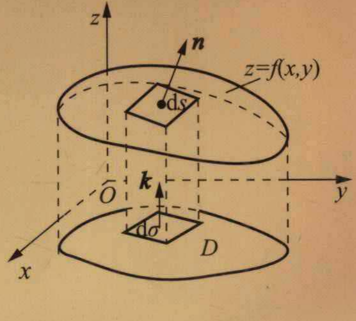
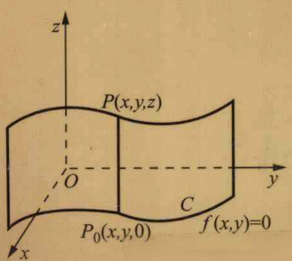
高等数学（下册）

GAODENG SHUXUE

主　编　施金福
副主编　杨兰娟 赵巧珍 王少青





上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

高等数学

（下　册）

主　编　施金福
副主编　杨兰娟　赵巧珍
王少青

上海交通大學出版社

内容提要

本书是为高等职业院校编写的高等数学教材(分上、下两册),特点是结合实际,由浅入深,推理简明扼要,并有大量结合社会需要、应用于工程和经济的例题和习题.下册主要内容:向量代数与空间解析几何;多元函数微积分学;重积分;无穷级数;傅里叶变换;拉普拉斯变换.附录中有拉氏变换简表和习题答案或提示,供学习时参考.

本书可作为高等职业院校的教材和教学参考书,也可供自学的读者和有关科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/施金福主编.—上海:上海交通大学出版社,2010

ISBN 978-7-313-06099-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①施… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 212297 号

高等数学

(下册)

施金福 主编

上海交通大学 出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:韩建民

常熟市梅李印刷有限公司印刷 全国新华书店经销

开本:880mm×1230mm 1/32 印张:7.375 字数:187 千字

2010 年 2 月第 1 版 2010 年 2 月第 1 次印刷

印数:1~3530

ISBN 978-7-313-06099-0/O 定价:15.00 元

前　言

21 世纪的科学技术迅速发展，我国的改革开放日趋深入，各类学校的办学规模、教育质量也都在不断提高。早在第一次世界大战时，天才军事家拿破仑曾提出了“国富民强要靠数学的发达”的著名论断。数学是一切科学技术的基础和先导，而高等数学又是各类高等院校许多专业极为重要的基础课。数学由于它高度的抽象性、严密性与广泛的应用性，给不少学习者带来了许多困难。因此，一本合适的通俗易懂的教材就显得很迫切与必要。

本教材以高职、高专及相关同类高等院校学生的实际基础为出发点，根据编者长期在教学第一线的经验编写而成。在编写中尽量以实际问题为背景，引出相应的数学概念；在叙述基础理论、基本概念时力求通俗易懂；在内容的取舍上尽量注意针对性与应用性；在例题与习题配置上，紧密结合相关内容，难度适中，以利于读者对相关内容的理解消化和吸收。

本教材分上、下两册。上册共 7 章，包括一元函数微积分与微分方程；下册共 6 章，包括空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、傅氏与拉氏变换。本教材可作为非数学专业使用，如土木类、机电类、计算机、通信、船舶、模具、经济贸易与经济管理类等专业的高职、

高专以及成人教育、二级学院和自学考试学生的教材或教学参考书。

本书为下册,由上海交通大学嘉兴南洋学院的施金福副教授主编,其中第8章和第9章由杨兰娟编写,第10章和第11章由赵巧珍编写,第12章和第13章由王少青编写。全书由施金福统稿。

上海交通大学王嘉善教授仔细审阅了全稿,并提出了宝贵的意见。上海交通大学出版社也付出了大量的劳动,编者在此表示深切的谢意。

限于编者的水平和时间仓促,难免有不当与错误之处,恳请广大读者不吝指教。

编　者

2010年1月

目　　录

附录

第 8 章　向量代数与空间解析几何

解析几何是用代数方法研究几何图形的学科. 如果只研究平面内的几何图形,就是平面解析几何;如果研究的是立体三维空间内的几何图形,就是空间解析几何.

解析几何的关键是几何图形的细胞——点. 用与点对应的数或有序数对表示,就是笛卡儿坐标;反之,数或有序数对就表示某一个几何图形的点,即几何上的点与代数中的数建立起一一对应的关系.

解析几何的两个基本问题:已知几何图形,即点的轨迹,求几何图形所对应的代数方程;已知代数方程,确定方程所表示的几何图形.

8.1　空间直角坐标系及向量

8.1.1　空间直角坐标系

1) 空间直角坐标系

3 条相互垂直的有向数轴相交于同一点 O,它们分别为 Ox, Oy 和 Oz,且它们有相同的长度单位,它们的交点 O 称为坐标原点. Ox 称为横轴或 x 轴,通常取从后到前的方向作为正向;Oy 称为纵轴或 y 轴,通常取从左到右为正方向;Oz 称为竖轴或 z 轴,通常取从下到上为正方向. 3 个坐标轴两两分别确定了 3 张平面,它们也互相垂直, xOy, yOz 和 zOx,称为坐标平面. 这 3 个坐标平面把整个空间分割

成了 8 个部分,称为 8 个卦限,如图 8-1 所示.

3 个坐标轴正方向,一般按**右手系**构成,即:伸开右手,让大拇指与四指垂直,四指握空拳,右手四指从 x 轴正方向,以逆时针方向旋转 90°转向 y 轴正方向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向,如图 8-2 所示.

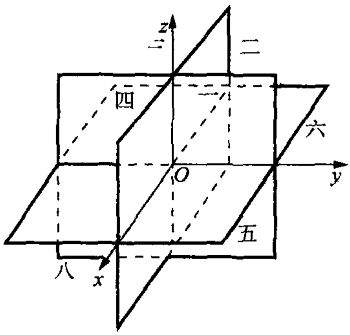


图 8-1

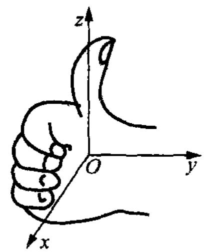


图 8-2

2) 空间点与数组(坐标)的一一对应,两点的距离公式

设点 P 为空间内的任意一点,过点 P 作 3 张平面分别与 x 轴、y 轴以及 z 轴垂直,这 3 张平面与坐标轴的交点分别是 Q, R 和 T,与其对应的实数分别为 x, y 和 z,于是,对于空间的每一点 P,通过上述方法必有唯一的一组有序的实数 x, y 和 z 与点 P 对应.

反之,任意给出一组有序数 x, y 和 z. 我们可以先在 x 轴、y 轴和 z 轴上找到与之对应的点 Q, R 和 T;再过点 Q, R 和 T 分别作与 x 轴、y 轴和 z 轴垂直的平面,这 3 张垂直平面交于唯一点 P.

按上述方法,空间的点 P 与实数组 x, y 和 z 之间建立了一一对应关系. 实数 x, y 和 z 称为点 P 的坐标,记为 (x, y, z), x, y 和 z 分别称为点 P 的横坐标、纵坐标与竖坐标. 如图 8-3 所示.

两点之间的距离公式,设空间两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$,点 $P_2(x_2, y_2, z_3)$,则这两点之间的距离 $|P_1P_2|$,由勾股定理可知

(见图 8-4).

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

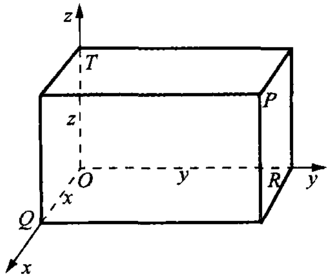


图 8-3

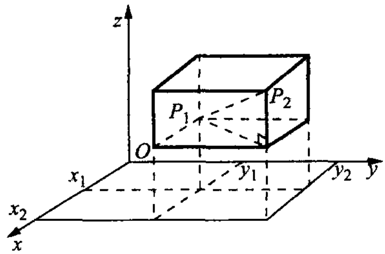


图 8-4

8.1.2　向量的概念

向量概念,在自然科学以及工程技术学科中,通常碰到的量有两类:第一类是只有大小的量,称为数量,例如长度、面积、体积、质量、转动惯量和流量等;第二类,它不仅有大小,而且有方向的量称为向量(或矢量). 例如,力、速度、加速度、电场强度、磁场强度和力矩等.

1) **向量的表示**

向量通常用附带箭头的线段,即有向线段表示(见图 8-5). 如果向量的起点是 A,终点是 B,则记为$\overrightarrow{AB}$. 单个字母表示的向量,印刷用黑斜体,如 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. 向量的大小就是有向线段的长度,称为向量的**模**,记为 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$. 模是一个非负的实数,即 $|\boldsymbol{a}|\geqslant 0$.

图 8-5

起点与终点重合的向量,或模等于零的向量,称为**零向量**,记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的方向是不确定的,是任意的.

长度为 1,或者模为 1 的向量,称为**单位向量**. 通常记为 $\boldsymbol{e}$ 或 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$, $\boldsymbol{a}$.

以坐标原点 O 为起点,M 点为终点的向量$\overrightarrow{OM}$称为**向径**或**矢径**,通常记为 $\boldsymbol{r}$ 或 $\vec{r}$.

在数学里,一般只研究大小、方向确定的向量,这种向量称为**自由矢**. 为此可以不考虑向量的平移位置,即如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的大小与方向都相同,则称为它们相等,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,或者说,两个矢量相等的充分必要条件是它们的大小与方向都相同.

2) **两个向量的夹角**

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$,因为它们是自由矢量,所以把它们的起点分别平移到同一个起点 A,则在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所张的平面内,不超过 π 的那个 $\angle BAC=\theta$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,记为$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$,即 $\angle BAC=\theta=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 且 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$(见图 8-6).

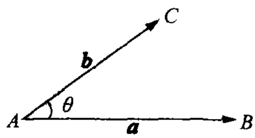


图 8-6

3) **向量$\overrightarrow{AB}$在某个数轴 U 上的投影**

过点 A 和点 B 分别作与 U 轴垂直的平面 Π_1 和 Π_2,且这 2 张平面与 U 轴的交点分别为 A' 和 B',则线段 $A'B'$ 称为向量$\overrightarrow{AB}$在 U 轴上的**投影**(见图 8-7),记作

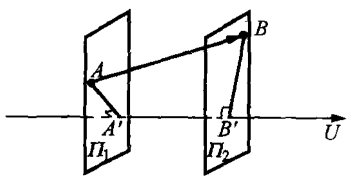


图 8-7

$$A'B'=P_{rjU}\overrightarrow{AB}\quad 或\quad A'B'=(\overrightarrow{AB})_U=|\overrightarrow{AB}|\cos\langle\overrightarrow{AB},U\rangle,$$

数轴 U 称为**投影轴**. 必须指出:**投影是数量,不是向量**.

8.1.3 向量的加、减与数乘运算

1) **向量的加法**

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 以及 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A,把 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点分别平移

到点 A 和点 B，得 $\boldsymbol{a}$ 的终点 B，得 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}$ 的终点 C，得 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$ 连接 AC，则 $\overrightarrow{AC}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$（见图 8-8a)，这就是向量加法的“**三角形法则**”.

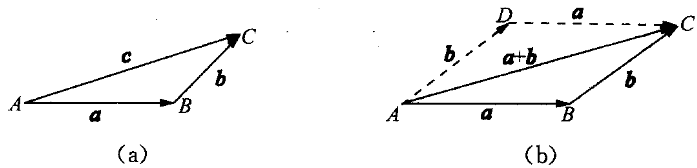


图 8-8

如果把 $\boldsymbol{b}$ 再平移到起点 A，得 $\overrightarrow{AD}$，$\boldsymbol{a}$ 再平移到起点为 D 的点，得平行四边形 $ABCD$，则这个平行四边形的两组对边是由 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 构成的，A 点是 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的共同起点，那么共同起点的平行四边形的对角线 $\overrightarrow{AC}$ 就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，这就是向量加法的“**平行四边形法则**”.（见图 8-8b 所示).

按三角形法则的加法，可以推广到多个向量相加. 只要把前一个向量的终点作为后一个向量的起点，即“首尾相接”地相继作出 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$，最后把第一个向量 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点与最后一个向量 $\boldsymbol{a}_n$ 的终点之间连起来即得到一个最终向量，这个向量就是这 n 个向量的和向量(如图 8-9 所示).

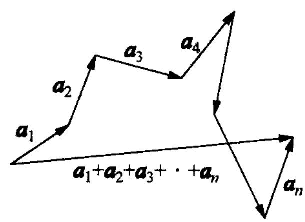


图 8-9

2）**向量的减法**

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，方向相反，则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 互为相反的向量，或者说 $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$，也可以说 $\boldsymbol{a}$ 是 $\boldsymbol{b}$ 的负向量，记为 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$.

向量的减法，向量 $\boldsymbol{a}$ 减向量 $\boldsymbol{b}$，规定为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

如图 8 - 10 所示，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 就是被减向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点，就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的终点，减数向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的起点.

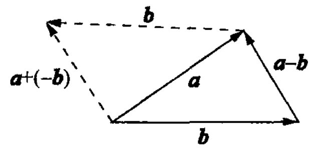


图 8 - 10

3）数乘向量

设 λ 是一个实数，规定乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模为

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|,$$

向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向是：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向一致；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，所以方向是任意的. 特别地，当 $\lambda=-1$ 时，规定 $(-1)\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量，即 $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$，当 $\lambda=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 得到一个与 $\boldsymbol{a}$ 同方向，长度等于一个单位长的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$，即 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，或者 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$.

4）向量的加减与数乘运算的运算定律

交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,

$(\lambda\cdot\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$,

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,

$\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$.

例 8.1　求证：以 $A(4,3,1)$，$B(7,1,2)$，$C(5,2,3)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证　因为 $|AB|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14$,

$$|BC|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$

$$|CA|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6,$$

$$BC=CA,$$

所以，$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

例 8.2　在 Oz 轴上求点，使该点到点 $A(-4, 1, 7)$ 和点 $B(3, 5, -2)$ 等距离.

解　因为所求的点在 Oz 轴上，所以设该点坐标为 $M(0, 0, z)$，依题意应该有 $|MA|=|MB|$，即

$$\sqrt{4^2+1^2+(z-7)^2}=\sqrt{3^2+5^2+(z+2)^2},$$

两边平方，解得 $z=\dfrac{14}{9}$，所以所求的点为 $M\left(0, 0, \dfrac{14}{9}\right)$.

例 8.3　求证三角形两边中点连线(中位线)平行且等于第三边的一半(即中位线定理).

证　(如图 8-11 所示)在$\triangle ABC$ 中，设 M, N 为 AB, AC 的中点，所以

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

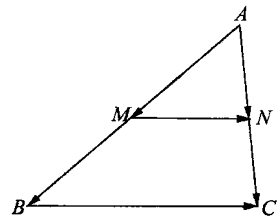


图 8-11

而由向量减法定律可知

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},$$

所以，$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

由此得 $|MN|=\dfrac{1}{2}|BC|$，且 $MN \parallel BC$.

习 题 8.1

1. 设有点 $M(3, 2, 1)$，试写出它关于 3 个坐标平面对称的点及 3 个坐标轴、坐标系原点的对称点的坐标.
2. 求证：以点 $A(4, 1, 9)$，点 $B(10, -1, 6)$ 和点 $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.