经全国中小学教材审定委员会
2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学 4-2

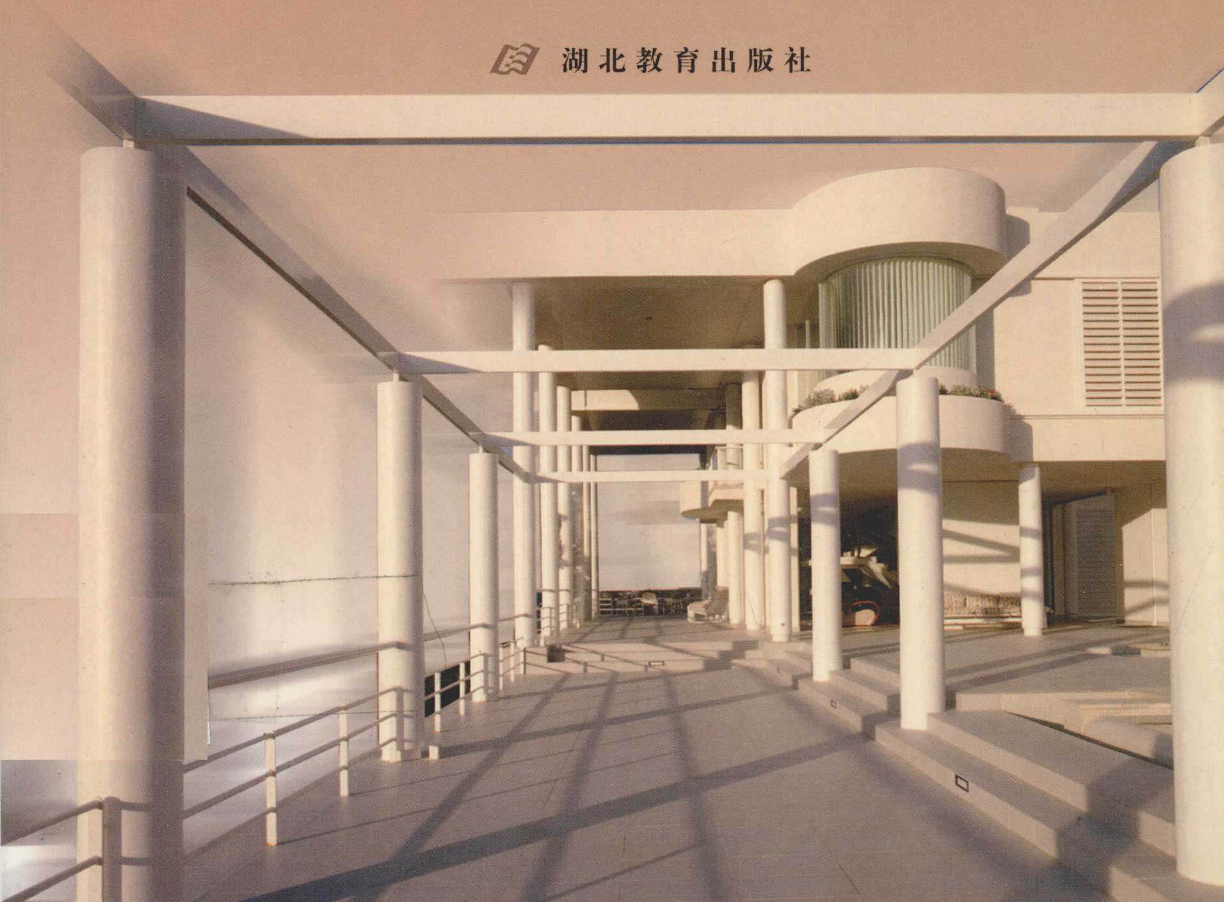
矩阵与变换

SHUXUE

选修

齐民友 主编

湖北教育出版社



经全国中小学教材审定委员会
2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

矩阵与变换 4—2

JUZHENYUBIANHUAN （选修）

主　　编 齐民友

副 主 编 裴光亚 徐学文 郭熙汉

本册主编 李桃生

参与设计 裴光亚 彭永东

审　　读 黄邦本 郑延履

湖北教育出版社

（鄂）新登字 02 号

普通高中课程标准实验教科书
选修 4－2
矩阵与变换
*
湖 北 教 育 出 版 社 出 版
（武汉市青年路 277 号　邮编：430015）
网 址：http：//www．hbedup．com
新　华　书　店　发　行
孝感市三环印务有限责任公司
（432100·孝感市高新开发区）
*
787 毫米×1092 毫米　1/16　印张：5　字数：64 000
2006 年 10 月第 1 版　2006 年 10 月第 1 次印刷
ISBN 7—5351—4343—1 / G·3615（课）压膜本定价：4.00 元

Mulu

目录

第 1 章 二阶矩阵及其运算

第 2 章 变换与矩阵

致高中生

高中数学是一门非常重要的课程.

我们需要数学，因为数学在人类生产和社会生活中有着广泛的应用，可以为社会创造价值，推动社会生产力的发展.

我们需要数学，因为数学是刻画自然规律和社会规律的语言和工具，是自然科学、技术科学的基础，而且在经济科学、社会科学、人文科学的发展中发挥越来越大的作用.

我们需要数学，还因为数学在形成人类理性思维和促进个人智力发展的过程中发挥着独特的、不可替代的作用.

我们需要数学，更因为数学是人类文化的重要组成部分，数学素质是公民所必须具备的一种基本素质.

本套教科书是以《普通高中数学课程标准(实验)》为依据编写的，它涵盖的内容正是我们适应

致高中学生

Shuxue

21世纪现代生活和未来发展的基础，也是我们进一步学习的必备知识.

高中数学课程分必修和选修. 必修课程由5个模块构成，是每个学生都必须学习的数学内容；选修课程有4个系列，每个系列又由若干模块或者专题构成. 整套教科书为同学们学习数学提供了多层次、多种类选择的可能.

教科书不是金科玉律，而是我们学习的出发点. 现代社会是信息社会，又是终身学习的社会. 在使用本书时，我们应该多关注现实生活，关注社会的进步和科技的发展，用数学的眼光来看待我们周围的世界. 尤其应根据实际条件，充分利用计算机与互联网，丰富学习资源，提高学习效率.

我们希望同学们积极参与数学活动，勇于克服困难，善于独立思考，敢于提出质疑，勤于动手实践，乐于合作交流，使数学学习变得更为主动，更加生动活泼和富有情趣.

我们祝愿同学们：在学习中学会学习，在创造中学会创造.

Mulu

目录

第1章 二阶矩阵及其运算

在现实生活中，我们会接触各种各样的量．比如，水果店卖单一品种且单一等级的水果，用一个数表示单价．当出售的水果有两种以上，每种水果的等级也有多种时，可以列出价格表，标出不同品种、不同等级水果的单价．又比如，我们从车站、码头的里程表中可以看出城市之间的里程，从售票处的价格表中可以知道任两个城市间的票价．如果划去这些表格中的文字说明，那么，仅由表中数字按原来排列次序可以排成一个矩形数表，这种矩形数表就是一个矩阵．还有许多数学模型也都可以用矩阵表示，矩阵是一种非常有用的工具．

1850 年，西尔维斯特首次使用了“矩阵”这个术语．1855 年凯利发表了著名论文《矩阵论的研究报告》．他在研究线性变换的不变量问题时，为了简化记号，引入了矩阵的概念，并讨论了矩阵的一系列问题．随后，有关矩阵的研究越来越深入，矩阵的应用范围也越来越广泛．

本章主要介绍二阶矩阵．通过学习二阶矩阵，同学们了解用矩阵表达一些复杂的数量关系的优越性，也为认识矩阵与变换、矩阵与二元一次方程组等的关系，以及以后学习一般的 $m\times n$ 矩阵打下基础．

1.1 矩阵的概念

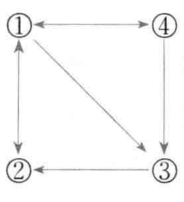
日常生活中我们常常可以看到各种各样的数表. 例如:

(1) 某超市为刚运进的两种货物编制了一份进货单.

进货单　　　　单位:件

数量 规格 品种	大包装	小包装
货物甲	300	450
货物乙	200	160

(2) 下图中的箭头表示四个城市间的航线. 如果从城市①到城市②有一条航线,在图右边相应表格中的第1行第2列(横为行,竖为列)的交叉位置记1,否则记0,其余类推. 于是得到图右边的完整表格.



到达城市 出发城市	①	②	③	④
①	0	1	1	1
②	1	0	0	0
③	0	1	0	0
④	1	0	1	0

把这些表格中的文字说明全部省略,其中的数字按原来的位置排成一个矩形数字阵列,并用括号括起来作为一个整体,只要知道这个矩形数字阵列中各行各列的数字表示的意思,这个矩形数字阵列就可以代表原来的表格. 例如:

第1个问题中,看数表$\begin{pmatrix}300 & 450\\ 200 & 160\end{pmatrix}$,就可以知道该超市货物甲的大包装运进了300件,小包装运进了450件;货物乙的大包装运进了200

件，小包装运进了 160 件．第 2 个问题中，看数表$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$，就可以知道从哪个城市到哪个城市有航线．比如，第 3 行第 2 列交叉位置的元素是 1，表示从城市③到②有一条航线；第 2 行第 3 列交叉位置的元素为 0，表示从城市②到③没有航线；第 1 行第 2 列、第 2 行第 1 列交叉位置的元素都是 1，表示从城市①到②和从城市②到①都有航线．

上面的例子虽然来自不同的领域，但从中都可以得到一个数表．这种按一定规律排成的矩形数表叫做**矩阵**（matrix），组成矩阵的数叫做**矩阵的元素**（element of matrix）．一个矩阵如果由 n 行 m 列构成，就叫做 $n\times m$ 矩阵；行数和列数相同且等于 n 时，叫做 n **阶矩阵**，又叫做 n **阶方阵**．

例1　李军与王浩进行乒乓球比赛，轮到李军发球时，比分是 3∶2，用 1×2 矩阵表示李军对王浩的比分．

解　第 1 列表示发球人的得分，第 2 列表示接球人的得分，那么，矩阵$(3\quad 2)$表示李军对王浩的比分为 3∶2．

例2　平面上点 P 的横坐标为 a，纵坐标为 b，以横坐标为第 1 个元素，纵坐标为第 2 个元素，用 1×2 矩阵表示点 P 的坐标．

解　点 P 的坐标用 1×2 矩阵表示为$(a\quad b)$．

一般地，用大写字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 等表示矩阵．例如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$等．

形如$\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$的二阶方阵（其特点是：第 1 行与第 2 列交叉位置和

第 2 行与第 1 列交叉位置上的元素都为零)叫做**二阶对角矩阵**；第 1 行第 1 列和第 2 行第 2 列交叉位置的元素都为 1 的二阶对角矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 叫做**二阶单位矩阵**. 单位矩阵一般用 $\boldsymbol{E}$ 表示.

形如 $\boldsymbol{A}=(0\quad 0)$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ 的矩阵叫做**零矩阵**. 零矩阵的元素全为零，在不致引起混淆时零矩阵记为 $\boldsymbol{O}$.

给定了两个矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}x & y\\ u & v\end{pmatrix}$，如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 对应位置的元素都相同，即 $a=x$，$b=y$，$c=u$，$d=v$，就说这两个**矩阵相等**，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例3 如果矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & 0\end{pmatrix}$ 相等，求 a，b，c，d.

解 因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 对应位置的元素相同，得

$$a=-2,\ b=3,\ c=4,\ d=0.$$

习题 1.1

1. 调查你校本学期各年级每个班的学生数，列出统计表，并用矩阵表示.
2. 下列矩阵哪些是对角矩阵？

$$\begin{pmatrix}1 & 5\\ -2 & 3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 3 & -3\end{pmatrix}$.

(1) 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，求 a，b，c，d；

(2) 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$，求 a，b，c，d.

4. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ 是否相等？为什么？

1.2 矩阵的加法和数乘运算

思考以下两个问题：

（1）下面是某校图书馆最近两次购置的图书资料清单：

第一次购置图书资料清单

单位：本

科目 数量 类别	文科	理科
教学参考	85	80
课外阅读	100	110

第二次购置图书资料清单

单位：本

科目 数量 类别	文科	理科
教学参考	70	60
课外阅读	130	125

请算一算两次购置的各类图书各有多少本，并且用矩阵表示出来.

（2）下面是一张单价表，请你用矩阵表示该单价表. 如果现在打算将这两套书 8 折销售，请你算一算现在的销售单价，并且用矩阵表示.

单价表　　　单位：元

册别 单价 书名	第一册	第二册
作文选	4.80	5.90
趣味数学	5.40	6.50

上面的问题提示我们，矩阵可以进行一定的运算. 这里先讲矩阵的加法.

1.2.1 矩阵的加法运算

从上面题(1)中，可以得到三个矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}85 & 80\\100 & 110\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}70 & 60\\130 & 125\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}155 & 140\\230 & 235\end{pmatrix},$$

其中矩阵 $\boldsymbol{C}$ 表示两次共购置的图书资料，它的每个元素是矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$

对应位置的元素之和.

一般地，如果 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$，则把矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. 求两个矩阵的和的运算叫做**矩阵的加法**.

例1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$.

解 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0+2 & 4+5 \\ -3+6 & 7-4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+0 & 5+4 \\ 6-3 & -4+7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0+0 & 4+0 \\ -3+0 & 7+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$.

一般地，如果矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 可以相加，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$，即矩阵加法满足交换律. 同样可以知道 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$，即矩阵加法满足结合律.

从例 1 可以看到，任意矩阵与相同类型的零矩阵相加等于自身. 比较矩阵的加法和数的加法，可以知道，零矩阵在矩阵加法中与数 0 在数的加法中扮演的角色相当.

请同学们思考：矩阵 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 与矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 能不能相加？两个矩阵相加需要满足什么条件？

1.2.2 矩阵的数乘运算

从第 1.2 节开头的题(2)中，可以得到两个矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}4.80 & 5.90\\5.40 & 6.50\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3.84 & 4.72\\4.32 & 5.20\end{pmatrix}.$$

矩阵 A 是按原单价销售的价格表，矩阵 B 表示按 8 折销售的价格表，矩阵 B 是用 0.8 乘矩阵 A 的各个元素以后按原来位置排列而得到的.

如果用 0.5 乘 A 的各个元素，得到矩阵

$$C=\begin{pmatrix}2.40 & 2.95\\2.70 & 3.25\end{pmatrix},$$

由矩阵 C 中的元素即可知这两套书 5 折销售的单价.

一般地，用一个数 k 乘矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ 的各个元素，并按原来的位置排列而成的矩阵

$$\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12}\\ka_{21} & ka_{22}\end{pmatrix}$$

叫做**数 k 与矩阵 A 的乘积**，记为 kA. 求数 k 与矩阵 A 的乘积的运算叫做矩阵的**数乘运算**.

例2 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 4\\-3 & 7\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 5\\6 & -4\end{pmatrix}$，求 $5A$，$5B$，$5A+5B$ 和$5(A+B)$.

解 $5A=\begin{pmatrix}5\times 0 & 5\times 4\\5\times(-3) & 5\times 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 20\\-15 & 35\end{pmatrix}$,

$5B=\begin{pmatrix}5\times 2 & 5\times 5\\5\times 6 & 5\times(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 25\\30 & -20\end{pmatrix}$,

$5A+5B=\begin{pmatrix}0 & 20\\-15 & 35\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10 & 25\\30 & -20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 45\\15 & 15\end{pmatrix}$,

$5(A+B)=5\begin{pmatrix}2 & 9\\3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 45\\15 & 15\end{pmatrix}$.

试比较 $5\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{B}$ 和 $5(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$ 的结果，可总结出如下规律.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 可以相加，那么，

$$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B},$$

即矩阵的数乘运算对矩阵的加法满足分配律.

同样，若 k，l 是数，$\boldsymbol{A}$ 是矩阵，通过计算可以知道，

$$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A},$$

即矩阵的数乘运算对数的加法满足分配律.

习题 1.2

1. 用矩阵分别表示你校本学期各年级各班的男学生数和女学生数，并用矩阵加法求各班的学生总人数.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -2\\0 & 5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -4\\2 & -3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -2\\4 & 5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$，求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

4. 在地图上量出以下城市之间的直线距离填在下表中，并按地图上标出的比例尺，用矩阵的数乘运算计算城市间的实际距离.

	北　京	上　海
广　州		
拉　萨		

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -2\\0 & 3\end{pmatrix}$，求 $-3\boldsymbol{A}$，$2\boldsymbol{A}$，$-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}$.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\2 & -2\end{pmatrix}$，求 $3(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$ 和 $3\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}$.