工程数学辅导

（线性代数与概率论）

孟庭芳　王锦铃　编

河南科学技术出版社

工程数学辅导

（线性代数与概率论）

孟庭芳　王锦铃　主编

河南科学技术出版社

内容提要

本书内容包括工程数学的线性代数，概率论的教学基本要求，内容提要，典型例题，题型练习以及历届函授、自学考试、考研的试题选。适用于工科院校各个层次学生学习线性代数、概率论的需要，也可作为工程数学的教学参考书。

工程数学辅导

（线性代数与概率论）

孟庭芳　王锦铃　主编

责任编辑　孟庆云

河南科学技术出版社出版发行

郑州工业大学印刷厂印刷

787×1092　1/32 开本　9.375 印张　210 千字

1996 年 8 月第 1 版　1996 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—3 000 册

ISBN 7-5349 1900-2/G・496

定价：11.00 元

前　言

随着经济建设的发展，工程数学广泛应用到科学技术的各个领域，各级各类高等院校几乎都开设了工程数学。为了适应自学考生、函授生、在校生以及报考研究生的学生学习工程数学的需要，特编写了这本书。

本书具有如下特点：第一，取材广泛，本书取材于目前各类院校工科专业、财经类专业用的各种教材，如：同济大学数学教研室编写的《线性代数》、《概率论》；化工部系统高校数学协作组编写的《线性代数》、《概率统计》；清华大学胡金德等人编写的《线性代数辅导》；西安交大邓兆中编写的《线性代数》；复旦大学姚慕生、高汝熹编写的《高等数学（二）第一分册线性代数》等，另外还有历届自学考试题、函授试题、考研试题等；第二，内容全面，本书包括线性代数、概率论的教学基本要求，内容提要，典型例题，题型练习，试题选等；第三，题型多样，本书不像一般的教材或辅导材料那样只有思考题、计算题、应用题和证明题，为适应考试要求，本书列举了大量的单项选择、多项选择（含双项选择）、判别是非、填空、简答、计算、证明题；第四，适应面广，选题既有自考试题，又有函授试题，既有在校本科生试题，又有考研试题，题型多样、深浅各异，各类学生可根据不同情况，适当选择。

本书由郑州工业大学（原郑州工学院）数学教研室孟庭

芳、王锦铃主编，参加编写的还有郑州电子技术学院的傅娟、郑州牧业工程高等专科学校的陆宜清。郑州工业大学的马桂荣老师绘制了本书中的全部插图。

本书在编写过程中，郑州工业大学数学教研室主任袁荣福、副主任张新育老师曾给以大力支持。

编者对前边提到的各本书的作者以及对本书编写作出贡献的同志表示衷心感谢。

由于水平所限，尽管撰写过程中作了很大努力，还可能会有缺点、错误和不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

1996.4

目　录

第二部分　概率论

第三部分　历届试题选…………………… (213)

第一部分　线性代数

线性代数课程教学基本要求

（学时数 32—36）

线性代数是讨论有限维空间线性理论的课程，它具有较强的抽象性与逻辑性，是高等工业学校教学计划中的一门基础理论课．由于线性问题广泛存在于科学技术的各个领域，某些非线性问题在一定条件下，可以转化为线性问题，因此本课程所介绍的方法广泛地应用于各个学科，尤其在计算机日益普及的今天，该课程的地位与作用更显得重要．通过教学，使学生掌握该课程的基本理论与方法，培养解决实际问题的能力，并为学习相关课程及进一步扩大数学知识面奠定必要的数学基础．

本课程的内容按教学要求的不同，分两个层次．文中用黑体字排印的属较高要求，学生必须深入理解，牢固掌握，熟练应用．其中，概念、理论用“理解”一词表述，方法、运算用“掌握”一词表述．非墨体字排印的，也是教学中必不可少的，只是在要求上低于前者．其中，概念、理论用“了解”一词表述，方法、运算用“会”或“了解”表达．

一、行列式

1. 了解行列式的定义和性质．

2. **掌握二、三阶行列式的计算法．**

3. 会计算简单的 n 阶行列式.

二、矩阵

1. 理解矩阵概念

2. 了解单位矩阵、对角阵、对称矩阵及其性质.

3. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置及其运算规律.

4. 理解逆矩阵的概念.

5. 掌握逆矩阵存在的条件与矩阵求逆的方法.

6. 掌握矩阵的初等变换.

7. 理解矩阵秩的概念并掌握其求法.

8. 了解满秩矩阵定义及其性质.

9. 了解分块矩阵及其运算.

三、向量

1. 理解 n 维向量的概念.

2. 理解向量组线性相关、线性无关的定义.

3. 了解有关向量组线性相关、线性无关的重要结论.

4. 了解向量组的最大无关组与向量组的秩的概念.

5. 了解 n 维向量空间、子空间、基底、维数、坐标等概念.

四、线性方程组

1. 掌握克莱姆(Cramer)法则.

2. 理解齐次线性方程组有非零解的充要条件及非齐次线性主程组有解的充要条件.

3. 理解齐次线性方程组的基础解系及通解等概念.

4. 理解非齐次线性方程组的解的结构及通解等概念.

5. 掌握用行初等变换求线性方程组通解的方法.

五、矩阵的特征值与特征向量

1. 理解矩阵的特征值与特征向量的概念，会求矩阵的特

征值与特征向量.

2. 了解相似矩阵的概念、性质及矩阵对角化的充分条件,会求实对称矩阵的相似对角形矩阵.

3. 了解把线性无关的向量组正交规范化的施密特($Smidt$)方法.

4. 了解正交矩阵的概念及性质.

六、二次型

1. 掌握二次型及其矩阵表示,了解二次型的秩的概念.

2. 会用正交变换法化二次型为标准型.

3. 了解二次型的正定性及其判别法.

* 关于线性代数课程教学基本要求的几点说明:①上述"基本要求"是高等学校工科数学课程教学指导委员会 1993 年 5 月 8 日制定的;②"基本要求"是最起码的要求,千万不要以为只要掌握其中的黑体字内容就万事大吉了."了解"、"会"的较低标准要求的内容,试卷中并不一定少见,如"运用行列式的性质去选择正确答案、判别是非、计算四阶乃至 n 阶行列式,考试中并不少见.又如:运用向量组线性相关、线性无关的重要结论进行证明、求向量组的最大无关组与向量组的秩有时还作为大题出现;用正交变换化二次型为标准型,试题中经常作为一个大题出现,有时分为:将二次型表示成矩阵形式、求矩阵 A 的特征值与特征向量,将 n 个线性无关的向量正交规范化、写出所用的正交变换的正交矩阵及标准型等四个小题出现;③对"基本要求"的掌握,不同层次,标准不同.考研究生的试题,要求较高,除了"基本要求"提到的内容外,还要求一般本科不讲的线性空间这一部分内容;专科要求水平较低,机、电专业要求标准较高,其它工科专业要求标准较低.具体情况,具体分析,根据不同要求掌握.

第一讲　行列式

内容提要

一、n 阶行列式定义

在常用的线性代数课本上，行列式有下述两种定义：

1. 形如 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的表达式叫 n 阶行列式。它表示 $n!$ 项的代数和；每一项由既不在同一行，又不在同一列的 n 个元素乘积再乘以 $(-1)^t$ 所构成，其中 t 表示该项 $(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 下标排列的逆序数。即

$$D_n=\sum_{n!}(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

（见同济大学《线性代数》课本）

2. 形如 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的表达式叫 n 阶行列式。它的结果是用递推法给出的。先定义二阶行列式：

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{12}-a_{21}a_{22}$$

再用二阶行列式定义三阶行列式：

$$D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

依次类推，用 $n-1$ 阶行列式定义 n 阶行列式：

$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$

其中 A_{1k}叫 a_{1k}的代数余子式，由 D_n 中划去 a_{1k}所在的行，划去 a_{1k}所在的列剩下的元素构成的 $n-1$ 阶行列式再乘以 $(-1)^{1+k}$构成. ($k=1,2,\cdots,n$). 一般来说：A_{ij}叫 a_{ij}的代数余子式. 由 D_n 中划去 a_{ij}所在的行、划去 a_{ij}所在的列剩下的元素构成的 $n-1$ 阶行列式再乘以$(-1)^{i+j}$构成.

(见化工系统高校数学协作组编《线性代数》)

二、行列式性质

1. 等值变形性质：

①行列式 D_n 与它的转置行列式 D_n' 相等：

$$D_n=D_n'$$

正因为行列式有这条性质，所以对行列式的行所适用的性质都可以用到列上.

②行列式 D_n 的行交换次数与列交换次数之和若为偶数，则所得新行列式与原行列式相等.

注意：这条性质是根据“行列式的两行（或列）交换，行列式正负号改变，绝对值不变”的性质推广而来.

③行列式 D_n 的某一行（列）中若有公因子 k，则 k 可以提

到行列式前边.

注意:这条性质与矩阵中对应性质的区别:k 乘矩阵 A 等于用 k 乘矩阵 A 的每一个元素.因此,若 A 为 n 阶方阵,则

$$|kA| = k^n|A|$$

④若行列式的某一行(列)的元素都是两元素之和,则整个行列式可拆成两个行列式之和,对应该行(列)各取一个元素,其余各行(列)元素不变.

注意:若 n 阶行列式每行(列)各元素均为两项和的形式,则该行列式可拆成 2^n 个行列式之和.如:三阶行列式可拆成八个行列式之和.

⑤把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数 k 加到另一列(行)对应元素上去,行列式值不变.

注意:行列式的第 i 行(列)乘以常数 k 加到第 j 行(列)上($i\neq j$),结果一定要放到不乘常数的第 j 行(列)上,而不能放到乘常数 k 的第 i 行(列)上.

如:$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{11}+a_{21} & 2a_{12}+a_{22} & 2a_{13}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 2a_{11}+a_{21} & 2a_{12}+a_{22} & 2a_{13}+a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

⑥行列式 D_n 等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和.

即 $$D_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

注意:$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D_n & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$ $i,j=1,2,\cdots,n$. a 与 A 的

下标(足码)一定要一致!

2. 行列式的变号性质:

行列式行交换的次数与列交换次数之和若为奇数,则行列式正负号改变,绝对值不变.

3. 判断行列式等于零的性质:

①若 D_n 中某一行(列)全为 0,则 $D_n=0$;

②若 D_n 中某两行(列)对应元素相等,则 $D_n=0$;

③若 D_n 中某两行(列)对应元素成比例,则 $D_n=0$;

④若 D_n 中某一行(列)可用其余各行(列)线性表示,则 $D_n=0$,反之亦然.

⑤若 D_n 的行(列)向量组线性相关,则 $D_n=0$,反之亦然.

⑥设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ $|A|=0 \Longleftrightarrow A\vec{X}=\vec{0}$有非零解;

⑦$|A|=0 \Longleftrightarrow A$ 为奇异方阵(降秩方阵);

⑧若 $D_n=-D_n'$ 则 $D_n=0$.

三、行列式计算

1. 用定义计算:一般用于二阶行列式或 n 阶对角行列式、三角行列式.

2. 三阶行列式的沙路法:

$$D_3=\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$+ \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$D_3=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

注意:此法仅适用于三阶行列式,对 $n>3$ 的情况不适用!

在求特征值时，沙路法常用.

3. 计算 n 阶($n\geqslant 3$)行列式：

①用定义计算：$D_n=\sum\limits_{n!}(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

此法对于对角行列式、三角行列式常用，一般很少用. 因为项数太多，计算量太大. 如：D_4 有 24 项，D_5 有 120 项，每项有 n 个元素乘积再乘以$(-1)^t$ 构成，计算量很大.

②经常用行列式的等值变形性质将行列式化简后计算.

典型例题

*例 1　求下列各排列的逆序数

(1)$1,3,\cdots,(2n-1),2,4,\cdots,(2n)$；

(2)$1,3,\cdots,(2n-1),(2n),(2n-2),\cdots,2$

解：(1)$1,3,\cdots,(2n-1)$每个数字前边没有比它大的，逆序数均为 0；

2 前边比 2 大的数有 $3,5,\cdots,(2n-1)$，逆序数为 $n-1$；

4 前边比 4 大的数有 $5,7,\cdots,(2n-1)$，逆序数为 $n-2$；

……

$(2n-2)$前边比 $2n-2$ 大的有 $2n-1$，逆序数为 1；

$(2n)$前边$(2n)$大的数没有，逆序数为 0，于是排列的逆序数为

$$t=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0=\frac{n(n-1)}{2}$$

(2)$1,3,\cdots,(2n-1),(2n)$每个数前边没有比它大的，逆序数均为 0；

$(2n-2)$前边比它大的有$(2n),(2n-1)$，逆序数为 2；

$(2n-4)$前边它大的有$(2n-2)$，$(2n)$，$(2n-1)$，$(2n-3)$，逆序数为 4；

……

2 前边比它大的有 4，6，…，$(2n-2)$，$(2n)$，$(2n-1)$，…，3 逆序数为 $2n-2$；于是排列的逆序数：

$t=2+4+\cdots+(2n-2)=n(n-1)$

*例 2　写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$的项.

解：$(-1)^{t_1}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$和$(-1)^{t_2}a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$

其中 t_1 为排列 1，3，2，4 的逆序数：1，　　t_2 为排列 1，3，4，2 的逆序数：2，

所以，四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$的项为：

$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$与 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

*例 3　五阶行列式共有__120__项，其中一项为$(-1)^t a_{13}a_{21}a_{32}a_{45}a_{54}$，$t=$__3__

解：五阶行列式共有 5！项，即 120 项，t 为 3，1，2，5，4 排列的逆序数：$0+1+1+0+1=3$.

例 4　设 $D_n\neq0(n\geqslant4)$下列结论正确的是(A,C,D)

(A)将 D_n 的第一行与第三行交换，第二列与第四列交换得行列式 Δ，那么，$D_n=\Delta$

$(B)D_n=a_{12}A_{13}+a_{22}A_{23}+\cdots+a_{n2}A_{n3}$

$(C)0=a_{12}A_{13}+a_{22}A_{23}+\cdots+a_{n2}A_{n3}$

$(D)D_n=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+\cdots+a_{3n}A_{3n}$

$(E)2D_n$ 等于 D_n 的每个元素均乘以 2 所得到的行列式

例 5　设　$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，下列结果正确的是$(A,$

D,E)

$$(A)D_3=\begin{vmatrix} a_{11}+2a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+2a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+2a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(B)D_3=\begin{vmatrix} 2a_{11}+a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21}+a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31}+a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(C)2D_3=\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(D)8D_3=\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(E)D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 6　n 阶行列式 D_n 的第 $1,2,\cdots,n$ 行(列)恰好是 n 阶行列式 Δ_n 的第 $n,(n-1),\cdots,1$ 行(列),则 Δ_n 与第 D_n 的关系是$\underline{\Delta_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D_n}$.

注意:将 D_n 变成 Δ_n,共需要进行$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$次行(或列)交换,而每次行(或列)交换,行列式变号,绝对值不变!

例 7　对角行列式与三角行列式