



新世纪高等学校教材

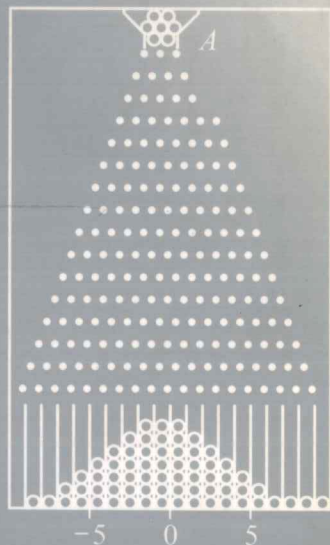
数学及应用数学专业主干课程系列教材

王梓坤 著

北京师范大学数学科学学院 组编

概率论基础及其应用

第三版



北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

GAILÜN JICHU

新世纪高等学校教材

数学及应用数学专业主干课程系列教材

(第三版)

北京师范大学数学科学学院 组编

概率论基础及其应用

GAILULUN JICHU JIQI YINGYONG

王梓坤 著

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

北京

内 容 简 介

本书叙述概率论的基本知识和它的一些应用. 总共八章, 前三章介绍概率论, 第四章是随机过程的初步导引, 后四章则分别介绍概率论在数理统计、随机模拟、计算方法和可靠性问题中的一些应用. 书末有四篇附录. 读者对象为高等院校理工科学员、教师及科学工作者.

图书在版编目(CIP)数据

概率论基础及其应用(第3版)/王梓坤著. —北京:北京师范大学出版社, 2007. 3

(新世纪高等学校教材)

ISBN 978-7-303-03632-5

I. 概… II. 王… III. 概率论基础及其应用(第3版) IV. 0211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 01745 号

出版发行:北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn

北京新街口外大街 19 号

邮政编码:100875

出 版 人:赖德胜

印 刷:唐山市润丰印务有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:170 mm × 230 mm

印 张:27

字 数:480 千字

印 数:1 ~ 5 000

版 次:2007 年 3 月第 3 版

印 次:2007 年 3 月第 1 次印刷

定 价:38.00 元

责任编辑:岳昌庆 美术编辑:贾 刚

责任校对:李 蕊 责任印制:董本刚

版权所有 侵权必究

联系本书编辑部:lkb@bnup.com.cn

编辑部电话:010—58806185 58807762 58800827

发行部电话:010—58800013

本书如有印装问题, 请与我们联系进行调换。

第三版前言

1915年北京高等师范学校成立数理部,1922年成立数学系,2004年成立北京师范大学数学科学学院.经过90多年的风风雨雨,数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验.将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的.

作为国家重点大学的北京师范大学数学科学学院,培养人才和编写教材是两项非常重要的工作.教材的编写是学院的基本建设之一.学院要抓好教材建设;教师要研究教学方法.在教材方面,学院推出一批自己的高水平教材,做到各科都有,约50部.

写教材要慢一点,质量要好一点,教材出版系列化,是编写教材要注意的几项基本原则.学院希望教材要不断地继续修改和完善,对已经出版两版的教材,我们准备继续再版.经由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行协商,由北京师范大学数学科学学院主编(李仲来教授负责),准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用的第二版数学教材进行修订后出版第三版.

教材的建设是长期的、艰苦的任务,每一位教师在教学中要自主地开发教学资源,创造性地编写和使用教材.学院建议:在安排教学时,应考虑同一教师在3~5年里能够稳定地上同一门课,并参与到教材的编写或修订工作中去.在学院从事教学的大多数教师,应该在一生的教学生涯中至少以自己为主,编写或修订一种教材作为己任,并注意适时地修订或更新教材.我们还希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者,提出宝贵的修改意见,使其不断改进和完善.

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授(数学专业)和在职中学教师等使用和参考.

第三版作者的话

这一版中，继续改正了一些误植，补充了若干内容如附录 2、3、4，本书的许多读者已成为教学与科研的骨干，有缘相见时还承他们谈起此书，这对作者是最好的奖励。本书累计已印刷发行十万册，作为一本教科书，实非易事。作者再次感谢读者和有关人士的厚爱与指导。

作者 2006 年 7 月于北京

第二版作者的话

本书初版于 1976 年，后连印刷三次，承一些高等院校、科研单位用作教本或参考书。不少热心的读者提出了许多中肯的批评，甚至寄来勘误表；这些意见在这一版中已全被采纳，使本书为之生色。作者对他们的帮助表示最真诚的感谢。作者还衷心地感激韩丽娟、洪良辰、廖昭懋、蒋铎、洪吉昌等各位教授，他们关心本书的再版，并给予了許多帮助，第二版书末增加一附录《论随机性》，作为概率哲学的初探。

作者 1992 年 10 月

第一版作者的话

本书的目的是想比较严格地叙述概率论的基础知识，并介绍它的一些应用。总共八章，前三章是核心部分，其中包括概率论的基本概念和定理；第四章是随机过程的初步导引；后面四章分别介绍概率论在数理统计、随机模拟、计算方法以及可靠性问题中的一些应用。

随着科学和社会的进步，概率论获得了新的生命力。理论一与实际相结合，便立即呈现出“忽如一夜春风来，千树万树梨花开”的繁荣景象。目前，概率论已被广泛应用到许多实际部门中，要在一本书内叙述各方面的应用是困难的。因此，本书所谓的应用，只不过是一些方面的一些应用。

在写作过程中，我们注意了下列 3 点：

1. 为了使叙述比较清楚，我们广泛使用了“概率空间”的概念。有了它才能明确地给出一些最基本的定义，如事件、随机变数等，否则，恐怕很难回答像“随机变数的函数是否仍是随机变数”“独立随机变数 ξ_1, ξ_2 的函数 $g(\xi_1), g(\xi_2)$ 是否仍独立”等这样一些无法避免的问题。但另一方面，由于引进了概率空间，就必须用到一些最基本的测度论知识，这似乎不属本书的范围。不过我们发现，如果只考虑概率论基础的需要，那么用到的测度论并不太多，在本书中完全可以自给自足，而且所用的篇幅很少。这样做还可以多少填平一些普通概率论与较高深的概率论分支之间的鸿沟。这种叙述方式也许还是一种新尝试。

2. 对于基本概念，我们希望能讲明它们的背景和应用。在实践中所体会到的直观形象有助于抓住本质，它常常是理论的先导，并为理论提供思路、模型与方法；严格的逻辑证明和计算有时无非是直觉的一种数学加工和精确化而已。虽然如此，严谨的数学论证仍是十分重要的。正文中的定理或例题，都有详细证明或解答。

3. 书中列举了较多的例题，其中有些是历史上著名的问题（见书末索引），它们在概率论的发展上起过一定的作用。前五章附有习题及详细解答，有些习题也可当做例题看，以利于自学。

§ 1.4 (三) 表示第一章第四节第三段。凡标有星号 (*) 的章、节、

段、定理或证明，都可在初次阅读时略去，待必要时补看。如用本书做教材，可挑选若干章节讲授。

本书大部分内容曾在南开大学数学系给本科生多次讲授过。芦桂章、孙璵两位教授为本书提供了习题及解答；吴荣教授详细审阅了全部底稿，并提出许多改进意见，作者对他们表示衷心的感谢。

由于水平所限，书中一定会有不少的错误和缺点，恳请批评指正。

作者 1976 年

目 录

第一章 事件与概率	1
§ 1. 1 概率论的现实背景	1
§ 1. 2 古典型概率	10
§ 1. 3 概率空间	19
§ 1. 4 条件概率	25
§ 1. 5 独立性	33
*§ 1. 6 若干补充	41
习题一	44
第二章 随机变数与它的分布	47
§ 2. 1 随机变数	47
§ 2. 2 分布与分布函数	53
§ 2. 3 二项分布与贝努里试验	61
§ 2. 4 普阿松分布与普阿松流	68
§ 2. 5 正态分布	74
§ 2. 6 n 维随机向量与 n 维分布	84
§ 2. 7 随机变数的独立性; 条件分布	94
§ 2. 8 随机向量的变换	100
§ 2. 9 随机变数的数字特征	116
§ 2. 10 随机向量的数字特征	131
§ 2. 11 特征函数	137
*§ 2. 12 多元特征函数	149
*§ 2. 13 若干补充	157
习题二	164
第三章 独立随机变数序列的极限定理	169
§ 3. 1 四种收敛性	169
§ 3. 2 分布函数列与特征函数列	177
§ 3. 3 大数定理与强大数定理	187
§ 3. 4 中心极限定理	199
*§ 3. 5 中心极限定理 (续)	211
*§ 3. 6 格子点分布与局部极限定理	215
*§ 3. 7 若干补充	220

习题三	225
第四章 随机过程引论	228
§ 4. 1 马尔可夫链	228
§ 4. 2 随机过程论中的基本概念	237
§ 4. 3 马尔可夫过程	241
* § 4. 4 独立增量过程	252
§ 4. 5 平稳过程	258
习题四	266
第五章 数理统计初步	267
§ 5. 1 基本概念	267
§ 5. 2 子样数字特征的分布	274
§ 5. 3 点估值	280
§ 5. 4 区间估值	286
§ 5. 5 假设检验	291
* § 5. 6 最佳检验	301
* § 5. 7 若干应用	306
习题五	314
* 第六章 随机过程的模拟	316
§ 6. 1 在电子计算机上模拟均匀分布随机变数的方法	316
§ 6. 2 任意随机向量的模拟	321
§ 6. 3 随机过程的模拟	328
* 第七章 概率论在计算方法中的一些应用	334
§ 7. 1 定积分的计算	334
§ 7. 2 线性方程组的解法	341
* 第八章 可靠性问题的概率分析	345
§ 8. 1 可靠函数	345
§ 8. 2 更新问题	352
§ 8. 3 系统的可靠性	360
习题解答	366
数值表	385
附录 1 论随机性	389
附录 2 统计预报简述	399
附录 3 布朗运动的数学原理略述	403
附录 4 概率论今昔	408
参考书目	412
内容索引	415

第一章 事件与概率

§ 1.1 概率论的现实背景

(一) 概率论的研究对象

自然界有许多现象,我们完全可以预言它们在一定条件下是否会出现.例如:“同性的电互相排斥”“在标准大气压下,水加热到 100°C 时必定沸腾”等是一定会出现的,而上述现象的反面,即“同性的电互相吸引”“在标准大气压下,水加热到 100°C 时不沸腾”等是必然不会出现的.在一定条件下必然出现的现象叫必然事件;在一定条件下必然不出现的现象叫不可能事件.必然事件的反面是不可能事件.

然而自然界还有许多现象,它们在一定条件下可能出现也可能不出现,这种现象称为随机事件,或简称为事件.例如:“掷伍分钱硬币得正面”“明年北京 7 月间的平均温度是 28°C ”等都是随机事件.

概率论是数学的一个分支,它研究的对象是随机事件的数量规律性.

我们常常通过随机试验来观察随机事件.例如:事件“得正面”是随机试验“掷硬币”的一个可能的结果,而事件“ 28°C ”是随机试验“观察明年北京 7 月间的平均温度”的一个可能的结果.

一般地,设 E 为一试验,如果不能事先准确地预言它的结果,而且在相同条件下可以重复进行,就称为随机试验,以 ω 表示它的一个可能的结果,称 ω 为 E 的一基本事件,全体基本事件的集 $\Omega = (\omega)$ 称为基本事件空间.在具体问题中,十分重要的是:认清基本事件空间是由什么构成的.我们来举一些例子.

【例 1】 E —掷一枚普通的硬币而观察所出现的面^①; ω_1 —正, ω_2 —反,于是

^① 许多实际问题与此问题同类,例如:登记新生婴儿的性别,“女”或“男”,产品“合格”或“不合格”,明天天气“晴”或“非晴”,射击“中的”或“不中的”等.

Ω 由两个基本事件构成, 即 $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$. $\square$

【例 2】 E —自标号为 $1, 2, \dots, n$ 的 n 个同样的灯泡中任取其一, ω_i —取得第 i 号, $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$. 这时如果简记 ω_i 为 i , 那么得 $\Omega = (1, 2, \dots, n)$. $\square$

【例 3】 E —计算某电话交换台在上午 9 点钟内所得呼唤次数; ω_i —得 i 次呼唤; $\Omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots)$. 如果简记 ω_i 为 i , 那么得 $\Omega = (0, 1, 2, \dots)$. $\square$

【例 4】 E —观察北京 10 月间的平均温度, ω_a —平均温度为 $a^\circ\text{C}$, $\Omega = (\omega_a, -\infty < a < \infty)$. 如果简记 ω_a 为 a , 那么得 $\Omega = (-\infty, \infty)$, 即全体实数集(实际上 Ω 中有许多点是多余的, 因为温度不可能低于 -273°C 等). $\square$

【例 5】 E —向平面上某块有界区域 Ω 内随意投掷质点(例如掷球)而观察落点位置, 以 $\omega(a, b)$ 表示落点的坐标为 (a, b) 的一个试验结果. 如果简记 $\omega(a, b)$ 为 (a, b) , 那么基本事件空间重合于此区域 Ω . $\square$

基本事件是事件中的一种, 一般的事件总是由若干个基本事件共同组成的, 因而是 Ω 的一个子集. 譬如说, 在例 2 中, 事件 A 为“取得标号不大于 3 的灯泡”, 它是由三个基本事件“取得第 1 号”“取得第 2 号”“取得第 3 号”共同组成的, 故 $A = (1, 2, 3)$. 同样, 对事件 B 为“取得标号为偶数的灯泡”, 我们有 $B = (2, 4, 6, \dots, 2[\frac{n}{2}])$, 其中 $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数. 又如在例 4 中, 事件 C 为“不高于 18°C ”, 则可表示为 $C = (-\infty, 18]$. 由此可见, 每一事件对应于 Ω 的一个子集.

当且仅当事件 A 所含的一个基本事件出现时称为 A 出现.

(二) 事件的运算

试引进事件间的一些重要关系及对事件的运算. 以下 A, B, A_i, B_i 都表示事件.

1. 如果 A 出现必导致 B 出现, 就说 A 是 B 的特款, 或者说 B 包含 A , 记作 $A \subset B$; 如果 $A \subset B$ 而且 $B \subset A$, 就说 A 与 B 相等, 并记作 $A = B$. 例如, 事件 A 为“取得第 2 号灯泡”, B 为“取得偶数号灯泡”, 则 A 是 B 的特款; 又如, 事件 A 为“平均温度不高于 18°C ”, B 为“平均温度低于 20°C ”, 则 A 是 B 的特款.

2. “二事件 A, B 中至少有一个出现”也是一事件, 称此事件为 A, B 的和, 记作 $A \cup B$; 显然, $A \cup B$ 也是事件: “或 A 出现, 或 B 出现”. 类似地, 事件“ $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个出现”称为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和, 记为 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 或 $\bigcup_{i=1}^n A_i$; 事件“ $A_1, A_2, \dots$ 中至少有一个出现”称为可列多个事件的和, 记作 $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ 或 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. 其次, “ n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 都出现”也是一事件, 称为 $A_1,$

$A_2, \dots, A_n$ 的交, 记作 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ 或 $A_1 A_2 \dots A_n$ 或 $\bigcap_{i=1}^n A_i$. 类似定义 $A_1 \cap A_2 \cap \dots$ 并简写为 $A_1 A_2 \dots$ 或 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. 譬如说, 在例 3 中, “呼唤次数为偶数” 是基本事件 “2” “4” “6” … 的和, 而 “呼唤次数为偶数” 与 “呼唤次数为 3 的倍数” 的交是事件 “呼唤次数是 6 的倍数”.

3. “A 出现而 B 不出现” 也是一事件, 称为 A 与 B 的差, 记作 $A - B$. 例如: “呼唤次数不小于 6” 与 “呼唤次数不小于 7” 的差是 “呼唤次数为 6”; 而 “呼唤次数不小于 6” 与 “呼唤次数为偶数” 的差是 “呼唤次数为不小于 7 的奇数”.

4. 不可能事件与必然事件通常也看成随机事件, 分别用记号 $\emptyset$ 及 Ω 表示. 如果二事件 A, B 满足关系

$$AB = \emptyset, \quad (1)$$

也就是说, 如果 A, B 不可能同时出现, 就说 A, B 是互不相容的. 例如: “呼唤次数大于 10” 与 “呼唤次数小于 10” 是互不相容的.

二事件 A, B 如果满足关系

$$A \cup B = \Omega, AB = \emptyset, \quad (2)$$

也就是说, A, B 中必出现其一, 但 A, B 不能同时出现, 就说 A 与 B 互逆, 或者说 A 是 B (或 B 是 A) 的对立事件, 记作 $A = \bar{B}$. 例如 “呼唤次数大于 10” 是 “呼唤次数不大于 10” 的对立事件, 但却不是 “呼唤次数小于 10” 的对立事件.

上面说过, 事件 A 可表示为基本事件空间 Ω 的一个子集, 该子集仍然记为 A, 于是我们也可以从集合论的观点来看待事件, 结果发现这种观点非常有用, 因为上面对事件所引进的关系恰好和通常对集所引进的相应的关系一致. 譬如说, 设事件 A 是事件 B 的特款, 于是 A 出现必导致 B 出现. 考虑含于 A 的一个基本事件 ω , 当 ω 出现时, A 出现, 由假定这时 B 也出现, 故此 ω 必含于 B, 从而证明了集 A, B 间有集合论中所定义的包含关系 $A \subset B$. 反之, 设集 A 含于集 B, $A \subset B$; 当事件 A 出现时, 必定有 A 中的某一基本事件 ω 出现, 既然此 $\omega \in A$, 因而 $\omega \in B$, 故事件 B 也出现, 这说明 A 是 B 的特款. 由此可见, “事件 B 包含事件 A” 与 “集 B 包含集 A” 二概念是一致的. 类似地可以看到其他相应概念的一致性: 事件的 “相等” “和” “交” “差” 分别与集的 “相等” “和” “交” “差” 一致, 不可能事件 $\emptyset$ 及必然事件 Ω 分别与空集 $\emptyset$ 及全空间 Ω 一致. 从而关系式 (1) (2) 也可按集合论中的意义来理解, 因此, “A 是 B 的对立事件” 与 “集 A 是集 B 关于 Ω 的补集” 是一致的.

事件间的关系既然与集间相应的关系一致, 我们就可以用图形来表达, 如图 1-1:

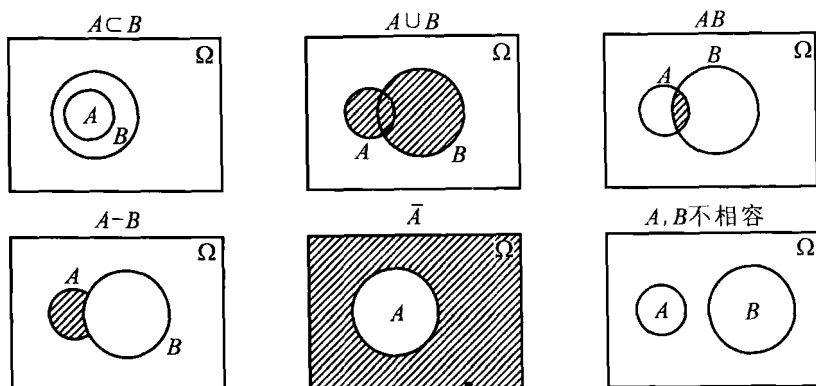


图 1-1

($A \cup B, AB, A - B, \bar{A}$ 分别为图中阴影部分)

(三) 概率

当我们多次做某一随机试验 E 时,常常会察觉某些事件出现的可能性要大些,也就是说,这事件出现的次数要多些,而另一些事件出现的可能性要小些.例如“抽得偶数号灯泡”的可能性大于“抽得第 2 号灯泡”的可能性,因为后一事件是前一事件的特款.既然各事件出现的可能性有大有小,自然使人想到该用一个数字 $P(A)$ 来标志事件 A 出现的可能性,较大的可能性用较大的数字来标志,较小的可能性就用较小的数字来标志.这数字 $P(A)$ 就称为事件 A 的概率.

然而,对于已给的事件 A ,到底应该用哪个数字来作为它的概率呢?就是说,怎样从数量上来规定 $P(A)$ 呢?这决定于所研究的随机试验 E 及 A 的特殊性,不能一概而论.但在下列两种特殊的(即古典型的和几何型的)随机试验中,事件的概率容易合理地规定,并能满足实际的需要.

(A) 古典型 先考虑一个特例,即例 2. 自标号为 $1, 2, \dots, n$ 的共 n 个同样的灯泡中任取其一,如果抽取时把这些灯泡完全平等看待,不特别侧重或特别看轻某些灯泡,那么,每个灯泡被取出的可能性应该是相同的,也就是说,一切基本事件 ω_i —“取得第 i 号灯泡”都是等可能的(为了要实现等可能,譬如说可以这样做:在 n 张同样的纸片上各写上一个数字,从 1 到 n ,然后把纸片折好,并把次序随意搅乱,再从中任取一张,它上面的数字就代表被取中的灯泡号码).在此例中,只有 n 个不同的基本事件.

一般地,如果随机试验 E 具有:

- 1) 只有有穷多个不同的基本事件 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$,
- 2) 一切基本事件都是等可能的,

两种性质,就说 E 是古典型的随机试验.

由上所述可见,例 2 及例 1 中的 E 都是古典型的.

对古典型的随机试验 $E, \Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, 设事件 A 由 $k (\leq n)$ 个不同的基本事件组成, 我们就定义 A 的概率 $P(A)$ 为

$$P(A) = \frac{k}{n}. \quad (3)$$

不可能事件 $\emptyset$ 的概率定义为

$$P(\emptyset) = 0. \quad (4)$$

譬如, 在例 2 中, 如果设 $n = 100$, 那么事件

$$A = (\text{取得偶数号灯泡}) = (\omega_2, \omega_4, \dots, \omega_{100}), P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2};$$

$$B = (\text{取得号数不大于 10 的灯泡}) = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{10}), P(B) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10};$$

$$C = (\text{取得号数为 3 的倍数的灯泡}) = (\omega_3, \omega_6, \dots, \omega_{99}), P(C) = \frac{33}{100}.$$

关于古典型的定义再说几句话: 那里的第二个条件要求一切基本事件都是等可能的, 即等可能地出现, 然而, 所谓“基本事件等可能地出现”又是什么意思呢? 对此我们不能下数学定义而只能做一些解释: 当从与问题有关的各个方面来考虑 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 时, 如果它们完全处于平等的地位, 谁也不比谁特别些, 这时就可把它们看成是等可能的. 在目前很难用更简单的概念来定义“等可能”, 就像集合论中“集合”的概念没有明确的数学定义一样. 我们无需对此感到惊异, 因为如果概念甲是由较简单的概念乙来定义, 那么乙也必须用更简单的概念丙来定义, 如此下去, 最后势必会遇到一个最基本的概念, 我们不能再也不能用其他概念去定义它了, 这时只需用一些例子或直观的语言去解说它的含义. “等可能”正是一个这样的基本概念.

附带指出, 在实际问题中, 往往只能“近似地”出现等可能, “完全的”等可能是很难见到的. 以掷硬币为例, 严格说来, 正、反两面也不能认为完全是等可能的, 因为两面的花纹不同, 凸凹的分布不同等. 不过这些因素对出现正(或反)面的影响很小, 因而可以把它们忽略而仍认为是等可能的.

【定理 1】 对古典型随机试验 E , 概率具有下列性质:

- (i) 对任意事件 $A, 1 \geq P(A) \geq 0$;
- (ii) $P(\Omega) = 1$;
- (iii) 设事件 $A_1, A_2, \dots, A_m (m \leq n)$ 互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m P(A_i). \quad (5)$$

【证】 由(3)(4)可见(i)是显然的. 由于 Ω 由 n 个不同的基本事件构成, 故由(3)得

$$P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1.$$

下证(iii): 设 $A_i = (\omega_1^{(i)}, \dots, \omega_{k_i}^{(i)})$ 含 k_i ($\leq n$) 个不同的基本事件; 由(3)

$$P(A_i) = \frac{k_i}{n}, \text{ 显然 } \bigcup_{i=1}^m A_i = (\omega_1^{(1)}, \dots, \omega_{k_1}^{(1)}; \omega_1^{(2)}, \dots, \omega_{k_2}^{(2)}; \dots; \omega_1^{(m)}, \dots, \omega_{k_m}^{(m)})$$

共含 $\sum_{i=1}^m k_i$ 个基本事件; 由于 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 互不相容, 这些基本事件是互不相

同的. 因此
$$P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \frac{\sum_{i=1}^m k_i}{n} = \sum_{i=1}^m \frac{k_i}{n} = \sum_{i=1}^m P(A_i). \quad \square$$

(B)几何型 几何型随机试验是例 5 中 E 的一般化与精确化. 设 Ω (如图 1-2) 是 n 维空间中的勒贝格 (Lebesgue) 可测集, 具有有限的测度 $L(\Omega) > 0$ ($L(\Omega)$ 表示 Ω 的勒贝格测度, 直观地说, 对一维区间它是长度, 对二维区域是面积, 三维是体积……). 向 Ω 中投掷一质点 M , 如果 M 在 Ω 中均匀分布, 那么就称这随机试验 (掷点) 是几何型的. 所谓“ M 在 Ω 中均匀分布”的详细内容是: “点 M 必定落于 Ω 中, 而且落在可测集 $A (\subset \Omega)$ 中的可能性大小与 A 的测度成正比, 而与 A 的位置及形状无关.” 这时 Ω 中每一点 ω 是一基本事件: “ M 落于 ω 上”, 故有无穷多个基本事件而不能应用(3). 如果以 $P(A)$ 表示“ M 落在 A 中”的概率, 考虑到均匀分布性, 自然应定义

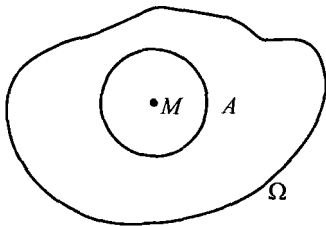


图 1-2

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}, \quad (6)$$

其中 $L(A)$ 表示 A 的测度, 我们认为空集 $\emptyset$ 也是可测的而且 $L(\emptyset) = 0$.

注意, 这里概率 $P(A)$ 只是对可测集 A 才有定义, 而不是对 Ω 的所有子集都有定义, 因为有不可测的子集存在.

【例 6】(约会问题) 二人约定于 0 到 T 时内在某地见面, 先到者等 t ($t \leq T$) 时后离去, 试求二人能会见的概率 p .

【解】 以 x, y 分别表示二人到达时刻,

$$0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T,$$

这样的 (x, y) 构成边长为 T 的正方形 Ω (如图 1-3). 二

人能会见的充分条件是 $|x - y| \leq t$, 这条件决定 Ω 中一子集 A . 由(6)

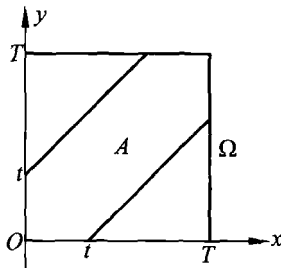


图 1-3

$$p = \frac{L(A)}{L(\Omega)} = \frac{T^2 - (T-t)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2. \square$$

注意,例6可抽象化为:设有二点 A, B 分别几何型地落于 $[0, T]$ 中,试求 A, B 的距离不超过 $t (t \leq T)$ 的概率 p .

【例7】 在线段 AD 上任意^①取两点 B, C , 在 B, C 处折断此线段而得三折线, 试求此三折线能构成三角形的概率.

【解】 设 AD 的长度为 l , 点 A, D 的坐标分别为 $(0, 0), (l, 0)$. 假定 B, C 的横坐标分别是 xl 及 yl , 那么 $0 \leq x, y \leq 1$, 由此可见 B, C 二点与正方形 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 上的点 (x, y) 是一一对应的.

先设 $x < y$, 这时 AB, BC, CD 构成三角形的充分必要条件是

$$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{CD}, \overline{BC} + \overline{CD} > \overline{AB}, \overline{CD} + \overline{AB} > \overline{BC},$$

其中 $\overline{AB}$ 表 AB 的长. 注意 $\overline{AB} = xl, \overline{BC} = (y-x)l, \overline{CD} = (1-y)l$, 代入上面的三个不等式中, 得

$$y > \frac{1}{2}, x < \frac{1}{2}, y - x < \frac{1}{2}. \quad (7)$$

(7)式决定正方形内一 $\triangle GEF$ (如图 1-4), 它的面积是 $\frac{1}{8}$.

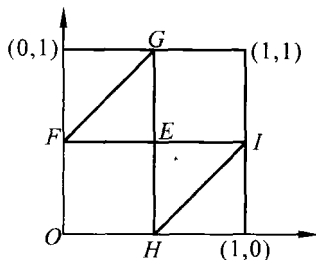


图 1-4

次设 $y < x$, 同样可得 $\triangle EHI$, 面积也是 $\frac{1}{8}$. 注

意 $x = y$ 时 B, C 重合而不可能得三角形. 这样一来, 我们的问题等价于向边长为 1 的正方形上均匀分布地掷点而求点落于 $\triangle GFE$ 或 $\triangle EHI$ 中的概率. 由 (6) 得所求概率为 $2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$. 注意此概率与 l 无关. $\square$

【例8】(蒲丰[Buffon]问题) 平面上画有等距离为 $a (a > 0)$ 的一些平行线 (图 1-5(a)), 向平面任意投一长为 $l (l < a)$ 的针, 试求针与一平行线相交的概率 p .

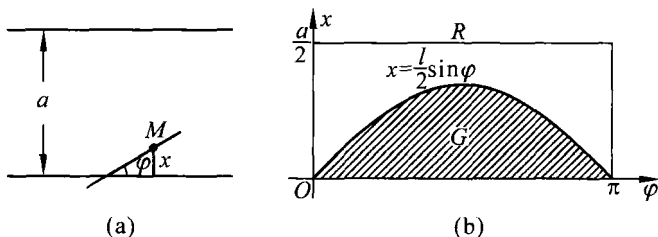


图 1-5

^① 所谓“任意”, 严格地说, 应理解为“ B 及 C 都在 AD 上独立地均匀分布”.