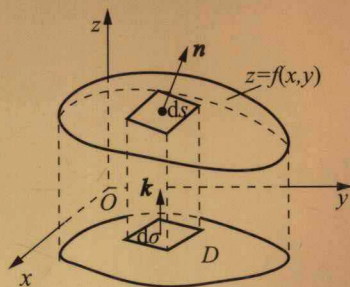
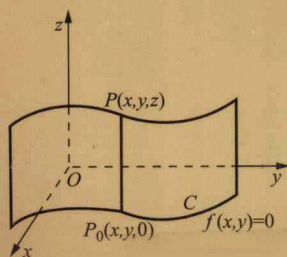


# 高等数学 (下册)

GAODENG SHUXUE

主 编 施金福

副主编 杨兰娟 赵巧珍 王少青



上海交通大学出版社  
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

要點容內

# 高等数学

(下 册)

主 编 施金福  
副主编 杨兰娟 赵巧珍  
王少青

上海交通大学出版社

## 内容提要

本书是为高等职业院校编写的高等数学教材(分上、下两册),特点是结合实际,由浅入深,推理简明扼要,并有大量结合社会需要、应用于工程和经济的问题和习题.下册主要内容:向量代数与空间解析几何;多元函数微积分学;重积分;无穷级数;傅里叶变换;拉普拉斯变换.附录中有拉氏变换简表和习题答案或提示,供学习时参考.

本书可作为高等职业院校的教材和教学参考书,也可供自学的读者和有关科技人员参考.

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/施金福主编. —上海:上海交通大学出版社,2010

ISBN 978-7-313-06099-0

I. ①高… II. ①施… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 212297 号

## 高等数学

(下册)

施金福 主编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话: 64071208 出版人: 韩建民

常熟市梅李印刷有限公司印刷 全国新华书店经销

开本: 880mm×1230mm 1/32 印张: 7.375 字数: 187 千字

2010 年 2 月第 1 版 2010 年 2 月第 1 次印刷

印数: 1~3530

ISBN 978-7-313-06099-0/O 定价: 15.00 元

---

版权所有 侵权必究

# 前 言

21 世纪的科学技术迅速发展,我国的改革开放日趋深入,各类学校的办学规模、教育质量也都在不断提高。早在第一次世界大战时,天才军事家拿破仑曾提出了“国富民强要靠数学的发达”的著名论断。数学是一切科学技术的基础和先导,而高等数学又是各类高等院校许多专业极为重要的基础课。数学由于它高度的抽象性、严密性与广泛的应用性,给不少学习者带来了许多困难。因此,一本合适的通俗易懂的教材就显得很迫切与必要。

本教材以高职、高专及相关同类高等院校学生的实际基础为出发点,根据编者长期在教学第一线的经验编写而成。在编写中尽量以实际问题为背景,引出相应的数学概念;在叙述基础理论、基本概念时力求通俗易懂;在内容的取舍上尽量注意针对性与应用性;在例题与习题配置上,紧密结合相关内容,难度适中,以利于读者对相关内容的理解消化和吸收。

本教材分上、下两册。上册共 7 章,包括一元函数微积分与微分方程;下册共 6 章,包括空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、傅氏与拉氏变换。本教材可作为非数学专业使用,如土木类、机电类、计算机、通信、船舶、模具、经济贸易与经济管理类等专业的高职、

高专以及成人教育、二级学院和自学考试学生的教材或教学参考书。

本书为下册,由上海交通大学嘉兴南洋学院的施金福副教授主编,其中第8章和第9章由杨兰娟编写,第10章和第11章由赵巧珍编写,第12章和第13章由王少青编写。全书由施金福统稿。

上海交通大学王嘉善教授仔细审阅了全稿,并提出了宝贵的意见。上海交通大学出版社也付出了大量的劳动,编者在此表示深切的谢意。

限于编者的水平和时间仓促,难免有不当与错误之处,恳请广大读者不吝指教。

编 者

2010年1月

# 目 录

|                         |    |
|-------------------------|----|
| 第 8 章 向量代数与空间解析几何 ..... | 1  |
| 8.1 空间直角坐标系及向量 .....    | 1  |
| 8.1.1 空间直角坐标系 .....     | 1  |
| 8.1.2 向量的概念 .....       | 3  |
| 8.1.3 向量的加、减与数乘运算 ..... | 4  |
| 习题 8.1 .....            | 7  |
| 8.2 向量的坐标及其代数运算 .....   | 8  |
| 8.2.1 向量的坐标 .....       | 8  |
| 8.2.2 向量的代数运算 .....     | 9  |
| 8.2.3 向量的方向余弦及方向数 ..... | 10 |
| 习题 8.2 .....            | 11 |
| 8.3 向量与向量的积 .....       | 12 |
| 8.3.1 两个向量的数量积 .....    | 12 |
| 8.3.2 两个向量的向量积 .....    | 13 |
| 8.3.3 三个向量的混合积 .....    | 16 |
| 习题 8.3 .....            | 17 |
| 8.4 曲面及曲面方程 .....       | 18 |
| 8.4.1 旋转曲面与方程特点 .....   | 21 |
| 8.4.2 柱面 .....          | 22 |
| 8.5 空间曲线及其方程 .....      | 24 |
| 8.6 空间曲线在坐标平面上的投影 ..... | 25 |
| 习题 8.4、8.5、8.6 .....    | 26 |

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| 8.7 平面方程与直线方程 .....           | 27 |
| 习题 8.7 .....                  | 34 |
| 8.8 二次曲面 .....                | 35 |
| 8.8.1 椭球面 .....               | 35 |
| 8.8.2 双曲面 .....               | 36 |
| 8.8.3 抛物面 .....               | 37 |
| 习题 8.8 .....                  | 38 |
| <b>第9章 多元函数微分学</b> .....      | 39 |
| 9.1 多元函数的概念 .....             | 39 |
| 9.2 二元函数的极限与连续性 .....         | 40 |
| 习题 9.1、9.2 .....              | 42 |
| 9.3 偏导数与全微分 .....             | 43 |
| 9.3.1 偏导数的定义 .....            | 43 |
| 9.3.2 偏导数的几何意义 .....          | 46 |
| 9.3.3 全微分 .....               | 46 |
| 9.3.4 全微分的应用 .....            | 50 |
| 习题 9.3 .....                  | 52 |
| 9.4 多元复合函数的求导法则及隐函数求导法则 ..... | 54 |
| 9.4.1 二元复合函数求导的链锁法则 .....     | 54 |
| 9.4.2 隐函数的求导法 .....           | 58 |
| 9.4.3 高阶偏导数 .....             | 59 |
| 习题 9.4 .....                  | 62 |
| 9.5 偏导数的几何应用 .....            | 63 |
| 9.5.1 空间曲线的切线与法平面 .....       | 63 |
| 9.5.2 曲面的切平面与法线 .....         | 65 |
| 习题 9.5 .....                  | 67 |
| 9.6 多元函数的极值 .....             | 68 |

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| 9.6.1 二元函数极值的必要条件 .....      | 69  |
| 9.6.2 二元函数极值的充分条件 .....      | 70  |
| 9.6.3 多元函数的最值 .....          | 71  |
| 9.6.4 条件极值 .....             | 72  |
| 9.6.5 最小二乘法 .....            | 76  |
| 9.6.6 偏导数在经济学上的应用 .....      | 78  |
| 习题 9.6 .....                 | 83  |
| <b>第 10 章 重积分</b> .....      | 85  |
| 10.1 黎曼(Riemann)积分 .....     | 85  |
| 10.1.1 黎曼积分的概念 .....         | 85  |
| 10.1.2 黎曼积分的 7 个性质 .....     | 86  |
| 10.2 二重积分的计算 .....           | 88  |
| 10.2.1 在直角坐标系下的二重积分的计算 ..... | 88  |
| 10.2.2 在极坐标下的二重积分的计算 .....   | 99  |
| 10.3 三重积分的计算 .....           | 103 |
| 10.3.1 在直角坐标系下的三重积分的计算 ..... | 103 |
| 10.3.2 在柱面坐标下的三重积分的计算 .....  | 105 |
| 10.3.3 在球面坐标下的三重积分的计算 .....  | 107 |
| 10.4 重积分的应用 .....            | 109 |
| 习题 10 .....                  | 117 |
| <b>第 11 章 无穷级数</b> .....     | 121 |
| 11.1 常数项级数 .....             | 121 |
| 11.1.1 级数概念 .....            | 121 |
| 11.1.2 无穷级数的基本性质 .....       | 125 |
| 习题 11.1 .....                | 129 |
| 11.2 正项级数及其审敛法 .....         | 131 |

|                                             |     |
|---------------------------------------------|-----|
| 习题 11.2 .....                               | 140 |
| 11.3 任意项级数的收敛性与交错级数 .....                   | 142 |
| 11.3.1 任意项级数 .....                          | 142 |
| 11.3.2 交错级数(莱布尼兹级数) .....                   | 143 |
| 习题 11.3 .....                               | 146 |
| 11.4 幂级数 .....                              | 147 |
| 11.4.1 函数项级数的概念 .....                       | 147 |
| 11.4.2 幂级数 .....                            | 148 |
| 11.4.3 幂级数的性质 .....                         | 153 |
| 11.4.4 函数的幂级数展开式、Taylor 公式和 Taylor 级数 ..... | 158 |
| 习题 11.4 .....                               | 166 |
| 11.5 傅里叶(Fourier)级数 .....                   | 167 |
| 11.5.1 周期为 $2\pi$ 的函数的傅里叶级数 .....           | 167 |
| 11.5.2 正弦级数和余弦级数 .....                      | 173 |
| 11.5.3 函数展开成正弦、余弦级数 .....                   | 177 |
| 11.5.4 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数 .....           | 178 |
| 11.5.5 复数形式的傅里叶级数 .....                     | 180 |
| 习题 11.5 .....                               | 183 |
| <b>第 12 章 傅里叶变换</b> .....                   | 185 |
| 12.1 傅氏积分 .....                             | 185 |
| 习题 12.1 .....                               | 192 |
| 12.2 傅里叶变换的性质 .....                         | 192 |
| 习题 12.2 .....                               | 195 |
| <b>第 13 章 拉普拉斯(Laplace)变换</b> .....         | 196 |
| 13.1 拉氏变换的概念 .....                          | 196 |
| 13.2 拉氏变换的运算性质 .....                        | 199 |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 习题 13.1、13.2 .....       | 205 |
| 13.3 拉氏逆变换 .....         | 206 |
| 习题 13.3 .....            | 208 |
| 13.4 拉氏变换与拉氏逆变换的应用 ..... | 208 |
| 习题 13.4 .....            | 211 |

## 附录

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 附录 I 拉氏变换简表 .....   | 212 |
| 附录 II 习题答案或提示 ..... | 215 |

## 第 8 章 向量代数与空间 解析几何

解析几何是用代数方法研究几何图形的学科. 如果只研究平面内的几何图形, 就是平面解析几何; 如果研究的是立体三维空间内的几何图形, 就是空间解析几何.

解析几何的关键是几何图形的细胞——点. 用与点对应的数或有序数对表示, 就是笛卡儿坐标; 反之, 数或有序数对就表示某一个几何图形的点, 即几何上的点与代数中的数建立起一一对应的关系.

解析几何的两个基本问题: 已知几何图形, 即点的轨迹, 求几何图形所对应的代数方程; 已知代数方程, 确定方程所表示的几何图形.

### 8.1 空间直角坐标系及向量

#### 8.1.1 空间直角坐标系

##### 1) 空间直角坐标系

3 条相互垂直的有向数轴相交于同一点  $O$ , 它们分别为  $Ox$ ,  $Oy$  和  $Oz$ , 且它们有相同的长度单位, 它们的交点  $O$  称为坐标原点.  $Ox$  称为横轴或  $x$  轴, 通常取从后到前的方向作为正向;  $Oy$  称为纵轴或  $y$  轴, 通常取从左到右为正向;  $Oz$  称为竖轴或  $z$  轴, 通常取从下到上为正向. 3 个坐标轴两两分别确定了 3 张平面, 它们也互相垂直,  $xOy$ ,  $yOz$  和  $zOx$ , 称为坐标平面. 这 3 个坐标平面把整个空间分割

成了8个部分,称为8个卦限,如图8-1所示.

3个坐标轴正方向,一般按右手系构成,即:伸开右手,让大拇指与四指垂直,四指握空拳,右手四指从 $x$ 轴正方向,以逆时针方向旋转 $90^\circ$ 转向 $y$ 轴正方向时,大拇指的指向就是 $z$ 轴的正向,如图8-2所示.

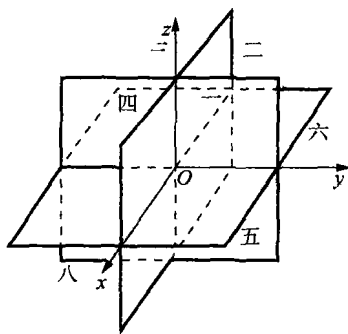


图 8-1

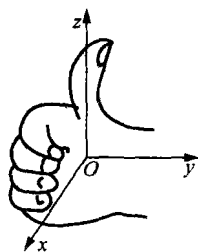


图 8-2

## 2) 空间点与数组(坐标)的一一对应,两点的距离公式

设点 $P$ 为空间内的任意一点,过点 $P$ 作3张平面分别与 $x$ 轴、 $y$ 轴以及 $z$ 轴垂直,这3张平面与坐标轴的交点分别是 $Q$ ,  $R$ 和 $T$ ,与其对应的实数分别为 $x$ ,  $y$ 和 $z$ ,于是,对于空间的每一点 $P$ ,通过上述方法必有唯一的一组有序的实数 $x$ ,  $y$ 和 $z$ 与点 $P$ 对应.

反之,任意给出一组有序数 $x$ ,  $y$ 和 $z$ .我们可以先在 $x$ 轴、 $y$ 轴和 $z$ 轴上找到与之对应的点 $Q$ ,  $R$ 和 $T$ ;再过点 $Q$ ,  $R$ 和 $T$ 分别作与 $x$ 轴、 $y$ 轴和 $z$ 轴垂直的平面,这3张垂直平面交于唯一点 $P$ .

按上述方法,空间的点 $P$ 与实数组 $x$ ,  $y$ 和 $z$ 之间建立了一一对应关系.实数 $x$ ,  $y$ 和 $z$ 称为点 $P$ 的坐标,记为 $(x, y, z)$ ,  $x$ ,  $y$ 和 $z$ 分别称为点 $P$ 的横坐标、纵坐标与竖坐标.如图8-3所示.

两点之间的距离公式,设空间两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ , 点 $P_2(x_2, y_2, z_3)$ ,则这两点之间的距离 $|P_1P_2|$ ,由勾股定理可知

(见图 8-4).

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

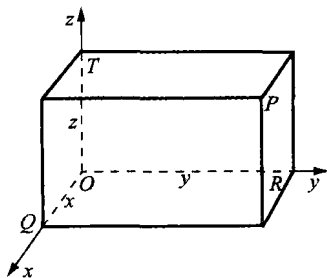


图 8-3

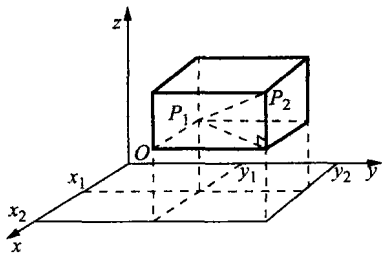


图 8-4

### 8.1.2 向量的概念

向量概念,在自然科学以及工程技术学科中,通常碰到的量有两类:第一类是只有大小的量,称为数量,例如长度、面积、体积、质量、转动惯量和流量等;第二类,它不仅有大小,而且有方向的量称为向量(或矢量).例如,力、速度、加速度、电场强度、磁场强度和力矩等.

#### 1) 向量的表示

向量通常用附带箭头的线段,即有向线段表示(见图 8-5). 如果向量的起点是  $A$ , 终点是  $B$ , 则记为  $\overrightarrow{AB}$ . 单个字母表示的向量,印刷用黑斜体,如  $\boldsymbol{a}$ ,  $\boldsymbol{b}$ . 向量的大小就是有向线段的长度,称为向量的模,记为  $|\boldsymbol{a}|$  或  $|\overrightarrow{AB}|$ . 模是一个非负的实数,即  $|\boldsymbol{a}| \geq 0$ .



图 8-5

起点与终点重合的向量,或模等于零的向量,称为零向量,记为  $\mathbf{0}$  或  $\vec{0}$ . 零向量的方向是不确定的,是任意的.

长度为 1, 或者模为 1 的向量, 称为**单位向量**. 通常记为  $e$  或  $\frac{a}{|a|}$ ,  $a$ .

以坐标原点  $O$  为起点,  $M$  点为终点的向量  $\overrightarrow{OM}$  称为**向径**或**矢径**, 通常记为  $r$  或  $\vec{r}$ .

在数学里, 一般只研究大小、方向确定的向量, 这种向量称为**自由矢**. 为此可以不考虑向量的平移位置, 即如果向量  $a$  与  $b$  的大小与方向都相同, 则称为它们相等, 记为  $a = b$ , 或者说, 两个矢量相等的充分必要条件是它们的大小与方向都相同.

## 2) 两个向量的夹角

设有两个非零向量  $a, b$ , 因为它们是由自由矢量, 所以把它们的起点分别平移到同一个起点  $A$ , 则在  $a$  与  $b$  所张的平面内, 不超过  $\pi$  的那个  $\angle BAC = \theta$  称为向量  $a$  与  $b$  的夹角, 记为  $\langle a, b \rangle$ , 即  $\angle BAC = \theta = \langle a, b \rangle$  且  $0 \leq \theta \leq \pi$  (见图 8-6).

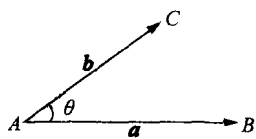


图 8-6

## 3) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在某个数轴 $U$ 上的投影

过点  $A$  和点  $B$  分别作与  $U$  轴垂直的平面  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$ , 且这 2 张平面与  $U$  轴的交点分别为  $A'$  和  $B'$ , 则线段  $A'B'$  称为向量  $\overrightarrow{AB}$  在  $U$  轴上的**投影** (见图 8-7), 记作

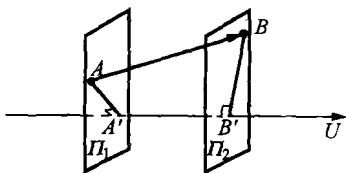


图 8-7

$A'B' = P_{\eta U} \overrightarrow{AB}$  或  $A'B' = \langle \overrightarrow{AB} \rangle_U = |\overrightarrow{AB}| \cos \langle \overrightarrow{AB}, U \rangle$ , 数轴  $U$  称为**投影轴**. 必须指出: **投影是数量, 不是向量**.

# 8.1.3 向量的加、减与数乘运算

## 1) 向量的加法

设有两个向量  $a$  以及  $b$ , 任取一点  $A$ , 把  $a$  和  $b$  的起点分别平移

到点  $A$  和点  $B$ , 得  $\vec{a}$  的终点  $B$ , 得  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b}$  的终点  $C$ , 得  $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$  连接  $AC$ , 则  $\overrightarrow{AC}$  就是  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的和向量, 记为  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ .  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$  (见图 8-8a), 这就是向量加法的“三角形法则”.

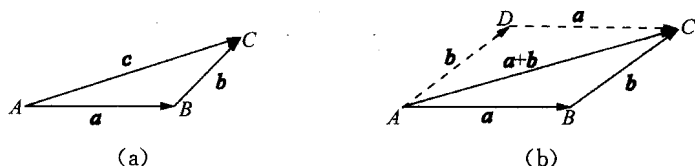


图 8-8

如果把  $\vec{b}$  再平移到起点  $A$ , 得  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\vec{a}$  再平移到起点为  $D$  的点, 得平行四边形  $ABCD$ , 则这个平行四边形的两组对边是由  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  构成的,  $A$  点是  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  的共同起点, 那么共同起点的平行四边形的对角线  $\overrightarrow{AC}$  就是  $\vec{a} + \vec{b}$ , 这就是向量加法的“平行四边形法则”. (见图 8-8b 所示).

按三角形法则的加法, 可以推广到多个向量相加. 只要把前一个向量的终点作为后一个向量的起点, 即“首尾相接”地相继作出  $n$  个向量  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ , 最后把第一个向量  $\vec{a}_1$  的起点与最后一个向量  $\vec{a}_n$  的终点之间连起来即得到一个最终向量, 这个向量就是这  $n$  个向量的和向量 (如图 8-9 所示).

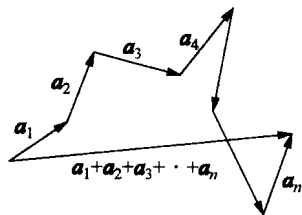


图 8-9

## 2) 向量的减法

如果向量  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  的模相等, 方向相反, 则称  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  互为相反的向量, 或者说  $\vec{b}$  是  $\vec{a}$  的负向量, 记为  $\vec{b} = -\vec{a}$ , 也可以说  $\vec{a}$  是  $\vec{b}$  的负向量, 记为  $\vec{a} = -\vec{b}$ .

向量的减法, 向量  $\vec{a}$  减向量  $\vec{b}$ , 规定为

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

如图 8-10 所示,  $a-b$  就是被减向量  $a$  的终点, 就是  $a-b$  的终点, 减数向量  $b$  的终点是  $a-b$  的起点.

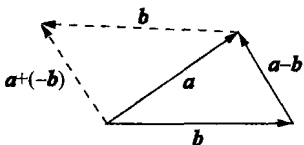


图 8-10

### 3) 数乘向量

设  $\lambda$  是一个实数, 规定乘积  $\lambda a$  是一个向量, 它的模为

$$|\lambda a| = |\lambda| \cdot |a|,$$

向量  $\lambda a$  的方向是: 当  $\lambda > 0$  时,  $\lambda a$  与  $a$  方向一致; 当  $\lambda < 0$  时,  $\lambda a$  与  $a$  的方向相反; 当  $\lambda = 0$  时,  $\lambda a$  为零向量, 所以方向是任意的. 特别地, 当  $\lambda = -1$  时, 规定  $(-1)a$  为  $a$  的相反向量, 即  $(-1)a = -a$ , 当  $\lambda = \frac{1}{|a|}$  时,  $\lambda a = \frac{a}{|a|}$  得到一个与  $a$  同方向, 长度等于一个单位长的单

位向量  $a^0$ , 即  $a^0 = \frac{a}{|a|}$ , 或者  $a = |a| a^0$ .

### 4) 向量的加减与数乘运算的运算定律

交换律:  $a + b = b + a$ .

结合律:  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

分配律:  $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ ,

$$(\lambda \cdot \mu)a = \lambda(\mu a),$$

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b,$$

$$\lambda(a - b) = \lambda a - \lambda b.$$

**例 8.1** 求证: 以  $A(4, 3, 1)$ ,  $B(7, 1, 2)$ ,  $C(5, 2, 3)$  为顶点的三角形是一个等腰三角形.

**证** 因为  $|AB|^2 = (7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2 = 14$ ,

$$|BC|^2 = (5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2 = 6,$$

$$|CA|^2 = (4-5)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2 = 6,$$

$$BC = CA,$$

所以,  $\triangle ABC$  为等腰三角形.

**例 8.2** 在  $Oz$  轴上求点, 使该点到点  $A(-4, 1, 7)$  和点  $B(3, 5, -2)$  等距离.

**解** 因为所求的点在  $Oz$  轴上, 所以设该点坐标为  $M(0, 0, z)$ , 依题意应该有  $|MA| = |MB|$ , 即

$$\sqrt{4^2 + 1^2 + (z-7)^2} = \sqrt{3^2 + 5^2 + (z+2)^2},$$

两边平方, 解得  $z = \frac{14}{9}$ , 所以所求的点为  $M(0, 0, \frac{14}{9})$ .

**例 8.3** 求证三角形两边中点连线(中位线)平行且等于第三边的一半(即中位线定理).

**证** (如图 8-11 所示)在  $\triangle ABC$  中, 设  $M, N$  为  $AB, AC$  的中点, 所以

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC},$$

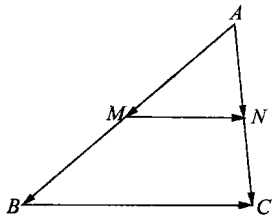


图 8-11

而由向量减法定律可知

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB},$$

$$\begin{aligned} \text{所以, } \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}, \end{aligned}$$

由此得  $|MN| = \frac{1}{2} |BC|$ , 且  $MN \parallel BC$ .

## 习 题 8.1

1. 设有点  $M(3, 2, 1)$ , 试写出它关于 3 个坐标平面对称的点及 3 个坐标轴、坐标系原点的对称点的坐标.
2. 求证: 以点  $A(4, 1, 9)$ , 点  $B(10, -1, 6)$  和点  $C(2, 4, 3)$  为顶点的三角形是等腰三角形.