锦囊妙解

创新导学专题

高中数学 选修内容

丛书主编 司马文 曹瑞彬
丛书副主编 冯小秋 钟志健
本册主编 胡志彬

品牌连续热销8年

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

锦囊妙解

创新导学专题

高中数学

选修内容

丛书主编　司马文　曹瑞彬
丛书副主编　冯小秋　钟志健
执行主编　江　海
本册主编　胡志彬
编　　者　万强华　孙志明　许学龙　曹建峰　毛金才　李庆春　周志祥
朱燕卫　金尤国　胡志彬　丁锁勤　钱　勇　吴志山　何福林
沈桂彬　李小慧　朱时来　王春和　周拥军　王新祝　李家亮
丁　勇　肖亚东　吴淑群　张季锋　李金光　杜海红　张福忠

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

图书在版编目(CIP)数据

锦囊妙解创新导学专题. 高中数学. 选修内容/司马文,曹瑞彬丛书主编;胡志彬本册主编. —北京:机械工业出版社,2010.10
ISBN 978-7-111-31730-2

Ⅰ. ①锦… Ⅱ. ①司… ②曹… ③胡… Ⅲ. ①数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 170096 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)
策划编辑:石晓芬　　　　责任编辑:石晓芬　李　乐
责任印制:乔　宇
三河市宏达印刷有限公司印刷
2010 年 10 月第 1 版 · 第 1 次印刷
169mm×228mm · 10.75 印张 · 280 千字
标准书号:ISBN 978-7-111-31730-2
定价:15.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部负责调换

电话服务
社服务中心:(010)88361066
销 售 一 部:(010)68326294
销 售 二 部:(010)88379649
读者服务部:(010)68993821

网络服务
门户网:http://www.cmpbook.com
教材网:http://www.cmpedu.com

前 言

锦囊妙解丛书面世多年，备受广大读者厚爱，在此深表感谢。为了对得起广大读者的信任，对得起自己的职业良心，我们密切关注课程改革的新动向，在原有基础上，精益求精，反复修订，使得锦囊妙解丛书与时俱进、永葆青春。目前奉献给读者的《锦囊妙解创新导学专题》丛书，力求凸显创新素质的培养，力求知识讲解创新、选择试题创新、剖析思路创新，从而力求让学生阅读后，能更透彻、迅速地明晰重点、难点，在掌握基本的解题思路和方法的基础上，举一反三、触类旁通，全面提升学生的创新素质，在学习、应试中得心应手、应付裕如。

本丛书以每个知识点为讲解元素，结合“课标解读”、“知识清单”、“易错清单”、“点击高（中）考”、“模拟演练”等栏目设计，突出教材中的重点和难点，并将高（中）考例题的常考点、易错点进行横竖梳理，多侧面、多层次、全方位加以涵盖，使分散的知识点凝聚成团，形成纵横知识网络，有利于学生的记忆、理解、掌握、类比、拓展和迁移，并转化为实际解题能力。

本丛书取材广泛，视野开阔，吸取了众多参考书的长处及全国各地教学科研的新思路、新经验和新成果，选例新颖典型，难度贴近高（中）考实际。讲解完备，就某一专题进行集中、全面的剖析，对知识点的讲解自然而细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识，能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小，更易于理解，从而达到举一反三、触类旁通的功效。

本丛书以“新课程标准”为纲，以“考试说明”与近年考卷中体现的高（中）考命题思路为导向，起点低、落点准，重点难点诠释明了，高（中）考关键热点突出，专题集中，能很好地培养学生思维的严谨性、解题的灵活性、表达的规范性。

古人云：授人以鱼，只供一饭之需；授人以渔，则一生受用无穷。让学生掌握“捕鱼之术”，其实就是创新教育的主要目标。本丛书策划者、编写者以此为共识，精诚合作，千锤百炼，希望本丛书不但能帮助你学到知识，掌握知识，而且能掌握其学习方法，养成创新意识，增强创新能力，那将能让你终身受益。

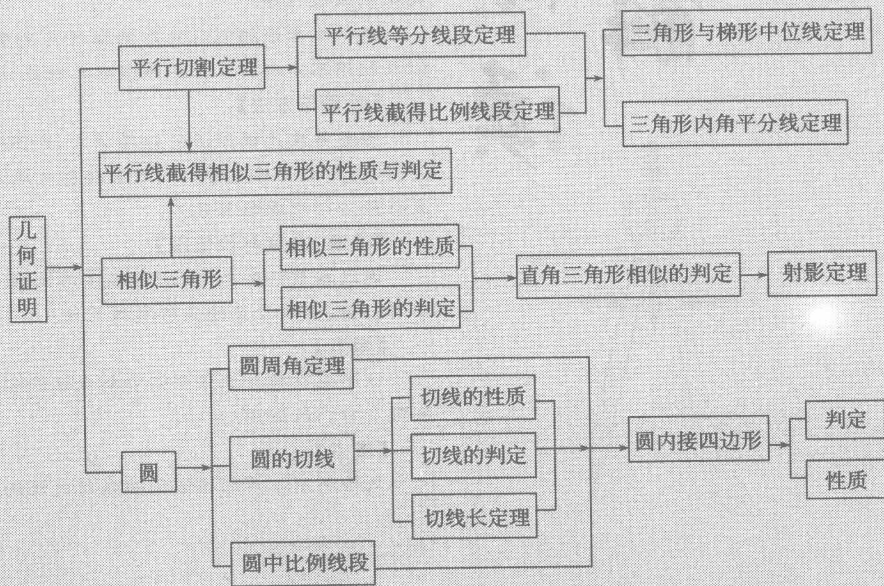
司马文

曹瑞彬

目 录

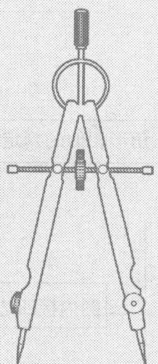
第一章　几何证明选讲

本章知识网络



第一讲 相似三角形

课标解读



【知识与技能】

使学生掌握平行切割定理及运用该定理证明线段成比例或证明线段相等.

使学生掌握相似三角形的性质与判定,会证明三角形相似及利用三角形相似证明线段成比例或证明角相等.

【过程与方法】

培养学生严谨简洁的数学语言,加强严密的逻辑推理能力,发展自己的观察、探索、发现的创造能力,形成一定的几何直观能力与空间想象能力.

【情感、态度与价值观】

通过本节课的教学,启示学生养成细心观察、严密推理、认真分析、严谨论证的良好思维习惯.

【重点】

让学生理解并掌握平行切割定理和相似三角形的性质与判定及它们的运用.

【难点】

灵活利用三角形相似证明线段成比例或证明角相等.

知识清单

知识点 1

平行切割定理及推论

1. 平行线等分线段定理及其推论

(1)定理：如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等，那么在任一条(与这组平行线相交的)直线上截得的线段也相等.

(2)推论：经过梯形一腰的中点而平行于底边的直线平分另一腰.

2. 平行切割定理及其推论

(1)定理：两条直线与一组平行线相交，它们被这组平行线截得的对应线段成比例.

(2)推论：平行于三角形一边的直线截其他两边，截得的三角形与原三角形的对应边成比例.

3. 三角形角平分线的性质

三角形的内角平分线分对边成两段的长度比等于夹角两边长度的比.

4. 梯形的中位线定理

梯形的中位线平行于两底，而且等于两底和的一半.

注意问题

理解定理中“平行”“对应”的概念，它们是定理或推论成立的主要条件，在题目中只要涉及“平行”或“对应”，我们可考虑平行切割定理及推论.

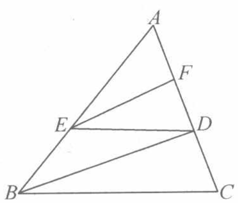


图 1-1-1

例1 如图 1-1-1 所示，已知 $EF /\!/ BD$，$ED /\!/ BC$，若 $AF:FD=3:2$，求 $AD:DC$ 的值.

【分析】要求 $AD:DC$ 的值，就要设法与 $AF:FD=3:2$ 联系起来，寻找它们的关系很重要，依据图形和已知 $EF /\!/ BD$，$ED /\!/ BC$ 的条件，我们要利用到平行切割定理.

【解析】因为 $EF /\!/ BD$，所以 $AF:FD=AE:EB$；又由 $ED /\!/ BC$，知 $AE:EB=AD:DC$，所以有 $AF:FD=AD:DC$，因而 $AD:DC=3:2$.

温馨提示：可千万要注意线段的对应哦！

点评 抓住题中的“平行”条件，根据平行切割定理，挖出对应线段成比例的因素，这些是我们解题时要充分考虑的关键点.

变题 如图 1-1-1 所示，已知 $EF /\!/ BD$，$ED /\!/ BC$，若 $AF:FD=3:2$，求 $AF:AC$ 的值.

【分析】这也是一个比例求值问题，根据题中有两条线段分别平行两个三角形的一边，我们考虑平行切割定理及其推论.

【解析】因为 $EF /\!/ BD$，及 BD 是三角形 ABD 的一边，所以 $AE:AB=AF:AD$；又因为 $ED /\!/ BC$ 及 BC 是三角形 ABC 的一边，有 $AE:AB=AD:AC$，因而 $AF:AD=AD:AC$，由已知 $AF:FD=3:2$，得 $AF:AD=AF:(AF+FD)=3:5=AD:AC$，故 $AC=\frac{5}{3}AD$，$AF=$

$\frac{3}{5}AD$，所以 $AF:AC=\frac{3}{5}AD:\frac{5}{3}AD=9:25$.

【小结】

涉及求比例问题的题，解题的步骤为：①依据已知条件中的平行线段(或直线)，利用平行切割定理及推论，写出相应的对应线段比的关系；②以所要求的线段比为基点，寻找它与上一步分析的线段比的联系；③进行有关线段比的运算，得出结果.

例2 在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle ADC=90°$，E 是 AB 边的中点，联结 ED，EC，求证：$ED=EC$.

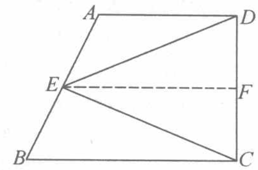


图 1-1-2

【分析】要证明 $ED=EC$，我们只要想办法证明 E 在线段 CD 的垂直平分线上.

【证明】方法一：如图 1-1-2 所示，过点 E 作 $EF\parallel BC$，交 DC 于 F 点. 因为梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，所以 $AD\parallel EF\parallel BC$.

因为 E 是 AB 的中点，所以 F 是 CD 的中点(平行线等分线段定理及其推论).

提示：要充分利用平行线的作用，这是很关键的一步.

因为 $\angle ADC=90°$，所以 $\angle DFE=90°$.

所以 $EF\perp DC$，因而 EF 是 DC 的垂直平分线.

所以 $ED=EC$.

方法二：如图 1-1-3 所示，延长 DE 和 CB 相交于点 F，因为在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，所以 $AD\parallel FB$.

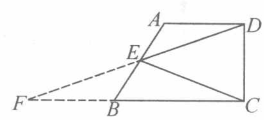


图 1-1-3

因为 E 是 AB 的中点，所以 E 是 DF 的中点(平行线等分线段定理及其推论)，因而 $DE=EF$.

因为 $\angle ADC=90°$，所以 $\angle DCF=90°$.

又因为在直角三角形 DCF 中，CE 是斜边 DF 上的中线，所以 $CE=\frac{1}{2}DF=DE$.

想想：你还有其他的证明方法吗？

点评 用添平行线的方法创造使用平行切割定理的条件，它是我们解决证明线段相等等问题的一条重要途径.

知识点 2

平行切割定理的运用

平行切割定理经常用来证明(或求解)有关线段成比例和线段相等的几何问题，因此，它为我们提供了一条解几何题的重要途径.

注意问题

深刻理解和掌握平行切割定理及推论是我们应用它解题的首要条件，而充分挖掘利用与添加平行线是关键.

例题 如图 1-1-4 所示，已知在平行四边形 $ABCD$ 中，$DE=BF$，求证：$\frac{CD}{CQ}=\frac{PD}{PQ}$.

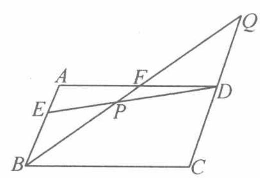


图 1-1-4

【分析】由于条件中有平行线，考虑平行切割定理及推论.

【证明】因为 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $FD/\!/BC$，$BE/\!/DQ$，所以 $\frac{CD}{CQ}=\frac{BF}{BQ}$，$\frac{PE}{PD}=\frac{PB}{PQ}$.

注意挖掘题中隐含的条件，特别是平行线.

因为 $\frac{PE}{PD}=\frac{PB}{PQ}$，所以 $\frac{PE+PD}{PD}=\frac{PB+PQ}{PQ}$，即 $\frac{ED}{PD}=\frac{BQ}{PQ}$，即 $\frac{ED}{BQ}=\frac{PD}{PQ}$.

又因为 $DE=BF$，所以 $\frac{PD}{PQ}=\frac{BF}{BQ}$，$\frac{CD}{CQ}=\frac{PD}{PQ}$.

点评 本题的突破口是寻找平行线，依据平行切割定理及推论给出相应的线段比，再利用相等线段和等比性质，证明线段成比例.

变题 已知三角形 ABC 中，点 D 内分 BC 为 $1:3$，点 E 内分 AD 为 $1:2$，BE 的延长线交 AC 于点 F，求 $\frac{AF}{AC}$.

【分析】因为是要求线段的比，可设法添加平行线，考虑平行切割定理及推论.

提示：添加平行线是关键哦！

【解析】如图 1-1-5 所示，过 D 作 $DG/\!/AC$ 交 BF 于 G，因为 $DG/\!/AF$，所以 $\frac{AF}{GD}=\frac{AE}{DE}=\frac{1}{2}$.

因为 $DG/\!/FC$，所以 $\frac{GD}{FC}=\frac{BD}{BC}=\frac{1}{4}$，因而 $\frac{AF}{FC}=\frac{AF}{GD}\cdot\frac{GD}{FC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$，所以 $\frac{AF}{AC}=\frac{1}{9}$.

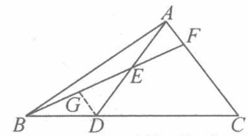


图 1-1-5

点评 在添加平行线时，要充分考虑题设条件，不能乱作平行线，本题中如果过其他点作平行线的话，就会使解题过程变得更加复杂.

巩固题 在三角形 ABC 中，D 是 AC 的中点，E 是 BD 的中点，AE 交 BC 于点 F，求 $\frac{BF}{FC}$.

【分析】添加平行线，利用平行切割定理及推论，求线段比.

【解析】如图 1-1-6 所示，过点 D 作 $DG/\!/CF$，所以 $\frac{AD}{AC}=\frac{DG}{CF}$，又因为 $DG/\!/FB$，所以 $\frac{DE}{EB}=\frac{DG}{FB}$.

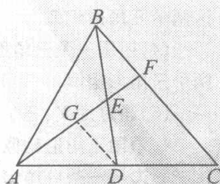


图 1-1-6

因为 D 是 AC 的中点，E 是 BD 的中点，所以 $\frac{DG}{FB}=1$，$\frac{BF}{FC}=\frac{DG}{FC}=\frac{AD}{AC}=\frac{1}{2}$.

【总结】

1. 深刻理解平行线是创造利用平行切割定理及推论的条件.

2. 在解决证明线段成比例和证明线段相等的问题时，我们首先要考虑是否可从利用平行切割定理及推论入手.

3. 在解题中，要充分利用中点的作用，过中点作平行线是常见的一种添加辅助线的方法.

知识点 3

相似三角形

1. 相似三角形的概念

我们把对应角相等、对应边成比例的两个三角形，叫做相似三角形.

2. 相似三角形的性质

(1)相似三角形的对应角相等.

(2)相似三角形的对应边的比相等.

(3)相似三角形的对应线段成比例.

(4)两个相似三角形的周长比等于相似比.

(5)两个相似三角形的面积比等于相似比的平方.

3. 相似三角形的判定方法

(1)平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似.

基本图形如图 1-1-7、图 1-1-8 所示.

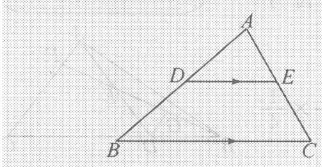


图 1-1-7

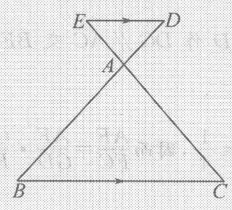


图 1-1-8

(2)如果两个三角形三组对应边的比相等，那么这两个三角形相似.

(3)如果两个三角形的两组对应边的比相等，并且相应的夹角相等，那么这两个三角形相似.

(4)如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似.

(5)通过定义：三个角对应相等和三边对应成比例.

4. 直角三角形相似的特殊判定

斜边与一条直角边对应成比例的两个直角三角形相似.

5. 直角三角形射影定理

直角三角形一条直角边的平方等于该直角边在斜边上的射影与斜边的乘积；斜边上高的平方等于两条直角边在斜边上射影的乘积.

注意问题

注重对相似三角形"对应"的理解，对应角要相等、对应边成比例、顶点要对应，对相似三角形的识别要依据相似三角形的判定方法，针对题中的条件灵活运用不同的识别方法，千万不可遗漏某个条件.

例题 如图 1-1-9 所示，$BC\perp AF$，$FD\perp AB$，垂足分别为 C、D，那么图中有________对相似三角形.

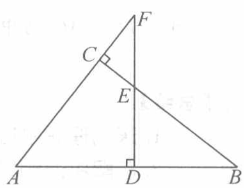


图 1-1-9

【解析】 观察图形，我们可以发现，图中有 4 个直角三角形，它们是 $Rt\triangle ABC$，$Rt\triangle ADF$，$Rt\triangle EDB$，$Rt\triangle CFE$. 这 4 个直角三角形每两个之间都相似，所以一共有 6 对三角形相似.

$\triangle ABC\backsim\triangle EBD$，$\triangle ABC\backsim\triangle AFD$，$\triangle ABC\backsim\triangle EFC$，

$\triangle AFD\backsim\triangle EBD$，$\triangle AFD\backsim\triangle EFC$，$\triangle BED\backsim\triangle FEC$.

提示：可不要漏了哦！

【答案】6

点评 在复杂图形中辨认相似三角形时，要着重抓住图形的特征．如本题重在找相等的角，然后再判定．

巩固题 如图 1-1-10 所示，$AD=DF=FB$，$DE\parallel FG\parallel BC$，则 $S_1:S_2:S_3=$____________．

【解析】因为 $DE\parallel FG\parallel BC$，

所以$\triangle ADE\backsim\triangle AFG\backsim\triangle ABC$．

提示：注意角的对应

又因为 $AD=DF=FB$，

所以 $AD:AF:AB=1:2:3$．

所以$\dfrac{S_1}{S_{\triangle AFG}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$．

所以 $S_1:S_2=1:3$．

所以$\dfrac{S_{\triangle AFG}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$．

所以$\dfrac{S_2}{S_3}=\dfrac{3}{5}$．

所以 $S_1:S_2:S_3=1:3:5$．

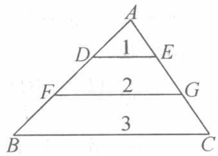


图 1-1-10

【答案】1∶3∶5

点评 要抓住 $AD=DF=FB$，$DE\parallel FG\parallel BC$ 的条件，利用基本图形进行判定三角形相似，然后利用性质解题．

知识点 4

相似三角形的性质和判定的运用

在求解(或证明)线段成比例与证明线段相等的几何问题时，用添加平行线的方法创造使用平行切割定理的条件或构造相似形．

注意问题

在计算和证明过程中，要重视辅助线的添加，如作平行线、连线构造相似形等．

例1 在三角形 ABC 中，$AB=AC$，$BD\perp AC$，点 D 是垂足，求证：$BC^2=2CD\cdot AC$．

【分析】要证明线段的比例相等，就要考虑运用相似三角形．

【证明】如图 1-1-11 所示，过点 A 作 $AE\perp BC$，垂足为 E，因为 $AB=AC$，所以 $CE=BE=\dfrac{1}{2}BC$，由 $AE\perp BC$，$BD\perp AC$ 得$\angle AEC=\angle BDC=90^\circ$，又因为$\angle C=\angle C$，所以$\triangle AEC$与$\triangle BDC$相似，所以$\dfrac{EC}{DC}=\dfrac{AC}{BC}$，因而$\dfrac{\frac{1}{2}BC}{CD}=\dfrac{AC}{BC}$，即 $BC^2=2CD\cdot AC$．

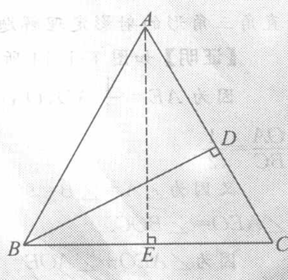


图 1-1-11

点评 在等腰三角形中，基本辅助线为底边上的高；本题因无法联系射影定理和平行切割定理，故考虑运用相似三角形．

变题 如图 1-1-12 所示，AD 是直角三角形 ABC 斜边上的高，E 是延长线 CB 上的一点，且$\angle 1=\angle 2$，求证：$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AE^2}{EC^2}$．

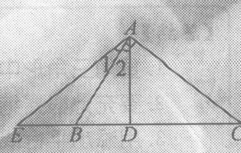


图 1-1-12

【分析】要证明线段成比例，根据题中存在的等角条件，我们考虑运用相似三角形来证明.

【证明】因为$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$，所以$\angle 2=\angle C=90°-\angle ABC$.

又因为$\angle 1=\angle 2$，所以$\angle 1=\angle C$.

因为$\angle E=\angle E$，所以$\triangle ABE$与$\triangle CAE$相似，因而$\dfrac{AB}{CA}=\dfrac{AE}{CE}$，$\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{AE^2}{EC^2}$.

提示：注意相似三角形的边对应

又因为$\triangle ABC$是直角三角形，$AD\perp BC$，所以$AB^2=BD\cdot BC$；$AC^2=CD\cdot BC$(直角三角形射影定理).

所以$\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{BD\cdot BC}{CD\cdot BC}=\dfrac{BD}{CD}$，因此$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AE^2}{EC^2}$.

点评 在解题中，我们只要发现有角相等或线段成比例的条件，都可以考虑运用相似三角形，通过三角形相似的性质和判定来解决问题.

例2 如图 1-1-13 所示，在直角三角形 ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$于点D，$DE\perp AC$于点E，$DF\perp BC$于点F，求证：$\dfrac{AC^3}{BC^3}=\dfrac{AE}{BF}$.

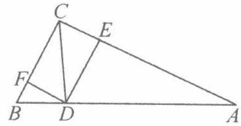


图 1-1-13

【分析】题目符合直角三角形射影定理的条件.

【证明】由直角三角形的射影定理：知$AC^2=AD\cdot AB$，$BC^2=BD\cdot AB$，

$AD^2=AE\cdot AC$，$BD^2=BF\cdot BC$；所以$\dfrac{AC^2}{BC^2}=\dfrac{AD}{BD}$.

所以$\dfrac{AC^4}{BC^4}=\dfrac{AD^2}{BD^2}=\dfrac{AE\cdot AC}{BF\cdot BC}$，因而得$\dfrac{AC^3}{BC^3}=\dfrac{AE}{BF}$.

点评 选择合适的直角三角形是解决问题的关键.

变题 在正方形 $ABCD$ 中，O为AB中点，E为AD上一点，且$AE=\dfrac{1}{4}AD$，$OK\perp EC$. 求证：$OK^2=KE\cdot KC$.

【分析】要证明线段的比例相等，由题中出现的直角三角形，运用直角三角形的射影定理解题.

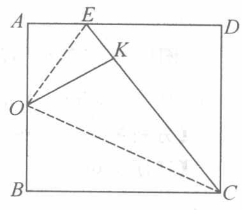


图 1-1-14

【证明】如图 1-1-14 所示，联结 OE，OC.

因为$AE=\dfrac{1}{4}AD$，$OA=OB=\dfrac{1}{2}AD$，$BC=AB=AD$，所以$\dfrac{AE}{OB}=\dfrac{OA}{BC}=\dfrac{1}{2}$.

又因为$\angle A=\angle B=90°$，所以三角形 EAO 与三角形 OBC 相似，得$\angle AEO=\angle BOC$.

因为$\angle AEO+\angle AOE=90°$，所以$\angle AOE+\angle BOC=90°$，又$\angle AOB=180°$，因而$\angle EOC=90°$.

在直角三角形 EOC 中，$OK\perp EC$，所以$OK^2=KE\cdot KC$(直角三角形射影定理).

【总结】

1. 直角三角形中的比例线段问题，往往与射影定理有联系.
2. 要充分根据结论的需要寻找(或构造)相似形，以求解决问题.
3. 用添加平行线的方法创造使用平行切割定理的条件或构造相似形.

易错清单

易错点

运用相似形解决有关线段成比例问题时，容易忽视它们的对应关系，从而导致解题错误.

例题 如图 1-1-15 所示，在$\triangle ABC$中，$DE \parallel BC$，已知$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{2}{3}$，$BC=6$，求 DE 的长.

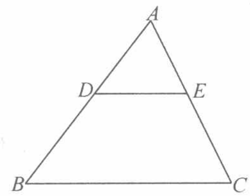


图 1-1-15

【分析】这是一道典型的利用相似形性质解题的题目，由于题中存在平行线，因此我们考虑利用相似三角形，然后由三角形相似性质，寻找到对应线段成比例而完成解题.

【错解】因为在$\triangle ABC$中，$DE \parallel BC$，所以$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{2}{3}$，因此有$DE=\dfrac{2}{3}BC=\dfrac{2}{3}\times 6=4$.

【正解】因为在$\triangle ABC$中，$DE \parallel BC$，所以$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{2}{2+3}=\dfrac{2}{5}$，因此有$DE=\dfrac{AD}{AB}\cdot BC=\dfrac{2}{5}\times 6=\dfrac{12}{5}$.

【提醒】在运用平行线利用三角形相似解决问题时，千万要注重相似形的对应线段、对应角、对应顶点，找准“对应”是我们解决问题的关键.

点击高考

(2008 · 山东)在$\triangle ABC$中，$\angle A=90^\circ$，$AB=4$，$AC=3$，M是AB上的动点(不与A,B重合)，过M点作$MN \parallel BC$交AC于点N. 以MN为直径作$\odot O$，并在$\odot O$内作内接矩形$AMPN$. 令$AM=x$.

(1)用含x的代数式表示$\triangle MNP$的面积S；

(2)当x为何值时，$\odot O$与直线BC相切?

(3)在动点M的运动过程中，记$\triangle MNP$与梯形$BCNM$重合的面积为y，试求y关于x的函数表达式，并求x为何值时，y的值最大，最大值是多少?

【点拨】由于题中存在平行线，可考虑利用相似三角形，结合点的运动特点解决问题.

【解析】(1)$\because MN \parallel BC$，$\therefore \angle AMN=\angle B$，$\angle ANM=\angle C$.

$\therefore \triangle AMN \backsim \triangle ABC$.

$\therefore \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}$，即$\dfrac{x}{4}=\dfrac{AN}{3}$.

$\therefore AN=\dfrac{3}{4}x$.

$\therefore S=S_{\triangle MNP}=S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}x\cdot x=\dfrac{3}{8}x^2\,(0<x<4)$.

(2)如图 1-1-16 所示，设直线 BC 与 $\odot O$ 相切于点 D，联结 AO，OD，则 $AO=OD=\dfrac{1}{2}MN$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=5$.

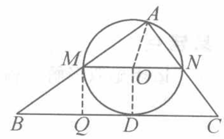


图 1-1-16

由(1)知 $\triangle AMN\backsim\triangle ABC$.

$\therefore \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{MN}{BC}$，即 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{MN}{5}$.

$\therefore MN=\dfrac{5}{4}x$.

$\therefore OD=\dfrac{5}{8}x$.

过 M 点作 $MQ\perp BC$ 于 Q，则 $MQ=OD=\dfrac{5}{8}x$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BMQ$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle BCA$ 中，$\angle B$ 是公共角，

$\therefore \triangle BMQ\backsim\triangle BCA$.

$\therefore \dfrac{BM}{BC}=\dfrac{QM}{AC}$.

$\therefore BM=\dfrac{5\times\dfrac{5}{8}x}{3}=\dfrac{25}{24}x$，$AB=BM+MA=\dfrac{25}{24}x+x=4$.

$\therefore x=\dfrac{96}{49}$.

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{96}{49}$ 时，$\odot O$ 与直线 BC 相切.

(3)随着点 M 的运动，当 P 点落在直线 BC 上时，联结 AP，则 O 点为 AP 的中点，如图 1-1-17 所示.

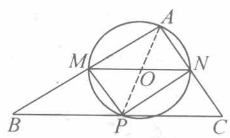


图 1-1-17

$\because MN\parallel BC$，$\therefore \angle AMN=\angle B$，$\angle AOM=\angle APB$.

$\therefore \triangle AMO\backsim\triangle ABP$.

$\therefore \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AO}{AP}=\dfrac{1}{2}$，$AM=MB=2$.

故以下分两种情况讨论：

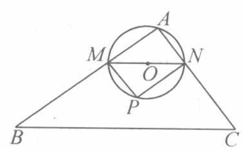


图 1-1-18

①当 $0<x\leqslant 2$ 时，如图 1-1-18 所示，$y=S_{\triangle PMN}=\dfrac{3}{8}x^2$.

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，$y_{\max}=\dfrac{3}{8}\times 2^2=\dfrac{3}{2}$.

②当 $2<x<4$ 时，设 PM，PN 分别交 BC 于 E，F，如图 1-1-19 所示.

$\because$ 四边形 $AMPN$ 是矩形，$\therefore PN\parallel AM$，$PN=AM=x$.

又 $\because MN\parallel BC$，$\therefore$ 四边形 $MBFN$ 是平行四边形.

$\therefore FN=BM=4-x$.

$\therefore PF=x-(4-x)=2x-4$.

又$\because \triangle PEF \backsim \triangle ACB$，$\therefore \left(\dfrac{PF}{AB}\right)^2=\dfrac{S_{\triangle PEF}}{S_{\triangle ABC}}$.

$\therefore S_{\triangle PEF}=\dfrac{3}{2}(x-2)^2$.

$y=S_{\triangle MNP}-S_{\triangle PEF}=\dfrac{3}{8}x^2-\dfrac{3}{2}(x-2)^2=-\dfrac{9}{8}x^2+6x-6$.

当 $2<x<4$ 时，$y=-\dfrac{9}{8}x^2+6x-6=-\dfrac{9}{8}\left(x-\dfrac{8}{3}\right)^2+2$.

$\therefore$当 $x=\dfrac{8}{3}$ 时，满足 $2<x<4$，$y_{\max}=2$.

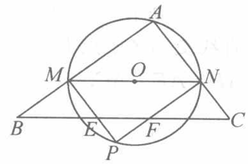


图 1-1-19

模拟演练

1. 两个相似三角形对应边的比为 6，则它们周长的比为______.

2. 点 D，E 分别在$\triangle ABC$ 的边 AB，AC 上，且$\angle AED=\angle ABC$，若 $DE=3$，$BC=6$，$AB=8$，则 AE 的长为______.

3. 如图 1-1-20 所示，CD 为 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边上的高，$AC:BC=3:2$，如果 $S_{\triangle ADC}=9$，那么 $S_{\triangle BDC}$ 等于（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

4. 如图 1-1-21 所示，E 为 DC 边的中点，AE 交 BD 于点 O，若 $S_{\triangle DOE}=9$，则 $S_{\triangle AOB}$ 等于（　　）

A. 18　　B. 27　　C. 36　　D. 45

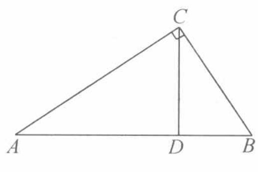


图 1-1-20

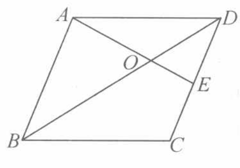


图 1-1-21

5. 如图 1-1-22 所示，P 是等边$\triangle ABC$ 的边 CB 延长线上的点，Q 是 BC 延长线上的点，$\angle PAQ=120°$，试证明 $BC^2=PB\cdot CQ$.

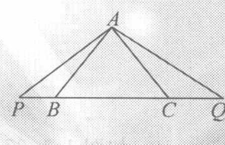


图 1-1-22

6. 如图 1-1-23，在△ABC 中，作直线 DN 平行于中线 AM，设这条直线交 AB 于点 D，交 CA 的延长线于点 E，交 BC 于点 N. 求证：$AD:AB=AE:AC$.

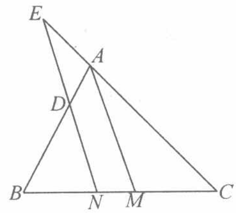


图 1-1-23

7. 如图 1-1-24 所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E,F,G 四等分 BD，联结 AE 并延长至 BC 交于点 H，联结 HG 并延长交 AD 于点 K，求 $AD:DK$ 的值.

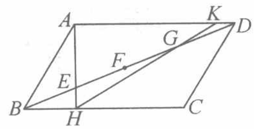


图 1-1-24

8. 如图 1-1-25 所示，在梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，对角线 AC,BD 交于点 O，过点 O 的直线 $MN/\!/BC$，分别交 AB,CD 于点 M,N. 求证：$\frac{2}{MN}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC}$.

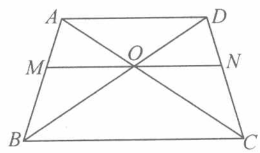


图 1-1-25

9. 如图 1-1-26 所示，E,F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 AB 和 AD 上的点，且 $\frac{EB}{AB}=\frac{AF}{AD}=\frac{1}{3}$. 求证：$\angle AEF=\angle FBD$.

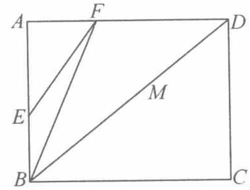


图 1-1-26

10. 如图 1-1-27 所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC,BD 交于点 O，在 BC 上取点 E，使 $EC=\frac{1}{4}BC$，DE 交 AC 于点 F，求 $AO:OF:FC$.

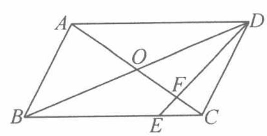


图 1-1-27