抽象代数 II

——结合代数

孟道骥　王立云
史毅茜　徐丽媛　编著

科学出版社

内 容 简 介

抽象代数 I 是南开大学数学专业的必修课，抽象代数 II 是该专业本科生的选修课和研究生的必修课，结合代数是应用非常广泛的一种代数结构，将这些内容作为该课程的内容是非常合适的. 本书是作者在长期教授该课程的基础上编写而成，内容包括结合代数，张量积、张量代数，二次型、Clifford 代数，群代数及其表示，某些非结合代数.

本书力求深入浅出，循序渐进，特别注意与其他课程的联系，以使读者体会到“抽象代数是制造机器的机器”这一著名论述，更能体会到“玄之又玄,众妙之门”这样的哲理.

本书可作为高等院校数学专业本科及理工科非代数方向研究生“抽象代数”课程的教材，也可供相关科技人员及大专院校师生自学参考.

图书在版编目(CIP)数据

抽象代数. II，结合代数/孟道骥等编著. —北京：科学出版社，2011

ISBN 978-7-03-030354-7

I. 抽… II. 孟… III. ①抽象代数-高等学校-教材 ②结合代数-高等学校-教材 IV. O153

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 027537 号

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 4 月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)
2011 年 4 月第一次印刷 印张：11 1/4
印数：1—3 500 字数：220 000

定价：25.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

在初等数学中, 几何学比较直观, 而代数学比较抽象. 高度的抽象性是现代数学的一个重要特点. 在抽象代数中, 这个特点尤为突出, 因而代数成了数学的第一个抽象分支. 这是因为从一开始, 代数就是用符号 (当然包括字母) 代表数或其他更复杂的"量". 抽象代数就更为抽象, 只有符号之间的运算法则和相互关系是有意义的, 符号代表什么并不重要, 或者符号不代表任何东西. 虽然从逻辑上可以用公理化的手段构造许许多多的代数体系, 但如此构造代数体系并不总是有意义、有价值的. 其实, 有意义、有价值的代数体系很多是从解决某些问题抽象出来的, 因而有人说 "代数是解决某类问题的机器, 而抽象代数是制造机器的机器."①

《抽象代数 I—— 代数学基础》所讲述的只能是抽象代数中最基本的内容：群、环、域、模和 Galois 理论等. 这些内容无论是对代数学, 还是数学乃至许多其他学科都越来越不够了. 抽象代数继续下去可以选择的内容是多种多样的. 结合代数、线性空间及其线性变换的张量积、二次型及其产生的结合代数等不仅是代数学本身的基本、重要的内容, 而且和许多学科都有紧密的联系, 也有广泛的应用. 除结合代数外, 还有许多非结合代数, 无论从理论角度, 还是应用角度都是很有价值的.

《抽象代数 II—— 结合代数》以结合代数为主兼及部分非结合代数内容. 本书分为 5 章. 第 1 章介绍结合代数, 其中包括结合代数的定义、同态与同构、结合代数的表示 (或结合代数的模)、幂零结合代数、幂等元与 Peirce 分解、半单结合代数、单结合代数、体上的线性空间、半单结合代数的模等基本内容. 第 2 章介绍张量积与张量代数, 其中包括线性空间的张量积、线性变换的张量积、张量与张量代数、对称张量与交错张量、对称代数和外代数等有广泛应用的内容. 此外还有结合代数的张量积, 特别是中心单结合代数的张量积的性质. 第 3 章介绍二次型与 Clifford 代数, 其中包括二次型、正交群、四元数代数、Clifford 代数、Clifford 群与旋量群等内容. 第 4 章介绍群代数及其表示, 其中包括群代数的定义与基本性质、群表示的特征标、复数域上群代数的中心、对称群的表示、群表示的张量积、$p^a q^b$ 阶群的可解性等内容. 由于这 4 部分领域的重要性, 它们在很长时期内都是研究的热门话题, 因此, 内容非常丰富, 不是本书能够包含得了的. 非结合代数不仅在数学、物理中有重要作用, 而且与结合代数也有密切的关系. 本书最后一章简单地介绍了几类非结合代数, 这里有一般代数及其导子的定义、Lie 代数的包络代数、交错代数、Jordan 代数、左对称代数与 Novikov 代数. 这些只是我们在学习和研究过程中接触到的非结合代数的大冰山的一个小角而已.

---

① M. Atiyah, Trends in Pure Mathematics, 3rd ICME Proc., 1977.

通过对本课程的学习, 学生首先要掌握基本内容, 也就是认识 “机器”; 其次是为应用这些内容解决可能遇到的问题奠定基础, 也就是学会使用 “机器”; 也许更为重要的是通过学习提高抽象的能力, 也就是提高制造 “机器” 的能力.

《道德经》中有句话: “玄之又玄, 众妙之门.” 也许抽象代数本身就是此话的一种诠释, 希望本课程也能为诠释此话提供一个例证.

我们衷心地感谢白承铭、许斌老师和袁腊梅博士给予的帮助. 当然帮助过我们的老师和同学还有很多, 不能全部列出, 在此一并致谢. 同时要感谢中国科学技术大学数学系、南开大学数学学院和白城师范学院数学系对我们工作的大力支持, 没有这些支持要写出本书是不可能的.

我们在本课程的教学以及本书的编写过程中尽了很大努力, 但一则由于我们的水平所限, 二则由于数学和数学的教学总是在不断的发展之中, 因此, 不足和纰漏之处在所难免, 诚恳地希望大家不吝指正.

作　者

2010 年 10 月于中国科学技术大学

目　　录

第1章　结 合 代 数

结合代数是代数学中一个基本的, 也是重要的研究对象, 同时结合代数也是数学及其在其他学科中应用的一个有力工具. 其实, 中学数学中关于多项式的内容、大学本科数学中关于线性空间的线性变换及其对应的方阵、可微函数等这些早已熟知的对象都是结合代数.

本章介绍结合代数的抽象定义与一些基本的概念、结合代数的同态、幂零结合代数、半单结合代数、单结合代数和半单结合代数的模.

在本书中, 分别以 $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 表示自然数集、整数环、有理数域、实数域和复数域.

"iff" 则如许多数学著作中习惯地表示 "if and only if", 即 "当且仅当" 之意.

1.1　结合代数的定义

本节给出结合代数的定义与一些例子, 同时还介绍一些最基本的概念.

定义 1.1.1　设 $\mathcal{R}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间, 又在 $\mathcal{R}$ 中定义了乘法运算: $(\alpha,\beta)\to\alpha\beta$, 满足公理

$$\begin{cases}\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma,\\(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma,\\(k\alpha)\beta=\alpha(k\beta)=k(\alpha\beta),\\\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma,\end{cases}\qquad\forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathcal{R},\ k\in\mathbf{F},\tag{1.1.1}$$

则称 $\mathcal{R}$ 为 $\mathbf{F}$ 上一个**结合代数**.

如果结合代数 $\mathcal{R}$ 还满足 $\forall\alpha,\beta\in\mathcal{R}$, $\alpha\beta=\beta\alpha$, 则称 $\mathcal{R}$ 为**交换的**; 否则, 称之为**非交换的**.

公理 (1.1.1) 也就是说 $\mathcal{R}$ 中的乘法是双线性的、结合的.

公理 (1.1.1) 也可以说 $\mathcal{R}$ 对于加法与乘法是一个环, $\mathcal{R}$ 的乘法以及 $\mathcal{R}$ 与 $\mathbf{F}$ 的乘法 (数乘) 之间满足 $\forall k\in\mathbf{F},\alpha,\beta\in\mathcal{R}$, $(k\alpha)\beta=\alpha(k\beta)=k(\alpha\beta)$.

例 1.1.1　域 $\mathbf{F}$ 上线性空间 V 的线性变换的集合 $\mathrm{End}V$ 对线性变换的加法、乘法及线性变换与域中元素的乘法是 $\mathbf{F}$ 上的结合代数.

当 $\dim V>1$ 时, $\mathrm{End}V$ 是非交换的; 当 $\dim V=1$ 时, $\mathrm{End}V$ 是交换的.

例 1.1.2　$\mathbf{F}^{n\times n}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的 n 阶方阵的集合. 对方阵的加法、方阵与 $\mathbf{F}$ 中元素的乘法、方阵与方阵的乘法 $\mathbf{F}^{n\times n}$ 是 $\mathbf{F}$ 上 n^2 维结合代数. 当 $n>1$ 时, $\mathbf{F}^{n\times n}$ 是非交换的; 当 $n=1$ 时, $\mathbf{F}^{n\times n}$ 是交换的.

例 1.1.3　域 $\mathbf{F}$ 上 n 元多项式集 $\mathbf{F}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 对多项式的加法、乘法 (包括多项式与 $\mathbf{F}$ 中元素的乘法) 是 $\mathbf{F}$ 上无限维的交换结合代数. 当然一元多项式集 $\mathbf{F}[x]$ 也是 $\mathbf{F}$ 上无限维的交换结合代数.

定义 1.1.2　设 $\mathcal{R}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的 n 维结合代数, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 $\mathcal{R}$ 的一组基, 于是有

$$\alpha_i\alpha_j = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k \alpha_k, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n. \tag{1.1.2}$$

称 $\{C_{ij}^k | 1 \leqslant i, j, k \leqslant n\}$ 为 $\mathcal{R}$ 对于基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的**结构常数**.

定理 1.1.1　域 $\mathbf{F}$ 中 n^3 个元素 $\{C_{ij}^k | 1 \leqslant i, j, k \leqslant n\}$ 是 $\mathbf{F}$ 上一个 n 维结合代数的结构常数当且仅当它们满足

$$\sum_{t=1}^{n} C_{ij}^t C_{tk}^l = \sum_{t=1}^{n} C_{it}^l C_{jk}^t, \quad 1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n. \tag{1.1.3}$$

证　设 $\{C_{ij}^k | 1 \leqslant i, j, k \leqslant n\}$ 为 $\mathcal{R}$ 对于基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的结构常数, 于是由

$$(\alpha_i\alpha_j)\alpha_k = \alpha_i(\alpha_j\alpha_k)$$

可得

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} C_{ij}^t C_{tk}^l \alpha_l = \sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} C_{it}^l C_{jk}^t \alpha_l, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

因而 (1.1.3) 成立.

反之, 设 $\{C_{ij}^k | 1 \leqslant i, j, k \leqslant n\}$ 满足 (1.1.3). 又设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 $\mathbf{F}$ 上 n 维线性空间 $\mathcal{R}$ 的基. 设 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\alpha_i$, $\beta = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j\alpha_j \in \mathcal{R}$, 定义 α 与 β 的积为

$$\alpha\beta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_i y_j C_{ij}^k \alpha_k,$$

则经过直接运算, 可验证 $\mathcal{R}$ 对此乘法为结合代数, 并且关于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的结构常数恰为 $\{C_{ij}^k | 1 \leqslant i, j, k \leqslant n\}$. ∎

定义 1.1.3　结合代数 $\mathcal{R}$ 中的元素 e 称为 $\mathcal{R}$ 的**幺元或主幺元**, 如果 $\forall \alpha \in \mathcal{R}$, $e\alpha = \alpha e = \alpha$.

定义 1.1.4　域 $\mathbf{F}$ 上的结合代数 $\mathcal{R}$ 的子空间 $\mathcal{R}_1$ 若满足

$$\alpha\beta \in \mathcal{R}_1, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}_1, \tag{1.1.4}$$

$$\alpha\beta \in \mathcal{R}_1, \quad \forall \alpha \in \mathcal{R}, \forall \beta \in \mathcal{R}_1, \tag{1.1.5}$$

$$\alpha\beta \in \mathcal{R}_1, \quad \forall \alpha \in \mathcal{R}_1, \forall \beta \in \mathcal{R}, \tag{1.1.6}$$

$$\alpha\beta, \beta\alpha \in \mathcal{R}_1, \quad \forall \alpha \in \mathcal{R}_1, \forall \beta \in \mathcal{R}, \tag{1.1.7}$$

则称 $\mathcal{R}_1$ 分别为 $\mathcal{R}$ 的**子代数**、**左理想**、**右理想**、**双边理想(理想)**.

显然, 作为环, $\mathcal{R}_1$ 也分别是环 $\mathcal{R}$ 的子环、左理想、右理想、理想. 此外, $\mathcal{R}$, $\{0\}$ 是 $\mathcal{R}$ 的理想, 称为**平凡理想**.

设 S_1, S_2 为结合代数 $\mathcal{R}$ 的子空间, 以 S_1S_2 表示由 $\{\alpha_1\alpha_2|\alpha_i \in S_i\}$ 生成的子空间, 则 (1.1.4)~(1.1.7) 可改记为

$$\mathcal{R}_1\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_1, \tag{1.1.8}$$

$$\mathcal{R}\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_1, \tag{1.1.9}$$

$$\mathcal{R}_1\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_1, \tag{1.1.10}$$

$$\mathcal{R}_1\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_1, \quad \mathcal{R}\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_1. \tag{1.1.11}$$

例 1.1.4 设 $\mathbf{F}$ 为域, 在 $\mathbf{F}^{n\times n}$ $(n > 2)$ 中分别令

$$L_i = \{A \in \mathbf{F}^{n\times n}|\mathrm{col}_j A = 0,\ j \neq i\},$$

$$R_i = \{A \in \mathbf{F}^{n\times n}|\mathrm{row}_j A = 0,\ j \neq i\},$$

则 L_i, R_i 分别为 $\mathbf{F}^{n\times n}$ 的左理想、右理想, 但不是理想.

例 1.1.5 设 $\mathbf{F}$ 为域, $f(x) \in \mathbf{F}[x]$, 则 $\{f(x)g(x)|g(x) \in \mathbf{F}[x]\}$ 是 $\mathbf{F}[x]$ 的理想.

定义 1.1.5 设 $\mathcal{R}$ 是一个结合代数, $\mathcal{R}$ 的子空间

$$C(\mathcal{R}) = \{\gamma|\gamma\alpha = \alpha\gamma, \forall\alpha \in \mathcal{R}\},$$

$$\mathrm{ann}(\mathcal{R}) = \{\gamma|\gamma\alpha = \alpha\gamma = 0, \forall\alpha \in \mathcal{R}\}$$

分别称为 $\mathcal{R}$ 的**中心**和**零化子**.

显然, $C(\mathcal{R})$ 是 $\mathcal{R}$ 的子代数, $\mathrm{ann}(\mathcal{R})$ 是 $\mathcal{R}$ 的理想.

定理 1.1.2 设 $\mathcal{R}_1$ 是域 $\mathbf{F}$ 上结合代数 $\mathcal{R}$ 的理想, 于是 $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ 既是 $\mathbf{F}$ 上的线性空间, 又是环. 此时 $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ 是 $\mathbf{F}$ 上的结合代数, 称为 $\mathcal{R}$ 对 $\mathcal{R}_1$ 的**商代数**.

证 设 π 为线性空间 $\mathcal{R}$ 到线性空间 $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ 的自然映射, 于是 $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1 = \{\pi(\alpha)|\alpha \in \mathcal{R}\}$. 再注意到 $k(\pi(\alpha)\pi(\beta)) = \pi(k\alpha\beta) = (k\pi(\alpha))\pi(\beta) = \pi(\alpha)(k\pi(\beta))$. 因此, $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ 是 $\mathbf{F}$ 上的结合代数. ∎

定义 1.1.6 设 $\mathcal{R}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的结合代数, $\mathcal{R}_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 $\mathcal{R}$ 的理想, 又有线性空间的直和分解 $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \dot{+} \mathcal{R}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{R}_n$, 则称 $\mathcal{R}$ 为理想 $\mathcal{R}_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的**直和**, 并记为

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_n.$$

定义 1.1.7 若结合代数 $\mathcal{R}$ 可分解为两个非平凡理想的直和, 则称 $\mathcal{R}$ 为**可分解的**; 否则, 称 $\mathcal{R}$ 为**不可分解的**.

定理 1.1.3 设域 $\mathbf{F}$ 上的结合代数 $\mathcal{R}$ 是理想 $\mathcal{R}_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的直和, 则以下结论成立:

1) $i \neq j$ 时, $\mathcal{R}_i\mathcal{R}_j = \{0\}$;

2) $C(\mathcal{R}) = C(\mathcal{R}_1) \oplus C(\mathcal{R}_2) \oplus \cdots \oplus C(\mathcal{R}_n)$;

3) $\mathrm{ann}(\mathcal{R}) = \mathrm{ann}(\mathcal{R}_1) \oplus \mathrm{ann}(\mathcal{R}_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{ann}(\mathcal{R}_n)$.

证　1) 因为 $\mathcal{R}_i\mathcal{R}_j \subseteq \mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j = \{0\}$, 所以结论 1) 成立.

2) 设 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \ (\alpha_i \in \mathcal{R}_i)$, $\gamma_i \in C(\mathcal{R}_i)$, 于是

$$\alpha\gamma_i = \alpha_i\gamma_i = \gamma_i\alpha_i = \gamma_i\alpha,$$

因而

$$C(\mathcal{R}) \supseteq C(\mathcal{R}_1) \oplus C(\mathcal{R}_2) \oplus \cdots \oplus C(\mathcal{R}_n).$$

反之, 设 $\gamma = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i \in C(\mathcal{R}) \ (\gamma_i \in \mathcal{R}_i)$, $\forall \alpha_i \in \mathcal{R}_i$ 有

$$\gamma_i\alpha_i = \gamma\alpha_i = \alpha_i\gamma = \alpha_i\gamma_i,$$

所以 $\gamma_i \in C(\mathcal{R}_i)$. 于是结论 2) 成立.

3) 设 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \ (\alpha_i \in \mathcal{R}_i)$, $\gamma_i \in \operatorname{ann}(\mathcal{R}_i)$, 于是

$$\alpha\gamma_i = \alpha_i\gamma_i = 0, \quad \gamma_i\alpha = \gamma_i\alpha_i = 0,$$

因而

$$\operatorname{ann}(\mathcal{R}) \supseteq \operatorname{ann}(\mathcal{R}_1) \oplus \operatorname{ann}(\mathcal{R}_2) \oplus \cdots \oplus \operatorname{ann}(\mathcal{R}_n).$$

反之, 设 $\gamma = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i \in \operatorname{ann}(\mathcal{R}) \ (\gamma_i \in \mathcal{R}_i)$, $\forall \alpha_i \in \mathcal{R}_i$ 有

$$\gamma_i\alpha_i = \gamma\alpha_i = 0, \quad \alpha_i\gamma_i = \alpha_i\gamma = 0,$$

所以 $\gamma_i \in \operatorname{ann}(\mathcal{R}_i)$. 于是结论 3) 成立. ∎

习　题　1.1

1. 设 $\mathcal{H}$ 是一个体且域 $\mathbf{F} \subseteq \mathcal{H}$, 证明 $\mathcal{H}$ 是 $\mathbf{F}$ 上的结合代数当且仅当 $\mathbf{F} \subseteq C(\mathcal{H})$.

2. 求实数域 $\mathbf{R}$ 上的四元数体 $\mathbf{H}$ 的一组结构常数.

3. 设 $\mathcal{H}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的 4 维结合代数, 证明 $\mathcal{H}$ 是体的充分必要条件是方程

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 0$$

在域 $\mathbf{F}$ 中只有零解: $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

4. 结合代数 $\mathcal{R}$ 称为**零代数**, 如果 $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}$, $\alpha\beta = 0$. 证明零代数的任何子空间都是理想. 逆命题是否成立?

5. 设 $\mathcal{R}$ 是 $\mathbf{F}$ 上的结合代数且为体, $\mathcal{R}_1$ 是 $\mathcal{R}$ 的子代数. 证明 $\dim \mathcal{R}_1 | \dim \mathcal{R}$.

6. 设域 $\mathbf{F}$ 的特征不为 2, $\mathcal{R}$ 是 $\mathbf{F}$ 上的二维结合代数, 并且 e 为 $\mathcal{R}$ 的幺元. 证明 $\mathcal{R}$ 或者是域, 或者有基 e, α, 满足 $\alpha^2 = \alpha$ 或 $\alpha^2 = 0$. 此时 $\mathcal{R}$ 是交换结合代数.

7. 设结合代数 $\mathcal{R}$ 有理想直和分解 $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2$. 又 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{R}$ 的子代数且 $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{R}_1$, 证明 $\mathcal{S} = \mathcal{R}_1 \oplus (\mathcal{S} \cap \mathcal{R}_2)$.

8. 设结合代数 $\mathcal{R}$ 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的结构常数为 $\{C_{ij}^k | 1 \leqslant i, j, k \leqslant n\}$. 那么 $\mathcal{R}$ 关于基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的结构常数是什么?

1.2 同态与同构

同态是将同一域上的结合代数进行比较. 在比较中发现本质上相同的结合代数, 这就是所谓的分类. 在比较中也建立结合代数的理想和商代数的关系. 如果将抽象的结合代数与具体的 (方) 矩阵代数或线性变换的代数进行比较, 就有了结合代数的表示. 这也是将结合代数理论用于其他学科的基本方式.

特别地, 在本节中还给出了零化子为零的结合代数的分解的唯一性.

定义 1.2.1 设 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的结合代数, f: $\mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ 为线性映射 (线性同构), 又若

$$f(\alpha\beta) = f(\alpha)f(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}_1, \tag{1.2.1}$$

则称 f 为 $\mathcal{R}_1$ 到 $\mathcal{R}_2$ 的**同态**(**同构**).

若 $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}$, 则此时 f 称为 $\mathcal{R}$ 的**自同态**(**自同构**).

所谓结合代数的同态、同构就是保持乘法运算的线性空间的同态、同构.

结合代数 $\mathcal{R}$ 的所有自同构构成一个群, 称之为**自同构群**, 记为 $\mathrm{Aut}\mathcal{R}$.

例 1.2.1 若 V 是 $\mathbf{F}$ 上 n 维线性空间, 则结合代数 $\mathrm{End}V$ 与 $\mathbf{F}^{n\times n}$ 同构.

在 V 中取基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$. 以 $\mathrm{crd}(v; e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 表示 $v(\in V)$ 在此基下的坐标; $M(\alpha; e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 表示 $\alpha(\in \mathrm{End}V)$ 在此基下的矩阵, 则 $\alpha \to M(\alpha; e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 $\mathrm{End}V$ 到 $\mathbf{F}^{n\times n}$ 的线性同构映射. 再由

$$\begin{aligned}
\mathrm{col}_j M(\alpha\beta; e_1, e_2, \cdots, e_n) &= \mathrm{crd}((\alpha\beta)(e_j); e_1, e_2, \cdots, e_n) \\
&= M(\alpha; e_1, e_2, \cdots, e_n)\mathrm{crd}(\beta(e_j); e_1, e_2, \cdots, e_n) \\
&= M(\alpha; e_1, e_2, \cdots, e_n)\mathrm{col}_j M(\beta; e_1, e_2, \cdots, e_n) \\
&= \mathrm{col}_j (M(\alpha; e_1, e_2, \cdots, e_n)M(\beta; e_1, e_2, \cdots, e_n))
\end{aligned}$$

知 $M(\alpha\beta; e_1, e_2, \cdots, e_n) = M(\alpha; e_1, e_2, \cdots, e_n)M(\beta; e_1, e_2, \cdots, e_n)$, 故结论成立. ∎

例 1.2.2 设 $\mathcal{R}_1$ 是域 $\mathbf{F}$ 上结合代数 $\mathcal{R}$ 的理想, π 是 $\mathcal{R}$ 到商代数 $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ 的自然映射, 则由定理 1.1.2 的证明知, π 是结合代数的同态.

结合代数的自同态集对映射的乘法是一个幺半群, 但不是结合代数.

定义 1.2.2 设 f 是结合代数 $\mathcal{R}_1$ 到结合代数 $\mathcal{R}_2$ 的同态, 称

$$\ker f = \{\alpha \in \mathcal{R}_1 | f(\alpha) = 0\}$$

为 f 的**核**.

定理 1.2.1 设 f 是结合代数 $\mathcal{R}_1$ 到结合代数 $\mathcal{R}_2$ 的同态, 则有以下结论:

1) $f(\mathcal{R}_1)$ 是 $\mathcal{R}_2$ 的子代数;

2) $\ker f$ 是 $\mathcal{R}_1$ 的理想, 并且 $\mathcal{R}_1/\ker f$ 与 $f(\mathcal{R}_1)$ 同构;

3) $f(\mathcal{R}_1)$ 中的子代数、左理想、右理想及理想与 $\mathcal{R}_1$ 中的包含 $\ker f$ 的子代数、左理想、右理想及理想有一一对应关系.

证　1) 因为 f 是线性的, 于是 $f(\mathcal{R}_1)$ 是 $\mathcal{R}_2$ 的线性子空间. 又 $f(\alpha), f(\beta) \in f(\mathcal{R}_1)$, 则 $f(\alpha)f(\beta) = f(\alpha\beta) \in f(\mathcal{R}_1)$, 所以 $f(\mathcal{R}_1)$ 是 $\mathcal{R}_2$ 的子代数.

2) 因为 f 是线性的, 于是 $\ker f$ 是 $\mathcal{R}_1$ 的线性子空间. 又 $\alpha \in \ker f$, $\beta \in \mathcal{R}_1$, 则 $f(\alpha\beta) = f(\alpha)f(\beta) = 0$, $f(\beta\alpha) = f(\beta)f(\alpha) = 0$, 故 $\alpha\beta, \beta\alpha \in \ker f$, 所以 $\ker f$ 是 $\mathcal{R}_1$ 的理想.

设 π 是结合代数 $\mathcal{R}_1$ 到商代数 $\mathcal{R}_1/\ker f$ 的自然同态, π 自然是线性映射, 于是有 $\mathcal{R}_1/\ker f$ 到 $f(\mathcal{R}_1)$ 的线性同构 $\bar{f}$ 满足 $\bar{f}\pi = f$, 因而

$$\bar{f}(\pi(\alpha)\pi(\beta)) = \bar{f}(\pi(\alpha\beta)) = f(\alpha\beta) = \bar{f}(\pi(\alpha))\bar{f}(\pi(\beta)), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}_1.$$

因此, $\mathcal{R}_1/\ker f$ 与 $f(\mathcal{R}_1)$ 同构.

3) 注意: f 是 $\mathcal{R}_1$ 中包含 $\ker f$ 的子空间与 $f(\mathcal{R}_1)$ 的子空间之间的一一对应. 若 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{R}_1$ 的子代数 (左理想、右理想、理想), 则容易证明 $f(\mathcal{H})$ 是 $f(\mathcal{R}_1)$ 的子代数 (左理想、右理想、理想). 设 $\mathcal{H}_2$ 是 $f(\mathcal{R}_1)$ 的子代数 (左理想、右理想、理想), 于是

$$\mathcal{H} = f^{-1}(\mathcal{H}_2) = \{\alpha \in \mathcal{R}_1 | f(\alpha) \in \mathcal{H}_2\} \supseteq \ker f.$$

由 $f(\alpha)f(\beta) = f(\alpha\beta)$ 可得 $f^{-1}(\mathcal{H}_2)$ 是 $\mathcal{R}_1$ 的子代数 (左理想、右理想、理想). ∎

定义 1.2.3　如果结合代数 $\mathcal{R}$ 的自同态 φ 满足

$$\varphi(\alpha\beta) = \alpha\varphi(\beta) = \varphi(\alpha)\beta, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}, \tag{1.2.2}$$

则称 φ 为 $\mathcal{R}$ 的 **$\mathcal{R}$ 自同态**.

显然, 若 φ_1, φ_2 是 $\mathcal{R}$ 的 $\mathcal{R}$ 自同态, 则 $\varphi_1\varphi_2$ 是 $\mathcal{R}$ 的 $\mathcal{R}$ 自同态. 若 φ 是 $\mathcal{R}$ 的 $\mathcal{R}$ 自同构, 则 φ^{-1} 是 $\mathcal{R}$ 的 $\mathcal{R}$ 自同构.

例 1.2.3　设结合代数 $\mathcal{R}$ 有理想直和分解 $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2$, 又对此分解, $\mathcal{R}$ 到 $\mathcal{R}_i$ 的投影为 π_i, 则 π_i 是 $\mathcal{R}$ 的 $\mathcal{R}$ 自同态.

事实上, 对任何 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$, α_i, $\beta_i \in \mathcal{R}_i$ $(i = 1, 2)$ 有

$$\pi_i(\alpha\beta) = \alpha_i\beta_i = \pi_i(\alpha)\pi_i(\beta) = \pi_i(\alpha)\beta = \alpha\pi_i(\beta).$$

注意: π_i 在 $\mathcal{R}_i$ 上的限制就是 $\mathcal{R}_i$ 到 $\mathcal{R}$ 的嵌入映射.

引理 1.2.1　设 φ 是有限维结合代数 $\mathcal{R}$ 的 $\mathcal{R}$ 自同态, 则存在 $k \in \mathbf{N}$, 使得

1) $\mathcal{R}$ 有理想直和分解

$$\mathcal{R} = \ker \varphi^k \oplus \mathrm{Im}\varphi^k, \tag{1.2.3}$$

其中 $\mathrm{Im}\varphi^k = \{\varphi^k(\alpha) | \alpha \in \mathcal{R}\}$;

2) 若 $\mathcal{R}$ 是不可分解的, 则有

$$\varphi^k = 0 \quad 或 \quad \varphi \in \mathrm{Aut}\mathcal{R}. \tag{1.2.4}$$

证 1) 记 φ 的极小多项式为 $f(\lambda)=\lambda^k g(\lambda)$, 其中 λ 与 $g(\lambda)$ 互素, 于是存在多项式 $u(\lambda)$, $v(\lambda)$, 使得 $u(\lambda)g(\lambda)+v(\lambda)\lambda^k=1$. 因此,

$$\beta=u(\varphi)g(\varphi)\beta+v(\varphi)\varphi^k\beta,\quad \forall\,\beta\in\mathcal{R},$$

并且

$$\begin{aligned}&\varphi^k(u(\varphi)g(\varphi)\beta)=u(\varphi)\varphi^k g(\varphi)\beta=u(\varphi)f(\varphi)\beta=0,\\&v(\varphi)\varphi^k\beta=\varphi^k(v(\varphi)\beta),\end{aligned}$$

所以 $u(\varphi)g(\varphi)\beta\in\ker\varphi^k$, $v(\varphi)\varphi^k\beta\in\mathrm{Im}\varphi^k$. 这样就得到 $\mathcal{R}=\ker\varphi^k+\mathrm{Im}\varphi^k$. 如果 $\beta\in\ker\varphi^k\cap\mathrm{Im}\varphi^k$, 则有 $\beta_0\in\mathcal{R}$, 使得 $\varphi^k\beta=0$, $\beta=\varphi^k\beta_0$, 所以

$$\beta=u(\varphi)g(\varphi)\varphi^k\beta_0+v(\varphi)\varphi^k\beta=u(\varphi)f(\varphi)\beta_0=0.$$

因此, $\mathcal{R}=\ker\varphi^k\dot{+}\mathrm{Im}\varphi^k$.

由 φ 是 $\mathcal{R}$ 的 $\mathcal{R}$ 自同态知 φ^k 也是 $\mathcal{R}$ 的 $\mathcal{R}$ 自同态. 由此可知 $\ker\varphi^k$ 是 $\mathcal{R}$ 的理想. 现证 $\mathrm{Im}\varphi^k$ 为 $\mathcal{R}$ 的理想. 设 $\beta\in\mathrm{Im}\varphi^k$, 则有 $\beta_0\in\mathcal{R}$, 使得 $\beta=\varphi^k(\beta_0)$. 于是对任何 $\alpha\in\mathcal{R}$ 有

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=\alpha\varphi^k(\beta_0)=\varphi^k(\alpha\beta_0)\in\mathrm{Im}\varphi^k,\\ \beta\alpha&=\varphi^k(\beta_0)\alpha=\varphi^k(\beta_0\alpha)\in\mathrm{Im}\varphi^k.\end{aligned}$$

至此, 完成了 1) 的证明.

2) 如果 $\mathcal{R}$ 是不可分解的, 则由 1) 知 $\ker\varphi^k=\mathcal{R}$ 或 $\mathrm{Im}\varphi^k=\mathcal{R}$. 前者意味着 $\varphi^k=0$, 后者意味着 $\varphi^k\in\mathrm{Aut}\mathcal{R}$, 所以 $\varphi\in\mathrm{Aut}\mathcal{R}$. ∎

引理 1.2.2 设 $\mathcal{R}$ 是不可分解的结合代数, 又 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{j}\varphi_i$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 都是 $\mathcal{R}$ 的 $\mathcal{R}$ 自同态, 并且 $\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n=\mathrm{id}$, 则有 i, 使得 $\varphi_i\in\mathrm{Aut}\mathcal{R}$.

证 对 n 用归纳法来证明. 当 $n=1$ 时是显然的. 当 $n=2$ 时, 因 $\varphi_1+\varphi_2=\mathrm{id}$, 故 $\varphi_1(\varphi_1+\varphi_2)=(\varphi_1+\varphi_2)\varphi_1$, 于是 $\varphi_1\varphi_2=\varphi_2\varphi_1$. 现在假设 $\varphi_1,\varphi_2\notin\mathrm{Aut}\mathcal{R}$. 由于 $\mathcal{R}$ 不可分解及引理 1.2.1, 于是有 k_i $(i=1,2)$, 使得 $\varphi_i^{k_i}=0$. 取 $k>k_1+k_2$, 则

$$\mathrm{id}=(\varphi_1+\varphi_2)^k=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\varphi_1^{k-j}\varphi_2^j=0.$$

此矛盾推出 $\varphi_1\in\mathrm{Aut}\mathcal{R}$ 或 $\varphi_2\in\mathrm{Aut}\mathcal{R}$.

对于 $n>2$, 令 $\psi=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\varphi_i$, 故 ψ, φ_n 均是 $\mathcal{R}$ 的 $\mathcal{R}$ 自同态, 并且 $\psi+\varphi_n=\mathrm{id}$, 因而由对 $n=2$ 的讨论得 $\varphi_n\in\mathrm{Aut}\mathcal{R}$ 或 $\psi\in\mathrm{Aut}\mathcal{R}$. 在第一种情形下, 引理自然成立, 故假设 $\psi\in\mathrm{Aut}\mathcal{R}$. 显然, ψ^{-1}, $\varphi_1\psi^{-1}$, $\cdots$, $\varphi_{n-1}\psi^{-1}$ 也都是 $\mathcal{R}$ 的 $\mathcal{R}$ 自同态, 并且 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\varphi_i\psi^{-1}=\mathrm{id}$. 由归纳假设有 i, 使得 $\varphi_i\psi^{-1}\in\mathrm{Aut}\mathcal{R}$. 因此, $\varphi_i\in\mathrm{Aut}\mathcal{R}$. ∎

定理 1.2.2　设 $\mathcal{R}$ 是一结合代数且 $\mathrm{ann}\mathcal{R}=\{0\}$, 又设 $\mathcal{R}$ 有理想直和分解

1) $$\mathcal{R}=\mathcal{R}_1\oplus\mathcal{R}_2\oplus\cdots\oplus\mathcal{R}_m$$

与

2) $$\mathcal{R}=\mathcal{S}_1\oplus\mathcal{S}_2\oplus\cdots\oplus\mathcal{S}_n,$$

其中 $\mathcal{R}_1, \cdots, \mathcal{R}_m$ 和 $\mathcal{S}_1, \cdots, \mathcal{S}_n$ 都是不可分解的, 则 $m=n$, 并且如必要, 经重新排列后有 $\mathcal{R}_i=\mathcal{S}_i(i=1, 2, \cdots, m)$.

证　对 n 用归纳法来证明. $n=1$, 即 $\mathcal{R}$ 不可分解, 所以 $m=n=1$, $\mathcal{R}_1=\mathcal{S}_1=\mathcal{R}$.

现设 $n>1$, 自然也有 $m>1$. 对分解 1), 将 $\mathcal{R}$ 在 $\mathcal{R}_1$ 上的投影记为 π, 再将 $\mathcal{R}_1$ 到 $\mathcal{R}$ 内的嵌入记为 σ. 又记对分解 2), $\mathcal{R}$ 在 $\mathcal{S}_i$ 上的投影为 ρ_i, $\mathcal{S}_i$ 到 $\mathcal{R}$ 内的嵌入为 τ_i, 则 π, ρ_1, $\cdots$, ρ_n 及 $\sum\limits_{i=1}^{j}\rho_i$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 都是 $\mathcal{R}$ 的 $\mathcal{R}$ 自同态, 并且

$$\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_n=\mathrm{id}_{\mathcal{R}}.$$

设

$$\pi_i^*=\pi\tau_i=\pi|_{\mathcal{S}_i},\quad \rho_i^*=\rho_i\sigma=\rho_i|_{\mathcal{R}_1},\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

则 $\pi_i^*\rho_i^*$ 是 $\mathcal{R}_1$ 的 $\mathcal{R}_1$ 自同态. 由下面的公式:

$$\left(\sum_{i=1}^{j}\tau_i\rho_i\right)(\alpha)=\sum_{i=1}^{j}\tau_i\rho_i(\alpha),\quad \forall\,\alpha\in\mathcal{R}$$

定义的映射 $\sum\limits_{i=1}^{j}\tau_i\rho_i$ 是 $\mathcal{R}$ 的 $\mathcal{R}$ 自同态, 因而

$$\pi\left(\sum_{i=1}^{j}\tau_i\rho_i\right)\sigma=\sum_{i=1}^{j}\pi_i^*\rho_i^*=\sum_{i=1}^{j}\pi_i^*\cdot\rho_i|_{\mathcal{R}_1}$$

是 $\mathcal{R}_1$ 的 $\mathcal{R}_1$ 自同态. 对每个 $\beta\in\mathcal{R}_1$ 有

$$\beta=\pi(\beta)=\pi\left(\sum_{i=1}^{n}\rho_i(\beta)\right)=\sum_{i=1}^{n}\pi_i^*\rho_i^*(\beta),$$

即有

$$\sum_{i=1}^{n}\pi_i^*\rho_i^*=\mathrm{id}_{\mathcal{R}_1}.$$

因此, 由引理 1.2.2, 存在指标 i, 使得 $\pi_i^*\rho_i^*\in\mathrm{Aut}\mathcal{R}_1$. 如若需要经 $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \cdots, \mathcal{S}_n$ 的排列, 则可认为 $i=1$, $\pi_1^*\rho_1^*\in\mathrm{Aut}\mathcal{R}_1$. 这就推出 ρ_1^* 是一一映射. 设 $\mathcal{R}'=\mathcal{R}_2\oplus\cdots\oplus$

$\mathcal{R}_m$, $\mathcal{S}'=\mathcal{S}_2\oplus\cdots\oplus\mathcal{S}_n$, 则 $\mathrm{ann}(\mathcal{R}')=\mathrm{ann}(\mathcal{S}')=\{0\}$ 且

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}'&=\{\alpha\in\mathcal{R}|\alpha\mathcal{S}_1=\mathcal{S}_1\alpha=0\},\\
\mathcal{S}_1&=\{\alpha\in\mathcal{R}|\alpha\mathcal{S}'=\mathcal{S}'\alpha=0\},\\
\mathcal{R}'&=\{\alpha\in\mathcal{R}|\alpha\mathcal{R}_1=\mathcal{R}_1\alpha=0\},\\
\mathcal{R}_1&=\{\alpha\in\mathcal{R}|\alpha\mathcal{R}'=\mathcal{R}'\alpha=0\}.
\end{aligned}$$

因此, $\{0\}=\ker\rho_1^*=\mathcal{R}_1\cap\ker\rho_1=\mathcal{R}_1\cap\mathcal{S}'$, 所以 $\mathcal{R}_1\subseteq\mathcal{S}_1$. 由习题 1.1 的第 7 题, 有 $\mathcal{S}_1=\mathcal{R}_1\oplus(\mathcal{S}_1\cap\mathcal{R}')$, 但 $\mathcal{S}_1$ 是不可分解的, 故 $\mathcal{S}_1=\mathcal{R}_1$, 于是 $\mathcal{R}'=\mathcal{S}'$. 由归纳假设便得到定理的结论. ∎

习 题 1.2

1. 证明一个结合代数 $\mathcal{R}$ 所有自同态的集合 $\mathrm{End}(\mathcal{R})$ 对映射的乘法为幺半群. $\mathrm{End}(\mathcal{R})$ 是否为结合代数?

2. 证明一个结合代数 $\mathcal{R}$ 所有自同构的集合 $\mathrm{Aut}(\mathcal{R})$ 对映射的乘法为群.

3. 设 t_i,x_i,y_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 是不定元, 令

$$\begin{aligned}
&\mathbf{C}[t_1^{\pm1},t_2^{\pm1},\cdots,t_n^{\pm1}]\\
&=\left\{\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n\in\mathbf{Z}}a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}t_1^{i_1}t_2^{i_2}\cdots t_n^{i_n}\,\middle|\,a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\in\mathbf{C},\text{仅有限多个非零}\right\},
\end{aligned}$$

定义 $\mathbf{C}$ 与 $\mathbf{C}[t_1^{\pm1},t_2^{\pm1},\cdots,t_n^{\pm1}]$ 的乘法、$\mathbf{C}[t_1^{\pm1},t_2^{\pm1},\cdots,t_n^{\pm1}]$ 的加法、乘法如下:

$$a\left(\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n\in\mathbf{Z}}a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}t_1^{i_1}t_2^{i_2}\cdots t_n^{i_n}\right)=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n\in\mathbf{Z}}aa_{i_1,i_2,\cdots,i_n}t_1^{i_1}t_2^{i_2}\cdots t_n^{i_n},$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n\in\mathbf{Z}}a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}t_1^{i_1}t_2^{i_2}\cdots t_n^{i_n}+\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n\in\mathbf{Z}}b_{i_1,i_2,\cdots,i_n}t_1^{i_1}t_2^{i_2}\cdots t_n^{i_n}\\
&=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n\in\mathbf{Z}}(a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}+b_{i_1,i_2,\cdots,i_n})t_1^{i_1}t_2^{i_2}\cdots t_n^{i_n},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n\in\mathbf{Z}}a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}t_1^{i_1}t_2^{i_2}\cdots t_n^{i_n}\right)\left(\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n\in\mathbf{Z}}b_{j_1,j_2,\cdots,j_n}t_1^{j_1}t_2^{j_2}\cdots t_n^{j_n}\right)\\
&=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n\in\mathbf{Z}}c_{k_1,k_2,\cdots,k_n}t_1^{k_1}t_2^{k_2}\cdots k_n^{i_n},
\end{aligned}$$

其中 $c_{k_1,k_2,\cdots,k_n}=\sum\limits_{i_l+j_l=k_l}a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}b_{j_1,j_2,\cdots,j_n}$, 证明:

1) $\mathbf{C}[t_1^{\pm1},t_2^{\pm1},\cdots,t_n^{\pm1}]$ 是一个无限维结合代数;

2) 存在 $2n$ 元多项式代数 $\mathbf{C}[x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n]$ 到 $\mathbf{C}[t_1^{\pm1},t_2^{\pm1},\cdots,t_n^{\pm1}]$ 的满同态.

4. 结合代数 $\mathcal{R}_1$ 到结合代数 $\mathcal{R}_2$ 的线性映射 f 若满足 $\forall\alpha,\beta\in\mathcal{R}_1$, $f(\alpha)f(\beta)=f(\beta\alpha)$, 则称 f 为 $\mathcal{R}_1$ 到 $\mathcal{R}_2$ 的反同态.

结合代数 $\mathcal{R}_1$ 到结合代数 $\mathcal{R}_2$ 的线性映射 f 若满足 $\forall\,\alpha,\beta\in\mathcal{R}_1$,

$$f(\alpha\beta)=f(\alpha)f(\beta)\quad\text{或}\quad f(\alpha\beta)=f(\beta)f(\alpha),$$

证明 f 或为同态, 或为反同态.

1.3 结合代数的表示

本节介绍结合代数的表示或模的概念. 表示或者模, 就是一个结合代数到线性空间的线性变换构成的结合代数的同态.

定义 1.3.1 设 $\mathcal{R}$, V 分别为域 $\mathbf{F}$ 上的结合代数和线性空间, $\mathrm{End}V$ 是 V 的所有线性变换构成的结合代数, $\mathcal{R}$ 到 $\mathrm{End}V$ 的同态 ρ 称为 $\mathcal{R}$ 的**表示**, V 称为此表示的**表示空间**, $\dim V$ 称为表示的**维数** (**阶**).

与表示等价的说法是结合代数的模.

定义 1.3.2 设 $\mathcal{A}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的结合代数, V 是 $\mathbf{F}$ 上的线性空间. 若 $\mathcal{A}\times V$ 到 V 的映射 $(a,v)\to av$ 满足

1) 此映射是双线性的;

2) $a_1(a_2v)=(a_1a_2)v$,

则称 V 为 $\mathcal{A}$ 的**左模**, 简称为 $\mathcal{A}$ 的**模**.

若 $\mathcal{A}$ 含幺元 e, 则要求 $ev=v$.

定理 1.3.1 结合代数 $\mathcal{A}$ 的模的集合 $\{V\}$, 与 $\mathcal{A}$ 的表示的集合 $\{(\rho,V)\}$ 一一对应.

证 设 ρ 是 $\mathcal{A}$ 的以 V 为表示空间的表示, 定义 $\mathcal{A}\times V$ 到 V 的映射如下:

$$(a,v)\to av=\rho(a)v,\quad \forall a\in\mathcal{A}, v\in V,$$

则容易验证 V 是 $\mathcal{A}$ 模.

反之, 若 V 是 $\mathcal{A}$ 模, 则 $v\to av$ 是 V 的线性变换, 记为 $\rho(a)$. 显然, ρ 是 $\mathcal{A}$ 的表示, 表示空间为 V. ∎

定义 1.3.3 设 $\mathcal{R}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的结合代数, $\alpha\in\mathcal{R}$. 定义 $\mathcal{R}$ 的线性变换 L_α 为

$$L_\alpha(\beta)=\alpha\beta,\quad \forall\beta\in\mathcal{R},$$

称之为 α 决定的**左平移**.

类似地, 可定义 α 决定的**右平移**为

$$R_\alpha(\beta)=\beta\alpha,\quad \forall\beta\in\mathcal{R}.$$

定理 1.3.2 设 $\mathcal{R}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的结合代数, 则 $(L,\mathcal{R})$ $(L(\alpha)=L_\alpha)$ 为以 $\mathcal{R}$ 为表示空间的 $\mathcal{R}$ 的表示, 称之为 $\mathcal{R}$ 的**伴随表示**.

证 设 $\alpha,\beta\in\mathcal{R}$, $k\in\mathbf{F}$, 于是有 $L_{\alpha+\beta}=L_\alpha+L_\beta$, $L_{k\alpha}=kL_\alpha$, $L_{\alpha\beta}=L_\alpha L_\beta$, 因此, 定理成立. ∎

定义 1.3.4 设 $\mathcal{R}$ 是 n 维结合代数, α 决定的左平移 L_α 的迹称为 α 的**迹**, 并记为 $\mathrm{tr}\alpha$, 即 $\mathrm{tr}\alpha=\mathrm{tr}L_\alpha$.

显然,

$$\mathrm{tr}(\alpha\beta) = \mathrm{tr}(\beta\alpha), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}.$$

定义 1.3.5 设 (ρ, V) 为域 $\mathbf{F}$ 上的结合代数 $\mathcal{R}$ 的表示, W 是 V 的子空间, 满足 $\forall \alpha \in \mathcal{R}$, $\rho(\alpha)W \subseteq W$, 则称 W 为 V 的**不变子空间或子模**.

如果 V 中存在非平凡的不变子空间, 则称 V 为**可约表示**;

如果 V 中不存在非平凡的不变子空间, 则称 V 为**不可约表示或单模**;

如果对 V 中任一不变子空间 W 都有 W 在 V 中的不变补子空间 W_1 (即 $V = W \dot{+} W_1$), 则称 V 为**完全可约表示或半单模**.

定义 1.3.6 设 (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) 为域 $\mathbf{F}$ 上的结合代数 $\mathcal{R}$ 的表示, 若有 V_1 到 V_2 的线性同构 ψ(图 1.1) 满足

$$\psi\rho_1(\alpha) = \rho_2(\alpha)\psi, \quad \forall \alpha \in \mathcal{R},$$

则称 (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) 为**等价表示**, 或 V_1, V_2 为同构的 $\mathcal{R}$ 模.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\rho_1(a)"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(a)"] \\ V_1 \arrow[r, "\psi"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

图 1.1

下面介绍结合代数的反表示与右模的概念.

定义 1.3.7 设 $\mathcal{R}$, V 分别是域 $\mathbf{F}$ 上的结合代数和线性空间. ρ° 是 $\mathcal{R}$ 到 $\mathrm{End}V$ 的线性映射, 并且满足 $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}$, $\rho^\circ(\alpha\beta) = \rho^\circ(\beta)\rho^\circ(\alpha)$, 则称 (ρ°, V) 为 $\mathcal{R}$ 的**反表示**.

注 结合代数 $\mathcal{R}_1$ 到结合代数 $\mathcal{R}_2$ 的线性映射 ρ° 若满足 $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}_1$, $\rho^\circ(\alpha)\rho^\circ(\beta) = \rho^\circ(\beta\alpha)$, 则称 ρ° 为 $\mathcal{R}_1$ 到 $\mathcal{R}_2$ 的**反同态**.

与反表示相对应的是右模的概念.

定义 1.3.8 设 $\mathcal{B}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的结合代数, V 是 $\mathbf{F}$ 上的线性空间. 若 $V \times \mathcal{B}$ 到 V 的映射 $(v, b) \to vb$ 满足

1) 此映射是双线性的;

2) $(vb_1)b_2 = v(b_1b_2)$,

则称 V 为 $\mathcal{B}$ 的**右模**.

若 $\mathcal{B}$ 含单位元 ε, 则要求 $v\varepsilon = v$.

右 $\mathcal{B}$ 模 V 的子空间 V_1 称为**子模**, 如果 $\forall a \in \mathcal{B}, v \in V_1$ 有 $va \in V_1$.

例 1.3.1 $\mathcal{R}$ 是结合代数, 记 $R(\alpha) = R_\alpha$ 为 α 决定的右平移, 则 R 是 $\mathcal{R}$ 的反表示, $\mathcal{R}$ 也是右 $\mathcal{R}$ 模.

同表示与左模的关系一样, 可以证明结合代数的反表示与右模其实是同一事物的不同说法而已.

定义 1.3.9 设 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 为域 $\mathbf{F}$ 上的结合代数, V 是 $\mathbf{F}$ 上的线性空间. 若 V 既是左 $\mathcal{A}$ 模又是右 $\mathcal{B}$ 模, 并且满足

$$(av)b = a(vb) = avb, \quad \forall a \in \mathcal{A},\ b \in \mathcal{B},\ v \in V,$$

则称 V 是$\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ **双模**.

$\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ 双模 V 的子空间 V_1 称为**子模**, 如果 $\forall a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, $v \in V_1$ 有 $av, vb \in V_1$.