 D，或 $\det A$, 或$|A|$, 或$|a_{ij}|$，即

$$D=|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是1, 2, …, n 的一个排列，每一项都按下列规则带有符号：当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，取正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，取负号．

这一定义可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.1}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和．

说明：

（1）n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和．

（2）符号由 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 决定，即当 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 为偶数时，即偶排列，取正

号；当 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 为奇数时，即奇排列，取负号. 因此，n 阶行列式所表示的代数和中的一般项可写为

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.2}$$

（3）因为 $j_1 j_2 \cdots j_n$ n 级排列共有 $n!$ 种，故 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 共有 $n!$ 项. 由于奇排列偶排列各占一半，因此，正项和负项各占一半.

定义表明，为了计算 n 阶行列式，首先作所有可能由位于不同行不同列元素构成的乘积，把构成这些乘积的元素按行标排成自然顺序，然后由列标所成的排列的奇偶性决定这一项的符号.

现以 $n=2$ 和 $n=3$ 阶行列式为例说明：

二阶行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

(1) 行列式的值等于所有取自不同行不同列的 2 个元素乘积的代数和.

(2) 各项的符号由 $j_1 j_2$ 的奇偶性决定. $a_{11}a_{22}$ 的列标逆序数为 $N(12)=0$，所以符号取正；$a_{12}a_{21}$ 的列标逆序数为 $N(21)=1$，所以符号取负.

(3) 共有 $2!=2$ 项，正负项各 1 项.

三阶行列式：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

(1) 行列式的值等于所有取自不同行不同列的 3 个元素乘积的代数和.

(2) 各项的符号由 $j_1 j_2 j_3$ 的奇偶性决定. 如第 2 项 $a_{12}a_{23}a_{31}$，列标的排列 $j_1 j_2 j_3$ 为 231，$N(231)=2$，为偶排列，所以 $(-1)^{N(231)}=(-1)^2=1$，取正号. 又如，第 4 项 $a_{11}a_{23}a_{32}$，排列 $j_1 j_2 j_3$ 为 132，$N(132)=1$，故 132 为奇排列，取负号.

(3) 共有 $n!=3!=6$ 项，其中 3 项为正，3 项为负，各占一半.

例 3 用行列式的定义计算行列式：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \quad (a_{ij} \neq 0)$$

解 由定义知一般项为 $(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$，且有

$$\begin{array}{ll} j_1=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 & a_{1j_1}\neq 0; \\ j_2=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 & a_{2j_2}\neq 0; \\ j_3=4,\ 5 & a_{3j_3}\neq 0; \\ j_4=4,\ 5 & a_{4j_4}\neq 0; \\ j_5=4,\ 5 & a_{5j_5}\neq 0. \end{array}$$

而 j_3，j_4，j_5中必有一列要在 1，2，3 中取，即 $a_{ij}=0\ (i=3,\ 4,\ 5;\ j=1,\ 2,\ 3)$，所以一般项中必有 0 因子，故$|A|=0$.

例 4 用定义计算次对角线下三角形行列式：

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由定义知一般项为 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$．因为在$|A|$中

第 1 行，$a_{1n}\neq 0$，所以取 $j_1=n$；

第 2 行，$j_2\neq n$，所以取 $j_2=n-1$，$a_{2,n-1}\neq 0$；

第 3 行，取 $j_3=n-2$，$a_{3,n-2}\neq 0$；

……

第 $n-1$ 行，取 $j_{n-1}=2$，$a_{n-1,2}\neq 0$；

第 n 行，取 $j_n=1$，$a_{n1}\neq 0$.

所以 $j_1j_2\cdots j_n$ 只能组成一个 n 级排列：$n(n-1)(n-2)\cdots 321$．于是$|A|$的非 0 项只能有一项，即

$$(-1)^N a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\cdots a_{n-1,2}a_{n1} \quad (\text{为次对角线上的元素之积})$$

排列 $n(n-1)(n-2)\cdots 321$ 的逆序数为 $\dfrac{n(n-1)}{2}$，故

$$|A|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

同理可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

例 5 计算主对角线上三角形行列式：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值，其中 $a_{ii} \neq 0\ (i=1,\ 2,\ \cdots n)$．

解 由定义知一般项为 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$．因为在 $|A|$ 中，

第 1 列，$a_{11} \neq 0$，所以取 $j_1 = 1$；

第 2 列，$a_{22} \neq 0$，所以取 $j_2 = 2$；

第 3 列，$a_{33} \neq 0$，$j_3 = 3$；

……

第 n 列，$a_{nn} \neq 0$，$j_n = n$．

所以 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 只能组成一个 n 级排列：$1\ 2\ \cdots n$．于是 $|A|$ 的非 0 项只能有一项，即

$$|A| = (-1)^{N(12\cdots n)}a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} \quad \text{（为主对角线上的元素之积）}$$

同理可得

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

其中，$a_{ii} \neq 0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$．

主对角线上三角形行列式、主对角线下三角形行列式及主对角形行列式的值均等于主对角线上的元素的乘积．在后面我们将会知道很多类型的行列式的计算均可化为三角形行列式来计算．其实，这是计算行列式的基本方法．所以，应记住三角形行列式及对角形行列式的计算结果．

例 6 试判断 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 和 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 是否是 6 阶行列式 $D_6 = |a_{ij}|$ 中的项．

分析 所给两个数都是 D_6 中不同行不同列的 6 个元素的乘积，因此，要判断它们是不是 D_6 中的项，关键是要看它们是否满足符号规律．

解 (1) 由定义知一般项为$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$的 6 个因子行标为标准排列，列标 $j_1j_2j_3j_4j_5$为 431265， $N(431265)=6$，符号为正，所以

$$(-1)^{N(431265)}\ a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}=a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$$

故 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 为 D_6 中的项.

(2) $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 行标为非标准排列，重新排序成$-a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}$. 这时，列标排列为 $j_1j_2j_3j_4j_5=452316$，即 $N(452316)=8$，$(-1)^{N(452316)}=(-1)^8=1$，故为正号. 因此，$-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$不是 D_6 中的项.

从例 6 可以看出，当行标构成的排列为非标准排列时，根据定义，需交换元素使行标按自然顺序从小到大排列. 也就是说，行标要相应作若干次对换，成为标准排列；同时，列标也作了相应次数的对换，故列标排列与行标排列的奇偶性之和不变. 由此引入如下定理.

定理 1.4 n 阶行列式$|A|=|a_{ij}|$的一般项可记为

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.3}$$

其中，$i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 级排列.

证明 由于$i_1i_2\cdots i_n$与 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列，所以，式（1.3）中的 n 个元素是取自$|A|$的不同行不同列.

若交换式（1.3）中的两个元素 $a_{i_sj_s}$ 与 $a_{i_tj_t}$，则行标排列由 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 换为 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$. 由定理 1.1 知，对换一次，排列的奇偶性就要改变. 同时，列标排列由 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 换为 $j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$，奇偶性也相应改变. 因此，对换后的列标排列和行标排列的逆序数之和的奇偶性不变，即

$$(-1)^{N(i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)+N(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}=(-1)^{N(i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)+N(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}$$

所以，交换式（1.3）中的任何两个元素的位置，其符号不会改变. 因此，总可以经过有限次交换，使其式（1.3）中的元素的行标 $i_1i_2\cdots i_n$ 换为自然顺序排列 $12\cdots n$，这时相应的列标排列设为 $k_1k_2\cdots k_n$，则式（1.3）变为

$$(-1)^{N(12\cdots n)+N(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}=(-1)^{N(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$$

且为定义中的一般项. 由此可见，行列式的一般项也可表示为式（1.3）的形式.

用此定理计算行列式的值十分方便，不需要将行标排成自然顺序，即可确定该项的值.

例 7 在 6 阶行列式$|a_{ij}|$中，$a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$取什么符号？

解 根据定理 1.4，行列式的一般项可表示为

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}\\
&=(-1)^{N(654321)+N(123456)}\,a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}\\
&=(-1)^{\frac{6\times 5}{2}+0}\,a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}=-a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}
\end{aligned}
$$

所以取负号.

第二节　行列式的性质

在第一节介绍了行列式的定义．然而，用行列式的定义计算行列式只能对某些特殊的行列式才可行，比如三角形行列式、对角形行列式等．而对一般的 n 阶行列式，随着阶数 n 的增大，用定义来计算行列式，其计算量是相当的大．n 阶行列式一共有 $n!$ 项，计算它就需要做 $n!(n-1)$ 次乘法，直接用定义来计算行列式几乎是不可能的．而在天气预测、大地测量等实际问题中所需要解的线性方程组的未知量成千上万，因此，有必要进一步讨论行列式的性质，利用行列式的性质来简化行列式的计算．

下面首先引入转置行列式的概念．

定义 1.5　将行列式 $|A|$ 的行与列互换所得的行列式，称为 $|A|$ 的转置行列式，记为 $|A^{\mathrm{T}}|$ 或 $|A'|$，或 $\det A^{\mathrm{T}}$．也就是说，若设

$$
|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}
$$

将 $a_{ij}\to a_{ji}$，则称

$$
|A^{\mathrm{T}}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}
$$

为 $|A|$ 的转置行列式．

例如，设 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\end{vmatrix}$，则 $|A^{\mathrm{T}}|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & \sqrt{2}\end{vmatrix}$