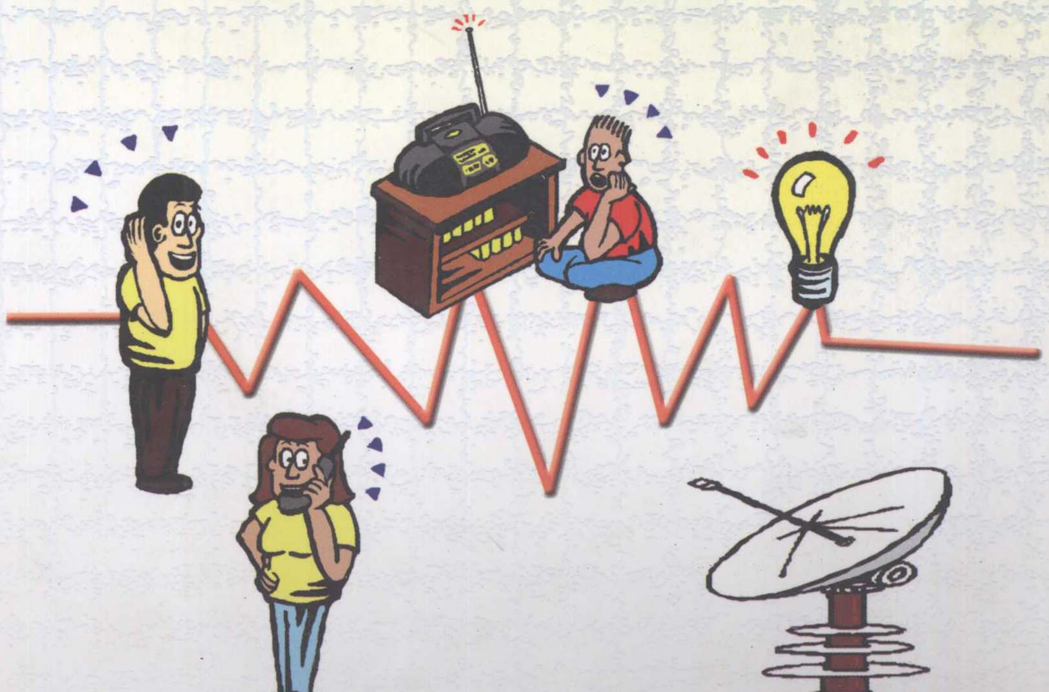
奥林匹克竞赛实战丛书

◎ 程稼夫　　编著

中学奥林匹克竞赛物理教程

电磁学篇



中国科学技术大学出版社

☆ 奥林匹克竞赛实战丛书

中学奥林匹克竞赛物理教程

电磁学篇

程稼夫　编著

中国科学技术大学出版社
2004・合肥

内 容 简 介

本书是作者在长期进行奥林匹克中学物理竞赛指导和教学实践的基础上编写的，倾注了作者对奥林匹克物理竞赛事业毕生的心血和热情。本书紧紧围绕中学物理的各个方面以及中学物理竞赛内容：静电场、稳恒电流、静磁场、电磁感应、交流电、电磁振荡与电磁波，在中学层面上精辟生动地介绍了有关重点概念、定律和公式，结合丰富的练习题，以生动的实例，进行问题的分析和综合，训练积极主动的解题思路，活跃思想，发展智能。同时各章均给出了具有一定分量的习题，并附有相应的参考答案。在科学训练的基础上，促使中学生整体物理素质的提高。

本书可作为广大中学生中学物理综合学习和素质提高的有效的辅导书和工具书，是广大中学生参加各类中学物理竞赛、奥林匹克物理竞赛以及高考物理的复习迎考的必备书籍；同时，本书也为中学物理教师提供了一个物理教学探索研究的崭新思路，是广大中学物理教师不可多得的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

中学奥林匹克竞赛物理教程.电磁学篇/程稼夫编著.—合肥：中国科学技术大学出版社，2004.3

(奥林匹克竞赛实战丛书)

ISBN 7-312-01648-0

Ⅰ.中… Ⅱ.程… Ⅲ.物理课-中学-教学参考资料 Ⅳ.G634.73

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第009481号

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路96号，230026)

合肥义兴印务有限责任公司印刷

全国新华书店经销

开本：787×1092/16　印张：27.25　字数：683千

2004年3月第1版　2004年3月第1次印刷

印数：1—5 000册

ISBN 7-312-01648-0/G·195　定价：30.00元

绪　言

中学奥林匹克物理竞赛在激发中学生的物理兴趣、提高中学生物理素质以及推动中学基础物理教学事业的发展起到了不可忽视的作用。事实证明，中学奥林匹克物理竞赛已经得到广大师生和家长的欢迎，受到了社会各界的关注，已经成为培养和选拔优秀青少年物理人才的又一条行之有效的途径。

为了配合中学奥林匹克物理竞赛活动的积极开展，也为了推动中学基础物理教学改革的深入进行，让更多有天赋的青少年优秀人才脱颖而出，笔者与物理奥林匹克国家集训队副总教练轩植华教授联手编写了“奥林匹克竞赛实战丛书”，本丛书共五册：

(1)《中学奥林匹克竞赛物理讲座》

(2)《中学奥林匹克竞赛物理教程・力学篇》

(3)《中学奥林匹克竞赛物理教程・电磁学篇》

(4)《中学奥林匹克竞赛物理教程・热学、光学和近代物理篇》

(5)《中学奥林匹克竞赛物理教程・实验篇》

我们编写这套丛书的目的，首先是为了提供给广大中学生一套密切联系中学物理教材、全面系统并有一定品位的物理课外读本。在“科教兴国”的大潮中，教育事业蓬勃发展，广大中学生的求知欲望空前高涨，特别是一大批优秀中学生对物理知识的高度渴求，他们应该得到更多、更好、更适合于他们阅读的书籍。大学物理课本不是专门为他们编写的，不可避免的会存在许多障碍。本丛书试图提供一套适合他们阅读的课外参考书，并尝试给中学物理教师提供一本与中学物理教学实践联系密切的教学参考书，以便老师们能够更深入地实践培养优秀学生的工作。

编写本丛书的几点说明：

1. 本丛书的内容基本上按照2000年全国中学生物理竞赛委员会第十九次全体会议通过的《全国中学生物理竞赛内容提要》并结合中学物理教学实际编写而成。

2. 在素材选择和编排方面，我们在以下几方面作了努力：

①总结并选择了多年来国际、国内各届物理竞赛中的优秀试题，并吸取了广大师生在竞赛物理研究中的丰富经验。一大批优秀试题具有“经典性”的示范作用，对基本概念、基本方法、基本能力的训练均可借鉴，因为它们很精彩，理应加以总结。

②在概念的讲述中，注意准确到位；在解题的应用中，注意清晰透彻，简洁深刻，视野独特，富有创意，以期对读者在深层次上有所帮助。

③不一味总结别人的东西，更着力于要有新意。我们注意到，在对各种问题的处理中，在对物理本质的理解上，应有更高的要求、更深刻的思维或观点。这对优秀中学生以及培养优秀中学生的物理教师是十分必要的。方法是在一定的物理观点下采用的，观点不同，方法各异。创造性思维和能力的培养是优秀中学生培养工作的灵魂。

举个例子：在处理静电场的问题中，有这样一个问题，即一个不带电的金属球壳（内外半径为 a 和 b），球心处放置一个带电量为 Q 的点电荷，欲把球心处点电荷从球内经球壳上一小缝移至无限远，求外力做了多少功。这个问题的求解通常是这样去做，考虑到球心处电荷 Q 一

下移出时，移动过程中球壳上感应电荷分布变化，静电场变化。因此，做的功用Q乘初终态电势差是不妥的。解决办法是，把Q分成无限多个小电荷，一个一个地经球壳小缝移至无限远。这样处理，保证了移一个无限小电荷，不会带来移动中电场分布的改变。然后，将每一次移动小电荷做的元功相加，就是所求的外力做功大小(分Q，最后合Q，外力做功为零，不计)。这是在移电荷，外力做功的观点下给出的一种解法。我们也可以换一种观点。把未移前的初态与移完后的终态比较，两种状态下的静电能量均贮存在电场中，终态的静电能是一个带电量为Q的点电荷周围静电场的能量，它比初态静电能多，多的部分就是初态球壳层导体中的那一部分空间有了静电能(因为初态导体壳内无电场)。因此，只需算出这部分多余的静电能(即静电能增量)，也就知道外力做了多少功。

那么这部分静电能如何计算呢？因为它是一个非匀强电场。尽管知道静电场的能量密度可以表达为$w=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$，但由于电场不均匀，中学生还无法得到结果。怎么办?

考虑到在静电场理论中，静电能量贮存在电场中的观点与静电能量由电荷携带的观点是等价的，在应用中会有相同的结论(注意:只限于静电场!)。在这一观点下，我们可以用静电能由电荷携带的观点去计算这部分静电场的贮能。因此，导体球壳内由初态无电场到终态中相应的空间有电场，增加的静电能可以写成

$$\Delta W=\frac{Q^2}{2C_a}-\frac{Q^2}{2C_b}$$

其中C_a，C_b分别表示半径为a，b的孤立导体球的电容，即$C_a=4\pi\varepsilon_0a$，$C_b=4\pi\varepsilon_0b$，由此，可得外力做的功$A=\Delta W$。值得注意的是，这里采用的观点、方法可以解决类似的一批问题。

再举一个例子:当处理一个连续分布的带电体、带电面或带电线在空间某一指定点所激发的静电场时，一种常规的做法是把带电体、带电面或带电线分成无限多个点电荷，把每个点电荷在那个指定点激发的电场强度求出，再矢量叠加得到。事实上，我们也可以这样去考察，在那个指定点放一个带电量为q_0的试验电荷，此试验电荷受力为$q_0\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{E}$即为所求的电场强度。考虑到q_0对带电物体(体、面或线)的作用力正好是$(-q_0\boldsymbol{E})$，作用力与反作用力大小相等。在某些对称情况下，q_0对带电物体的作用力易求，从而得到电场强度。我们在书中，均匀带电半圆环、均匀带电半球面在球心激发的静电场强度就是这样处理的。

类似的问题书中还有很多，例如力学中对两个质点系统的讨论具有重要的实际意义，如二质点碰撞问题、引力问题，以及许多实际牵涉两个质点的问题。因此，我们在理论上结合中学物理的实际，作了详尽的分析讨论，使得对两个物体系统的处理有一个更高的境界，甚至用通常方法处理感到困难的问题，在新的观点下会迎刃而解。

本丛书的编写实属尝试，愿望和实效会有距离，不当和错误定难避免，恳切希望各位读者批评指教。

本丛书的编写一直得到安徽省物理学会阮图南教授、赵宗彦教授、吴以勤教授、丁莉兰教授的指导，还得到安徽省教育厅教学科学研究所何润伟老师、杨思锋老师、梅小景老师、合肥市物理教学研究会王继珩老师、王可兵老师的鼓励和支持，在此一并表示衷心感谢。

程稼夫

2003年12月12日

于中国科学技术大学

目　　次

第一章　静电场

1.1　电荷守恒定律

一个不与外界发生电荷交换的孤立系统，其电荷总量（代数和）保持不变，它既不能创生，又不能消灭，只能从系统内的一个物体转移到另一个物体，或者从系统内物体的一部分转移到另一部分。即孤立系统的总电量不随时间变化，并与参照系的选取无关。

一个非孤立系统，单位时间内流出的电量等于系统内总电量的减少率。

1.2　库仑定律

库仑定律可以表述为：两个静止点电荷之间相互作用力的大小与两点电荷电量的乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比，作用力的方向沿着两点电荷间的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸。

设两点电荷的电量分别为 q_1 和 q_2，从 q_1 指向 q_2 的矢径为 $\boldsymbol{r}$，则 q_1 对 q_2 的静电力（即库仑力）为

$$\boldsymbol{f}=k\frac{q_1q_2}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \tag{1.1}$$

此式采用国际单位制，式中 $k=8.99\times10^9\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}$，$\varepsilon_0$ 为真空中的介电常数，又称真空电容率，在国际单位制下，其单位可以写为 $\mathrm{F\cdot m^{-1}}$（法拉/米）。

1.2.1　库仑定律包含的内容

其一，两静止点电荷之间的作用力与两点电荷距离的平方成反比，即电力的平方反比律。这是一条实验定律，由大量实验所证实。

其二，电荷是物体的一种属性。电量是定量描述物体带电状况的物理量。库仑定律告诉我们，两静止点电荷之间的电力与两点电荷电量的乘积成正比。

其三，两静止点电荷之间作用力的方向沿两静止点电荷的连线方向。这个电力（库仑力）具有球对称性，即只与两点电荷间的距离有关，而与连线的空间方位无关。这一结论是空间各向同性（旋转对称性）的必然结果。

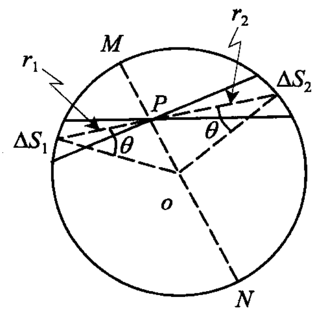


图 1-练 1

【练习 1-1】　如图 1-练 1 所示，为一无限薄绝缘球壳，此球壳均匀带电，电荷面密度 σ 为常量。设在球壳内任意位置（非球心）P 处有一点电荷，电量为 q。如果两点电荷之间的电力 F 与距离 r 的 n 次方成反比，即

$$F \propto \frac{1}{r^n}$$

令 $n=2+\delta$,试证明:

若 $\delta=0$,则此均匀带电球壳对点电荷 q 的作用力为零;若 $\delta\neq 0$,则此均匀带电球壳对点电荷 q 的作用力不为零。

分析与解 如图 1-练 1,点电荷 q 所在处 P 沿任一方位在球面上的两个对应面元 ΔS_1 与 ΔS_2 所带电荷 $\sigma\Delta S_1$ 与 $\sigma\Delta S_2$ 对球内电荷 q 的作用力的合力满足

$$\Delta F \propto \left(\frac{\sigma\Delta S_1 \cdot q}{{r_1}^n} - \frac{\sigma\Delta S_2 \cdot q}{{r_2}^n}\right)$$

式中 r_1 与 r_2 分别是面元 ΔS_1 与 ΔS_2 和点电荷 q 之间的距离。因 ΔS_1 与 ΔS_2 是点电荷 q 所在处 P 张无限小立体角所对应的两面元,有关系:

$$\frac{\Delta S_1 \cdot \cos\theta}{{r_1}^2} = \frac{\Delta S_2 \cdot \cos\theta}{{r_2}^2}$$

两式联立得

$$\Delta F \propto \frac{\sigma q}{\cos\theta}\left(\frac{1}{{r_1}^{n-2}} - \frac{1}{{r_2}^{n-2}}\right)$$

当 σ 与 q 同号,且 $n>2$(即 $\delta>0$)时,ΔF 的方向指向距离较大的面元(图中 $r_2>r_1$ 时,ΔS_2 较大)。若把整个球壳分成一对一对对应的面元,由于相对 MN 系统具有对称性,可以断定,q 所受合力不为零,且指向球心。同理,当 σ 与 q 异号,且 $n>2$($\delta>0$)时,q 所受合力不为零,且背离球心。

根据同样的分析,对于 $n<2$($\delta<0$)将有类似的结论:若 σ 与 q 同号,q 所受合力不为零,且背离球心;若 σ 与 q 异号,q 所受合力不为零,且指向球心。

当 $n=2$ 时,q 所受合力为零。

1.2.2 电荷和质量

电荷和引力质量有许多类似之处。

首先,电荷的电量在库仑定律中的地位与引力质量在万有引力定律中的地位相当。

其次,库仑力与万有引力均遵守平方反比律。因此,行星绕太阳运行的开普勒三定律,在初级近似下,也可用于玻尔模型中电子绕原子核的运动。在更严格的意义上,库仑力与距离平方成反比的规律是物理学中最精确的实验定律之一,而引力与距离平方成反比的关系却并不精确。例如,对于太阳与行星之间的引力作用势能,按爱因斯坦广义相对论,应写为

$$U = -\frac{GMm}{r} - \frac{3}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{GMm}{r} + \cdots$$

式中 M 是太阳质量,m 是行星质量,r 是它们之间的距离,v 是行星的速度,c 是真空中的光速。右式第一项称牛顿项,第二项称后牛顿项。在 $v\ll c$ 时,后牛顿项可略。

电荷和质量也有重要区别。

首先,质点间的作用只有吸引,电荷间的作用有吸引,也有排斥。由此,使得电力可以屏蔽,而引力则无法屏蔽。

其次,质量有相对论效应,运动质量 m 与静质量 m_0 有关系

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

而电荷无相对论效应，即电荷在静止状态或运动状态下，电量将不变。何以见得？可以对一块常温下不带电的铜板进行加温，由于铜原子中的电子和质子质量相差悬殊，温度的改变会导致电子和质子速度的改变相差很大，但是人们从未发现这块铜板加热后的带电状况有任何改变。

再次，电荷具有量子性，质量无量子性。实验证实，任何电荷的电量都是电子电荷量 e 的整倍数

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \quad (\mathrm{C})$$

近半个世纪以来，人们常谈论分数电荷，认为强子(例如质子、中子等等)是由夸克组成的。夸克有多种，其电荷分别有 $\pm\frac{1}{3}e$ 和 $\pm\frac{2}{3}e$，但迄今为止还没有在实验上观察到游离的夸克。

1.2.3 库仑定律成立条件以及适用范围

库仑定律成立的条件是：在真空中的两静止点电荷。

因为只有在真空条件下才能排除因感应或极化产生的电荷的影响，但就其两点电荷之间的作用力，仍遵循库仑定律，并不因为其他电荷的存在而有所影响。这被称作力的独立作用原理。当然，在建立库仑定律的各种实验中，需保证真空条件，以便排除干扰，建立正确的作用规律。

静止条件要求两点电荷相对观察者的惯性系保持相对静止。只有两静止点电荷之间的相互作用力才遵守牛顿第三定律——作用力与反作用力大小相等、方向相反并沿着两点电荷的连线方向。两运动点电荷(哪怕只有一个点电荷运动)之间相互作用不满足牛顿第三定律，尽管在速度 v 不大时差别很小，也不满足静止条件。

众所周知，所谓静止和运动是相对于某一特定参照系而言的。若两点电荷和观察者同在一惯性系中静止，据上面分析，库仑定律成立、牛顿第三定律满足。但从相对此惯性系运动的另一惯性系看来，两点电荷都在运动，其间除了电力外还有磁力，相互作用力不满足牛顿第三定律，情况变得复杂。对于同一对电荷在两个互相运动的惯性系中所看到的电、磁现象的差别，足以说明电磁现象的统一性。在两个相互运动的惯性系中所观察到的整体电磁现象中，电现象和磁现象将会有不同的份额。

库仑定律的适用范围是指两点电荷间距离 r 在多大范围内电力大小的平方反比律适用。时至今日，人们认为 r 在 10^{-15} 米到 10^7 米的尺度下，库仑定律是成立的。

【练习 1-2】 带电量为 Q_1 和 Q_2 的两正点电荷分别置于水平放置的、半径为 R 的光滑绝缘圆环直径两端，固定不动。直径右侧圆环上有一带有电量 $q(q>0)$ 的小珠，小珠可以在圆环上无摩擦滑动。试求小珠在右半圆环上的平衡位置(用 θ 表示)以及确定平衡位置的稳定性。如图 1-练 2 所示。

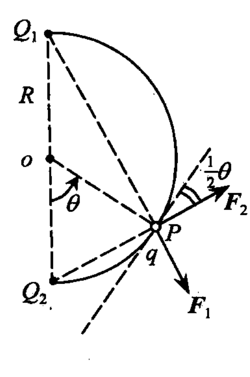


图 1-练 2

分析与解 如图 1-练 2，小珠位于圆环 P 点，对应的位置为 θ。小珠除了受 Q_1 和 Q_2 的库仑力外，还受到圆环的法向弹力。库仑力

F_1 和 F_2 的大小分别为

$$F_1 = k\frac{Q_1 q}{\left(2R\cos\frac{\theta}{2}\right)^2},\qquad F_2 = k\frac{Q_2 q}{\left(2R\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

若以 θ 增大方向为正向，小珠在 P 点处受到切向合力为

$$f = F_2\cos\frac{\theta}{2} - F_1\sin\frac{\theta}{2} = k\frac{Q_2 q}{4R^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\cdot\cos\frac{\theta}{2} - k\frac{Q_1 q}{4R^2\cos^2\frac{\theta}{2}}\cdot\sin\frac{\theta}{2} \qquad ①$$

当小珠达平衡时，切向合力为零，

$$f = 0$$

即

$$\frac{Q_2}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{Q_1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

化简得

$$\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2} = \sqrt[3]{\frac{Q_2}{Q_1}} \qquad ②$$

设平衡时的 θ 用 θ_0 表示，则 $f(\theta_0)=0$。利用 f 的表达式①，容易判定：

$$f(\theta_0 + \Delta\theta) < 0,\qquad f(\theta_0 - \Delta\theta) > 0$$

其中 $\Delta\theta$ 为小量。所以小珠的平衡位置 θ_0 是稳定平衡位置。

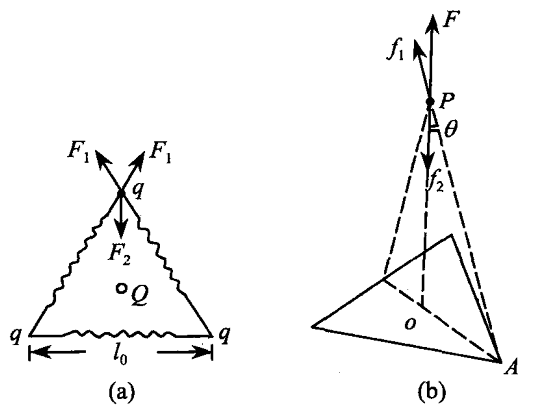


图 1-练 3

【练习 1-3】 三个相同的小球，由三根弹性系数同为 k 的轻质弹簧连接放在光滑水平桌面上，并使其成一等边三角形。弹簧松弛时三角形边长为 $l_0=9\text{cm}$。若令每个小球带同样的电量 $q=1.8\mu\text{C}$，三角形面积增大到原来的四倍时达到新的平衡。设弹簧是绝缘体，试确定：

(1) 弹簧的弹性系数 k 应为多大？

(2) 在三角形中心放上第四个小球，它带多少电荷才能使三角形面积与原弹簧松弛时面积相等？

(3) 与(2)中相同的电荷系统，固定不动，在沿过三角形中心的垂线与三角形平面距离 $h=15\text{cm}$ 处的一个单位正电荷($q_0=1\text{C}$)受力多少？

分析与解

(1) 三角形面积增大到原来的四倍，三角形每边边长增大到原来的两倍，即每边伸长量 $\Delta l = l_0 = 9\text{cm}$。

设此时两质点间静电力 F 满足：

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2l_0)^2} = kl_0$$

解得弹簧的弹性系数 k 为：

$$k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4{l_0}^3}=9\times10^9\frac{(1.8\times10^{-6})^2}{4(9\times10^{-2})^3}=10\quad(\mathrm{N\cdot m^{-1}})$$

(2) 令第四个小球的带电量为 Q。当三角形每边长回复到 l_0 时，达静电平衡，如图 1-练 3(a)所示。有关系式

$$F_2+2F_1\cos30^\circ=0$$

即

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{(\sqrt{3}l_0/3)^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{{l_0}^2}\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

解得

$$Q=-\frac{\sqrt{3}}{3}q\approx-1.039\quad(\mu\mathrm{C})$$

(3) 如图 1-练 3(b)，图中 o 为三角形中心，$\overline{oP}=h$。由于系统具有对称性，P 点处单位正电荷受力必沿$\overline{oP}$方向，图中$\overline{Ao}=\frac{\sqrt{3}}{3}l_0$，所以

$$\cos\theta=\frac{h}{\sqrt{h^2+(\sqrt{3}l_0/3)^2}}=\frac{h}{\sqrt{h^2+\frac{1}{3}{l_0}^2}}$$

则 P 点处单位正电荷 q_0 受力为

$$F=3\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{h^2+\frac{1}{3}{l_0}^2}\cos\theta+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq_0}{h^2}\approx1.4\times10^6\quad(\mathrm{N})$$

【练习 1-4】

(1) 电荷不能自由移动的半圆环，半径为 R_1，均匀带电，带电量为 Q_1。圆心处有一点电荷，带电量为 q_1。试计算半圆环受到圆心处电荷 q_1 的作用力。

(2) 电荷不能自由移动的半球面，半径为 R_2，均匀带电，带电量为 Q_2。球心处有一点电荷，带电量为 q_2。试计算半球面受到球心处电荷 q_2 的作用力。

分析与解

(1) 如图 1-练 4(a)，带电总量为 Q_1 的均匀带电半圆环受圆心处点电荷 q_1 的作用力为辐射状、均匀分布的力。其合力方向依对称性必在过圆心的对称轴方向。若 q_1，Q_1 同号，合力将沿背离 o 点方向；若 q_1，Q_1 异号，将沿指向 o 点方向。合力的大小等于半圆上单位弧上受到的作用力大小乘以圆直径，即

$$f=f_0\cdot2R_1=k\frac{q_1\cdot\lambda}{R_1^2}\cdot2R_1\qquad①$$

其中 λ 为半圆上单位长圆弧所带电量(称电荷线密度)，即 $\lambda=\frac{Q_1}{\pi R_1}$，代人得合力大小为

$$f=\frac{2k}{\pi}\frac{q_1Q_1}{R_1^2}\qquad②$$

说明：

(ⅰ) 表达式①在本套丛书“力学篇”中已用过多次。在此给出证明。

证法一 利用图 1-练 4(b)，由于合力方向可由对称性知沿 x 轴方向，因此，可以先算出半圆上每一小段圆弧所受 q_1 的静电力在 x 轴方向的分力，而后对全体小段圆弧求和，得合力。即

$$(\Delta f)_x = k\frac{q_1 \cdot \Delta q}{R_1^2} \cdot \cos\theta = k\frac{q_1 \cdot \lambda\Delta l}{R_1^2}\cos\theta$$

利用几何关系

$$\Delta l \cdot \cos\theta = \Delta y$$

所以合力 f 为

$$f = k\frac{q_1\lambda}{R_1^2}\sum\Delta l \cdot \cos\theta = k\frac{q_1\lambda}{R_1^2}\sum\Delta y = f_0 \cdot 2R$$

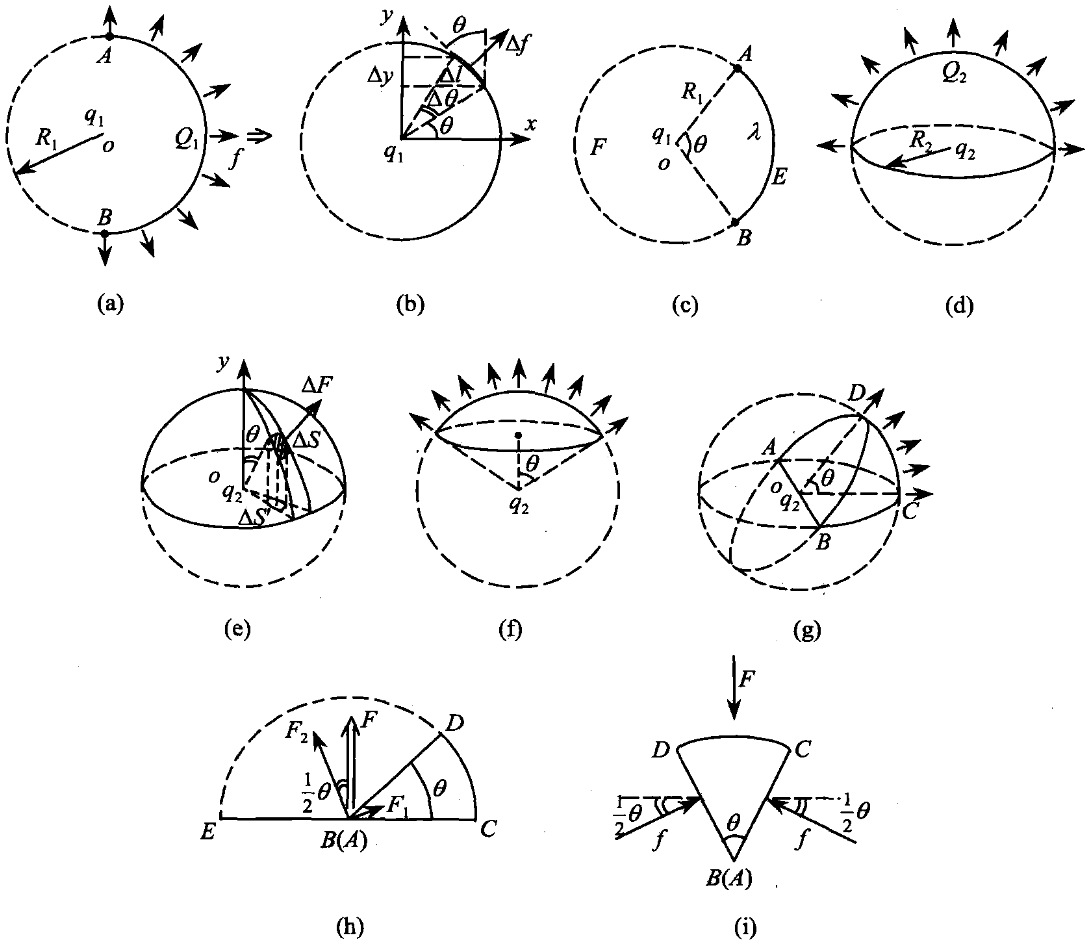


图 1-练 4

证法二 设想一盒宏观上静止不动的空气，忽略空气自身的重量(或引力可略的宇宙空间中的一盒空气)，空气压强为 p。在盒内考察厚度为 t，上、下底面为半径等于 R 的半圆面柱体中的空气。由于空气静止不动，又不考虑空气自身的重量，所以这部分空气所受外部空气的压力之和为零。显然，半圆形两底面上所受的力必相互抵消，则半圆形圆弧侧面所受到的合力一定等于直径处平面形侧面所受的合力。若用底面上半圆和直径的线度来描述侧面所受的作用力，$f_0 = p \cdot t$ 描述单位长(或单位弧长)所受的作用力，全部侧面所受合力为零，可以得到圆弧形侧面受到的合力 f 与平面形侧面受到的合力的平衡关系式

$$f = f_0 \cdot 2R$$

当 t 很小而 f_0 又为定值时，就是题中关系式①。

（ⅱ）若题中半圆均匀带电改成中心角为 θ 的圆弧 $\overset{\frown}{AEB}$ 均匀带电，且电荷线密度 λ 相同，如图 1-练 4(c)所示，则圆心处点电荷 q_1 对此均匀带电圆弧的作用力应为

$$f = f_0 \cdot 2R_1 \sin\frac{\theta}{2} \tag{③}$$

当 $\theta=\pi$ 时，即得式①。所以式①是式③的特例。当代入 f_0 得

$$f = k\frac{q_1\lambda}{R_1^2} \cdot 2R_1 \sin\frac{\theta}{2} \tag{④}$$

q_1 对均匀带电圆弧 $\overset{\frown}{AFB}$ 的作用力，如图 1-练 4(c)所示，同理得到式④。

(2) 如图 1-练 4(d)，带电总量为 Q_2 的均匀带电半球面受球心处点电荷 q_2 的作用力为沿径向辐射状、均匀分布的力。其合力方向依对称性必在过球心的对称轴方向。若 q_2，Q_2 同号，半球面所受合力将沿背离球心方向；若 q_2，Q_2 异号，将沿指向球心方向。合力的大小等于半球面上单位球面受到的作用力大小乘以过球心大圆截面积，即

$$F = F_0 \cdot \pi R_2^2 = k\frac{q_2 \cdot \sigma}{R_2^2} \cdot \pi R_2^2 \tag{⑤}$$

其中 σ 为均匀带电半球面上单位面积所带电量(称电荷面密度)，即 $\sigma=\frac{Q_2}{2\pi R_2^2}$，代入上式得合力大小为

$$F = \frac{k}{2}\frac{q_2Q_2}{R_2^2} \tag{⑥}$$

说明：

（ⅰ）表达式⑤在“力学篇”中已用过多次。在此给出证明。

证法一　把半球面面积分成无限多个无限小球面元，由于无限小，每个球面元可以看成平面面元。球心处点电荷 q_2 对球面上每个带电面元的作用力沿径向向外(设 q_2 与 Q_2 同号)。由于系统的对称性，q_2 作用在半球面上的合力必沿对称轴 oy 方向。

在半球面上任取一个面元，面积为 ΔS，带电量 $\Delta Q=\sigma\Delta S$，所处位置其径向与对称轴交角为 θ(面元无限小，面元上各点 θ 角近似相同)。如图 1-练 4(e)所示。面元受到 q_2 的静电力在 y 轴方向分力为

$$(\Delta F)_y = \Delta F\cos\theta = k\frac{q_2 \cdot \sigma\Delta S}{R_2^2} \cdot \cos\theta$$

则半球面受到 q_2 的合力为

$$F = \sum(\Delta F)_y = k\frac{q_2\sigma}{R_2^2}\sum\Delta S\cos\theta = k\frac{q_2\sigma}{R_2^2}\sum\Delta S'$$

此处 $\Delta S'$ 为 ΔS 在大圆面上的投影值，有关系

$$\Delta S' = \Delta S \cdot \cos\theta$$

再利用球面上单位带电球面受到 q_2 的静电力表达式：

$$F_0 = k\frac{q_2\sigma}{R_2^2}$$

以及整个半球面在过球心垂直于对称轴的截面上的投影等于大圆面积关系式

$$\sum\Delta S \cdot \cos\theta = \sum\Delta S' = \pi R_2^2$$

得到

$$F = F_0 \cdot \pi R_2^2$$

此式即为表达式⑤。

证法二 设想一盒宏观上静止不动的空气，忽略空气自身的重量，空气压强为 p，在盒内考察一个半径为 R 的半球体中的空气。由于空气静止不动，又不考虑空气自身重量，所以这个半球形空气所受外部空气的压力之和为零。显然，半球面上受到外界空气压力之和 F 必等于过球心大圆面上外界所受空气的压力，即

$$F = p \cdot \pi R^2$$

其中压强 p 就是单位面积受到的外力 F_0。

（ⅱ）若一个球面与一个不通过球心的平面相截，可以得到一个球冠。我们讨论图 1-练 4(f)中的球冠，球冠上均匀带电，电荷面密度与题中半球面的电荷面密度相同，即为 $\sigma=\dfrac{Q_2}{2\pi R_2^2}$。又图中 θ 已知，求球心处点电荷 q_2 对球冠上电荷的作用力。易知，这个力的方向沿对称轴，这个力的大小为

$$F = F_0 \cdot \pi(R_2 \sin\theta)^2$$

代入 $F_0=k\dfrac{q_2 \cdot \sigma}{R_2^2}$得

$$F = \frac{k}{2}\frac{q_2 Q_2}{R_2^2}\sin^2\theta \qquad ⑦$$

其中 $Q_2=2\pi R_2^2 \cdot \sigma$。

（ⅲ）通过同一条直径 AB、交角为 θ 的两个平面与球面相截，截得$\dfrac{\theta}{2\pi}$部分球面，如图 1-练 4(g)中所示 $ADBCA$ 球面。设这部分球面均匀带电，电荷面密度也为 σ，且电荷不能自由移动。并设球半径为 R。求球心处点电荷 q 对球面部分静电作用力的合力。

解法一 先画出图 1-练 4(g)沿 BoA 方向的正视图，如图 1-练 4(h)所示。再用虚线补成一个半球面的正视图。设所补的球面部分的电荷面密度也为 σ，则球心处点电荷对半球面上电荷的作用力为 F，由式⑤知

$$F = F_0 \cdot \pi R^2$$

其中 $F_0=k\dfrac{q\sigma}{R^2}$，即球面上单位带电面积所受的作用力。

再根据对称性，部分球面 $ADBCA$ 所受作用力方向必在 θ 角的角平分线方向，半球面的其余部分 $ADBEA$ 所受作用力必与之垂直，因此得到所求部分球面受到 q 的作用力 F_1 为

$$F_1 = F \cdot \sin\frac{\theta}{2} = F_0 \cdot \pi R^2 \cdot \sin\frac{\theta}{2} \qquad ⑧$$

解法二 先讨论宏观静止空气中相同形状、体积中的空气静力平衡问题，忽略空气自身的重量。画出图 1-练 4(g)沿 BoA 方向的正视图，如图 1-练 4(i)所示。根据对称性，空气压强在球面部分的合力设为 F，两个半圆面上的压力为 f，方向如图(i)中所示。设空气压强为 p，则在对称轴方向受力平衡方程为

$$F = 2f \cdot \sin\frac{\theta}{2} = 2\left(p \cdot \frac{1}{2}\pi R^2\right)\sin\frac{\theta}{2} = p \cdot \pi R^2 \cdot \sin\frac{\theta}{2} \qquad ⑨$$

其中已利用半圆面上受力 $f=p \cdot \dfrac{1}{2}\pi R^2$。式⑨中压强 p 即为单位面积受力，即 $p=F_0$。利用