普通高等教育“十二五”规划教材

# 信号与系统分析基础

## （非信息类专业）

潘文诚 ◎ 等编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育"十二五"规划教材

# 信号与系统分析基础

## （非信息类专业）

潘文诚　徐宏飞　李津蓉　编著

机械工业出版社

本书是介绍信号与系统分析方法的基础教材。全书分7章，内容包括信号与系统的基本概念、连续信号的傅里叶变换、连续信号的拉普拉斯变换、离散信号与系统、离散傅里叶变换、快速傅里叶变换、数字滤波器设计等。本着以连续信号、连续系统的理论为基础，以离散信号、离散系统的理论和内容为重点的原则，本书探索主线式教学方式，力求使读者通过本课程的基础学习，能抓住贯穿本课程的主线，能掌握连续与离散两部分中信号分析与处理、系统分析与综合的具有共性的理论和方法。

本书可作为测控技术与仪器专业、理工科非信息类专业本科生的教材或参考书，也可供有关科技人员参考。

**图书在版编目（CIP）数据**

信号与系统分析基础：非信息类专业/潘文诚等编著．—北京：机械工业出版社，2011.1

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-111-32753-0

Ⅰ.①信…　Ⅱ.①潘…　Ⅲ.①信号分析-高等学校-教材②信号系统-系统分析-高等学校-教材　Ⅳ.①TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第243923号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：王小东　责任编辑：王小东　卢若薇
版式设计：霍永明　责任校对：李秋荣
封面设计：王伟光　责任印制：乔　宇
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
2011年1月第1版第1次印刷
184mm×260mm·16.75印张·413千字
标准书号：ISBN 978-7-111-32753-0
定价：34.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

| 电话服务 | 网络服务 |
|---|---|
| 社服务中心：(010) 88361066 | 门户网：http://www.cmpbook.com |
| 销售一部：(010) 68326294 | 教材网：http://www.cmpedu.com |
| 销售二部：(010) 88379649 | |
| 读者服务部：(010) 68993821 | 封面无防伪标均为盗版 |

# 前　言

在微电子技术、计算机科学与技术取得了巨大成就的今天，信号的发生、传送、分析与处理的理论和方法，在自动控制、仪器仪表、机电工程、生物医学、遥感遥测、语音图像处理、通信学等工程技术领域有着广泛的应用。所以“信号与系统”这门课程，已被许多学校列入了电类、非电类专业的教学计划，作为这些理工学科的基础课程。

本书的读者对象定位为理工科非信息类专业的本科学生，为此在内容安排上有如下考虑：

1）全书包括了信号类课程中确定性信号、线性时不变系统连续和离散两部分的基础教学内容，且重点向离散部分倾斜，具有较强的系统性和实用性。本书的内容在讲述离散信号与系统分析的基础上，以相当多的篇幅介绍了数字信号处理和数字滤波器的基础知识，这为不单独开设“数字信号处理”课程的非信息类专业提供了信号类课程两课合一的选择与尝试。

2）本书对于信号与系统的连续与离散两部分中具有共性或可比性的知识点，比如连续时间信号和离散时间序列，傅里叶变换和离散傅里叶变换，连续、离散系统的系统函数和复频域分析，以及模拟滤波器和数字滤波器的性能指标、频率响应等，在论述中都考虑了突出其共性和可比性。力求使读者通过本课程的基础学习，能抓住贯穿本课程全局的主线，能掌握连续与离散两部分中信号分析与处理、系统分析与综合的具有共性的理论与方法。

3）本书加强了仿真实验的分量和工程背景的展示，使本课程从纯数学的教学环境中解脱出来。在各章均有一节对该章所涉及的知识点，给出了 MATLAB 仿真所需的函数说明和例程，并配备了仿真习题。考虑工科专业的需要，一些实践性较强的知识点，比如时域抽样、离散傅里叶变换参数选择、快速傅里叶变换编程等环节，均在理论阐述中融入了工程思想。

4）本书作为教材，参考学时为 60 学时左右。如果裁去第 3 章、第 7 章以及 4.5.2、6.3 节、6.6 节等，可将学时数降低至 40 学时左右，且还能自成体系，不影响系统性。因此，本书可以适应不同专业的需要。

在成书过程中：徐宏飞编写了第 2、3 章，李津蓉编写了第 4、5、6 章，潘文诚编写了第 1、7 章以及各章的仿真部分，并负责了全书的统稿。书中参考和引用了相关教材与资料，在此对参考文献的作译者表示感谢。

由于作者水平有限，书中不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

**作　者**

于西密湖畔

# 目　　录

# 第1章 信号与系统的基本概念

在微电子技术、计算机科学与技术取得巨大成就的今天，信号的发生、传送、分析与处理的理论和方法，在自动控制、仪器仪表、生物医学、遥感遥测、语音图像处理、故障诊断、地震学、气象学、通信学等工程技术领域，以及基础科学、生产管理和文化艺术等领域都有着广泛的应用。

本章主要讨论信号与系统的基本概念，包括信号的定义、分类以及运算，信号与系统的关系，系统的定义、分类以及线性时不变系统的分析方法等内容。

## 1.1 信号

### 1.1.1 信号的定义

人们在社会活动与生产活动中，彼此通过语言、文字、数据和图像等来交流信息。通常信息是通过一定形式的信号来传送的。信号是信息的载体，信息是信号的内涵。

信号通过多种方式来描述：在物理上，信号是信息寄寓变化的形式；在数学上，信号是一个或多个变量的函数；在形态上，信号表现为一种波形；信号的自变量可以是时间、位移、周期、频率、幅度、相位等。

本书只讨论一维信号，并常常将应用广泛的电信号作为研究对象，它可以是电压和电流，也可以是电荷或磁通。信号具有一定的波形，根据出现时间的先后、持续时间的长短以及随时间变化的快慢等描述的是信号的时间特性。信号也可以是频率的函数，在一定条件下，信号可以分解为不同频率的正弦分量，即具有不同幅值的频率成分，这被称为信号的频率特性。

### 1.1.2 信号的分类

**1. 连续时间信号和离散时间序列**

(1)连续时间信号。在连续时间范围内有定义的信号称为连续时间信号，简称为连续信号，如图1-1a所示。连续信号的表达式与函数表达式相同，如

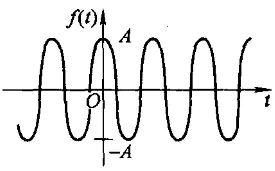
$$f(t) = A\cos\omega t$$

(2)离散时间信号(或称序列)。只有在一些离散时刻才有定义的信号称为离散时间信号，简称为离散信号或序列。此类信号时间是离散的，幅值是连续的。图1-1b是序列的图形表示，用其样值的集合可表示为

$$x(n) = \{4,\underline{3},0,2,1\} \tag{1.1.1}$$

式(1.1.1)中加注下画线的样值，表示其位于$n=0$时的位置，$n$只能取整数。

(3)数字信号。时间是离散的，幅值也是离散的信号称为数字信号。由于幅值是离散的，故数字信号的每个样值又可以表示为二进制码的形式。数字信号是通过模/数(A/D)转



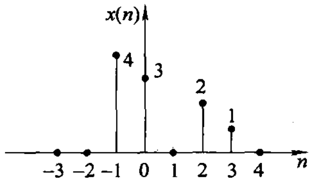




图 1-1 连续时间信号和离散时间序列

换器对连续时间信号 $f(t)$ 等间隔抽样得到的，抽样间隔为 $T_s$，抽样频率为 $f_s$。

离散时间信号 $x(n)$ 也看做是对连续时间信号 $f(t)$ 的等间隔抽样。因离散时间信号的一些理论同样适用于数字信号，故本书基本上讨论离散时间信号的分析和处理。

**2. 周期信号与非周期信号**

(1) 连续时间周期信号。一个连续信号 $f(t)$，若对所有的 $t$ 均有

$$f(t)=f(t+mT) \qquad m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \tag{1.1.2}$$

则称 $f(t)$ 为连续时间周期信号，满足式(1.1.2)的最小 $T$ 值称为 $f(t)$ 的周期。

(2) 离散时间周期信号。一个离散时间序列 $x(n)$，$n$ 与 $N$ 均为整数，若对所有的 $n$ 均有

$$x(n)=x(n+mN) \qquad m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \tag{1.1.3}$$

则称 $x(n)$ 为离散时间周期信号，满足式(1.1.3)的最小 $N$ 值称为序列 $x(n)$ 的周期。

(3) 非周期信号。凡是不满足式(1.1.2)或式(1.1.3)的信号都称为非周期信号，或者认为它具有趋向于无穷大的周期。

**3. 确定性信号与随机信号**

(1) 确定性信号。任一由确定性时间函数描述的信号称为确定性信号或规则信号。这类信号给定某一时刻值时，就能确定一个相应的信号值。

(2) 随机信号。随机信号在某一时刻的取值具有不确定性，只能通过大量试验测出它在某一时刻取值的概率分布，用统计特性加以描述。

本书主要讨论确定性信号的分析与处理。

**4. 能量信号与功率信号**

信号有多少能量以及对应的功率是多少，显然是一个重要的问题。由电磁场理论得知，电场的能量密度和电场强度的幅值平方成正比，电路中的一个电阻上消耗的功率也是和电压的平方成正比的。故对于连续信号 $f(t)$，如果有

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\mathrm{d}t<\infty \tag{1.1.4}$$

对于离散信号 $x(n)$，如果有

$$E=\sum_{n\to-\infty}^{\infty}|x(n)|^2<\infty \tag{1.1.5}$$

则 $f(t)$ 和 $x(n)$ 被称为能量有限信号。反之，不满足式(1.1.4)和式(1.1.5)的信号，则被称为能量无限信号。一般能量无限信号的平均功率是有限的，可以从功率的角度对信号进行考察，并称为功率信号。

**5. 因果信号与反因果信号**

若当 $t<t_0$（$t_0$ 为实常数）时，$f(t)=0$；当 $t\geqslant t_0$ 时，$f(t)\neq0$，则称 $f(t)$ 为因果信号。

若当 $n<n_0$（$n_0$ 为实整数）时，$x(n)=0$；当 $n\geqslant n_0$时，$x(n)\neq 0$，则称 $x(n)$为因果序列。

否则，称反因果信号或反因果序列。实际应用时，上面的时间条件中常取 $t_0=0$，$n_0=0$。

## 1.1.3 连续与离散信号的基本运算

### 1. 反褶运算

将信号$f(t)$的自变量 $t$ 更换为 $-t$，此时$f(-t)$的波形相当于将$f(t)$以纵轴 $t=0$ 为对称轴反褶过来，此运算也称为时间轴反转，如图 1-2 所示。

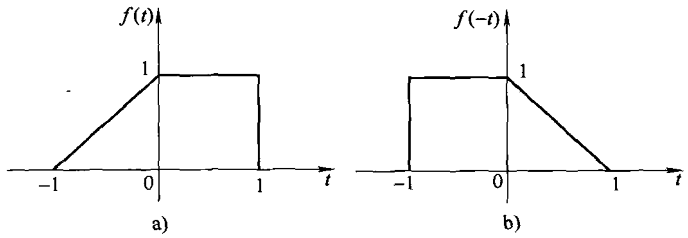



图 1-2　连续信号的反褶运算

序列的反褶是用 $-n$ 代换 $x(n)$中的变量 $n$。反褶的图形表示序列以 $n=0$ 的纵轴为对称轴，将序列 $x(n)$予以反褶。图 1-3 表示对图 1-1b 所示信号的反褶运算。用序列的集合表示法显示反褶过程为：由 $x(n)=\{4, \underline{3}, 0, 2, 1\}$，经反褶得到 $x(-n)=\{1, 2, 0, \underline{3}, 4\}$。

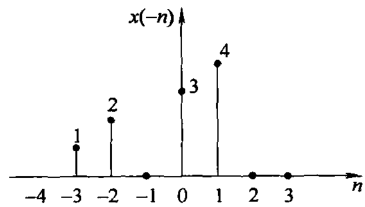



图 1-3　序列的反褶运算

### 2. 移位运算

若将$f(t)$表达式的自变量 $t$ 更换为 $t-t_0$，其中 $t_0$ 为正的或负的实数，则$f(t-t_0)$相当于$f(t)$波形在 $t$ 轴上作整体移动，如图 1-4 所示。当 $t_0>0$ 时波形右移，如图 1-4b 所示；当 $t_0<0$ 时波形左移，如图 1-4c 所示；图 1-4a 为 $t_0=0$ 时的波形。

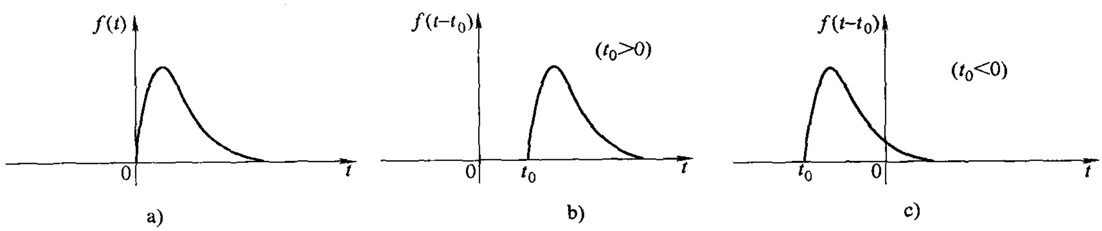



图 1-4　信号的移位运算

序列移位运算是用 $n-n_0$ 代换 $x(n)$中的变量 $n$，构成新序列。$n_0$ 为整数，当 $n_0>0$ 时波形右移，当 $n_0<0$ 时波形左移。比如 $n_0=1$ 时，$x(n-1)$表示原序列右移 1 个单位，通常称序列延时 1 个单位；$x(n+1)$表示原序列左移 1 个单位，通常称序列超前 1 个单位。图 1-5b 显示了对图 1-5a 序列右移一个单位的结果。对图 1-5a 所示的序列，用集合表示为 $x(n)=\{4, \underline{3}, 0, 2, 1\}$，右移 1 位后得到 $x(n-1)=\{\underline{4}, 3, 0, 2, 1\}$。

### 3. 尺度变换运算

尺度变换运算又称做横坐标展缩，将信号 $f(t)$的自变量 $t$ 乘以正实数 $a$，则信号波形

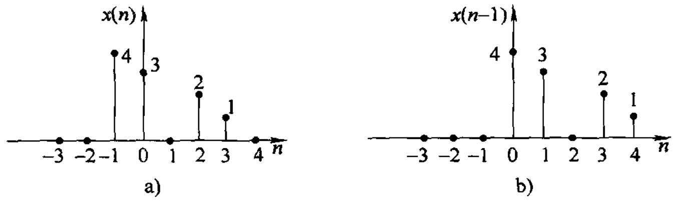


图 1-5　序列的移位运算

$f(at)$将是$f(t)$波形在时间轴上的压缩($a>1$)或扩展($a<1$)，如图 1-6 所示。其中，图 1-6a 为 $a=1$ 时的波形，图 1-6b、c 分别为 $a>1$ 和 $a<1$ 时的波形。

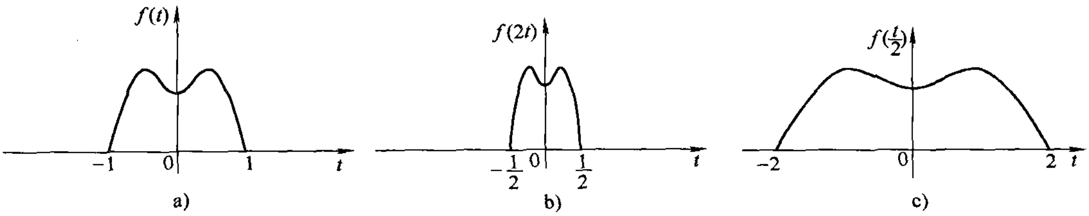


图 1-6　信号的尺度变换运算

对于离散时间信号 $x(n)$，将其自变量 $n$ 乘以正整数 $m$，则称序列 $x(mn)$是 $x(n)$作 $m$ 倍的压缩排列，它是把序列的某些值去除掉，余下的序列按次序重新排列。图 1-7b 表示 $m=2$ 时对图 1-7a 序列的压缩结果，由 $x(n)=\{5,\ \underline{4},\ 3,\ 2,\ 1\}$ 经 $m=2$ 压缩重排得到 $x(2n)=\{\underline{4},\ 2\}$。如果对 $x(n)$的自变量 $n$ 除以正整数 $l$，则称序列 $x\left(\frac{n}{l}\right)$是 $x(n)$作 $l$ 倍的插值，它是在原序列相邻值之间插入零值。图 1-7c 表示 $l=2$ 时对图 1-7a 序列的内插零的结果，可以看出，内插零后的新序列犹如原序列延伸了 $l-1$ 倍，由 $x(n)=\{5,\ \underline{4},\ 3,\ 2,\ 1\}$ 经 $l=2$ 延伸重排得到 $x\left(\frac{n}{2}\right)=\{5,\ 0,\ \underline{4},\ 0,\ 3,\ 0,\ 2,\ 0,\ 1\}$。

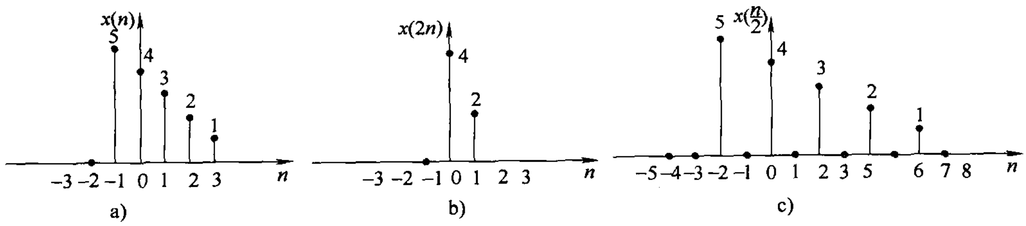


图 1-7　序列的压缩和延伸

**【例 1-1】**　已知信号$f(t)$的波形如图 1-8a 所示，试画出$f(-3t-2)$的波形。

**【解】**　按移位、尺度、反褶的顺序画波形。

考虑移位的作用，求得$f(t-2)$波形，如图 1-8b 所示，$t_0>0$，右移；将$f(t-2)$作尺度倍乘，求得$f(3t-2)$，如图 1-8c 所示，$a>1$，压缩；将$f(3t-2)$反褶，得$f(-3t-2)$，如图 1-8d 所示。

要注意的是，以上过程均是对自变量 $t$ 进行运算。

**4. 序列的加减与相乘运算**

(1)相加(减)运算：

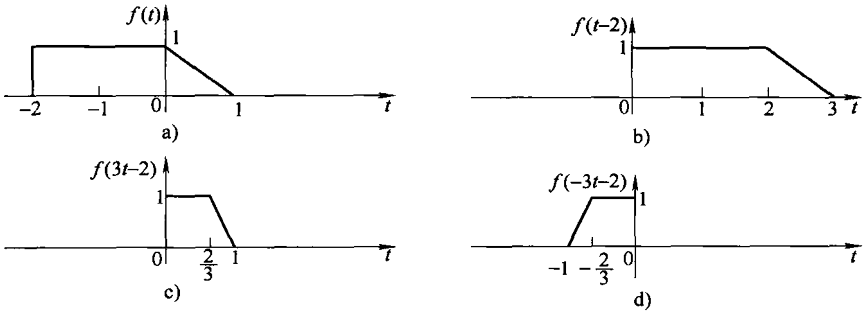



图 1-8　例 1-1 的波形

$$
\begin{aligned}
y(n) &= x_1(n) + x_2(n) \\
y(n) &= x_1(n) - x_2(n)
\end{aligned}
\tag{1.1.6}
$$

把式(1.1.6)的运算描述为：两个序列在相同序列号处(同一时刻 $n$)的样值点点相加(减)，其结果仍然是一个序列。

(2) 累加运算：

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} x(m) \tag{1.1.7}$$

式(1.1.7)表示序列 $y(n)$ 在时刻 $n$ 的值等于 $x(n)$ 当前时刻 $n$ 的值和 $x(n)$ 以前所有值的总和。

(3) 相乘运算：

$$y(n) = x_1(n)x_2(n) \tag{1.1.8}$$

把式(1.1.8)的运算描述为：两个序列在相同序列号处(同一时刻 $n$)的样值点点相乘，其结果仍然是一个序列。

(4) 标量乘：

$$y(n) = ax(n) \tag{1.1.9}$$

式(1.1.9)表示将 $x(n)$ 在所有时刻 $n$ 的样值乘以常数 $a$。显然，当 $a$ 为大于零的实数时，其作用是将 $x(n)$ 放大 $a$ 倍。

**5. 序列的差分运算**

前向差分：　$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$

后向差分：　$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$

由此可证明

$$\nabla x(n) = \Delta x(n-1)$$

## 1.1.4　常见的信号与序列

**1. 正弦函数信号与正弦序列**

机械波、电磁波、声波和光波等物理现象，在一定的条件下都可以用正弦函数信号来描述。正弦函数和余弦函数二者仅在相位上相差 $\frac{\pi}{2}$，在本书中统称正弦函数。正弦函数信号的一般形式为

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{1.1.10}$$

式中，$\omega$ 为角频率，单位为 rad/s；$A$ 和 $\varphi$ 分别是振幅和初相角。

波形图如图 1-9a 所示。正弦函数是周期函数，其周期为 $T$，$T$ 与频率 $f$、角频率 $\omega$ 之间的关系为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{f} \tag{1.1.11}$$

根据欧拉恒等式，正弦函数信号可以写成

$$\begin{cases}\sin(\omega t)=\dfrac{e^{j(\omega t)}-e^{-j(\omega t)}}{2j}\\ \cos(\omega t)=\dfrac{e^{j(\omega t)}+e^{-j(\omega t)}}{2}\end{cases} \tag{1.1.12}$$

即一个正弦信号可以表示为两个周期相同但频率异号的虚指数信号的加权和。式中出现的负(角)频率实际上是不存在的，这里只是为了理论分析的需要引入的一种数学表示而已。

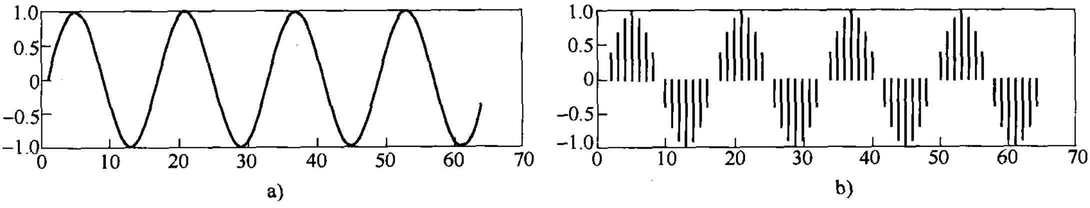



图 1-9　正弦函数信号与正弦序列

正弦序列的波形如图 1-9b 所示。可以这样来看，对正弦函数信号 $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ 在时间轴 $t$ 上进行等间隔抽样，即 $t=nT_s$（$n$ 为抽样序号，量纲为一；$T_s$ 为抽样间隔，单位为 s），就可得到正弦序列

$$x(nT_s)=x(t)\big|_{t=nT_s}=A\cos(\omega nT_s+\varphi) \tag{1.1.13}$$

在式(1.1.13)中令

$$\Omega=\omega T_s \tag{1.1.14}$$

称 $\Omega$ 为数字角频率，单位为 rad；又由于 $T_s$ 是一个常数，通常将 $x(nT_s)$ 简写成 $x(n)$。这样，式(1.1.13)可简写为下列形式：

$$x(n)=A\cos(\Omega n+\varphi) \tag{1.1.15}$$

由此可知，序号 $n$ 隐含了常数 $T_s$，以后不再特别说明。

和连续时间正弦信号不同的是，离散时间正弦序列并非都是周期信号。这是因为离散时间信号的自变量 $n$ 只能取整数，因而周期序列的周期 $N$ 也一定是整数。在正弦序列中，并非对任何 $\Omega$ 都能找到满足周期性要求的正整数 $N$。假设 $x(n)=\cos(\Omega n+\varphi)$ 是周期序列，则应有

$$x(n)=\cos(\Omega n+\varphi)=\cos[\Omega(n+N)+\varphi] \tag{1.1.16}$$

要使式(1.1.16)成立，需有 $\Omega N=2\pi k$，$k$ 为整数，即当 $N=\frac{2\pi}{\Omega}k$ 为整数时，或者

$$\frac{2\pi}{\Omega}=\frac{N}{k}=\frac{T}{T_s} \tag{1.1.17}$$

为有理数时，正弦序列才是周期序列；否则为非周期序列。式中，$T_s$ 和 $T$ 分别是抽样周期和正弦信号的周期。

根据欧拉恒等式，正弦序列也可以表示为两个频率异号的虚指数序列的加权和，即

$$\begin{cases}\sin(\Omega n)=\dfrac{e^{j(\Omega n)}-e^{-j(\Omega n)}}{2j}\\[2ex]\cos(\Omega n)=\dfrac{e^{j(\Omega n)}+e^{-j(\Omega n)}}{2}\end{cases}\tag{1.1.18}$$

**2. 指数函数信号与指数序列**

(1)指数函数信号。指数函数信号的一般形式为

$$f(t)=Ae^{st}\tag{1.1.19}$$

根据式中 $s=\sigma+j\omega$ 的不同取值，指数函数信号有实指数信号、虚指数信号和复指数信号。

实指数信号 $f(t)=Ae^{\sigma t}$，$\sigma>0$ 时，$f(t)$ 随时间 $t$ 的增大按指数规律增长；$\sigma<0$ 时，$f(t)$ 随时间 $t$ 的增大按指数规律衰减，衰减波形如图 1-10a 所示。

虚指数信号 $f(t)=Ae^{j\omega t}$，根据欧拉恒等式，虚指数信号可以表示为

$$e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t\tag{1.1.20}$$

式(1.1.20)表明，$e^{j\omega t}$ 的实部和虚部都是角频率为 $\omega$ 的正弦信号，显然 $e^{j\omega t}$ 也是周期信号，其周期为 $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$。

复指数信号是指式(1.1.19)中 $A$ 和 $s$ 均为复数。设 $A=|A|e^{j\varphi}$，$s=\sigma+j\omega$，则有

$$\begin{aligned}f(t)&=Ae^{st}=|A|e^{j\varphi}e^{(\sigma+j\omega)t}\\&=|A|e^{\sigma t}e^{j(\omega t+\varphi)}\\&=|A|e^{\sigma t}[\cos(\omega t+\varphi)+j\sin(\omega t+\varphi)]\end{aligned}\tag{1.1.21}$$

(2)指数序列。指数序列的一般形式为

$$x(n)=Aa^{\beta n}\tag{1.1.22}$$

根据式(1.1.22)中 $A$ 和 $\beta$ 的不同取值，指数序列有实指数序列、虚指数序列和复指数序列。

实指数序列 $x(n)=Aa^{\beta n}$ 中，$A$ 和 $\beta$ 均为实常数。$\beta<0$ 时的波形如图 1-10b 所示。

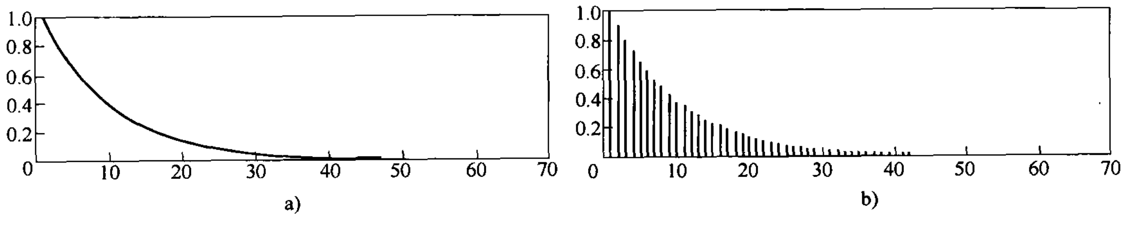



图 1-10　实指数函数信号与实指数序列

虚指数序列中，$A=1$，$a=e$，$\beta=j\Omega$（即 $\beta$ 为纯虚数），$x(n)=e^{j\Omega n}$，根据欧拉恒等式，虚指数序列可以表示为

$$e^{j\Omega n}=\cos\Omega n+j\sin\Omega n\tag{1.1.23}$$

式(1.1.23)表明，$e^{j\Omega n}$ 的实部和虚部都是正弦序列，只有当其实部和虚部同时为周期序列时，才能保证 $x(n)=Ae^{j\Omega n}$ 是周期的。

复指数信号是指式(1.1.22)中 $A$ 和 $\beta$ 均为复数，且 $a=e$。设 $A=|A|e^{j\varphi}$，$\beta=\rho+j\Omega$，并记 $e^{\rho}=r$，则有

$$
\begin{aligned}
x(n) &= A\mathrm{e}^{\beta n} = |A|\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\mathrm{e}^{(\rho+\mathrm{j}\Omega)n} \\
&= |A|\ \mathrm{e}^{\rho n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega n+\varphi)} = |A|\ r^n\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega n+\varphi)} \\
&= |A|\ r^n[\cos(\Omega n+\varphi)+\mathrm{j}\sin(\Omega n+\varphi)]
\end{aligned} \tag{1.1.24}
$$

**3. 单位冲激信号与单位脉冲序列**

某些物理现象需要用一个时间极短、幅值极大的函数来描述，如瞬间作用的冲击力、高速模/数转换中的抽样脉冲等，此类背景引出了“冲激函数”的概念，其数学定义如式(1.1.25)、式(1.1.26)所示

$$
\delta(t) = \begin{cases} \infty & t=0 \\ 0 & t\neq 0 \end{cases} \tag{1.1.25}
$$

且有

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t = 1 \tag{1.1.26}
$$

式中，$\delta(t)$是广义函数，在 $t=0$ 时幅度趋向于无穷大，且其强度为 1。

波形如图 1-11a 所示。据此，可得冲激函数的筛选特性如下

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0_-}^{0_+} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0) \tag{1.1.27}
$$

式(1.1.27)对于任意在 $t=0$ 时连续的函数 $f(t)$ 均成立，反映了单位冲激函数 $\delta(t)$ 将 $f(t)$ 在 $t=0$ 时函数值 $f(0)$ 筛选出来，称为单位冲激函数的筛选特性。若将单位冲激信号 $\delta(t)$ 平移 $t_0$，其筛选特性进一步表现为

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0) \tag{1.1.28}
$$


a)　　b)

图 1-11　单位冲激函数 $\delta(t)$ 和单位脉冲序列 $\delta(n)$

离散信号单位脉冲序列又称单位抽样序列、单位样值序列、单位冲激序列，定义式为

$$
\delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases} \tag{1.1.29}
$$

即 $\delta(n)=\{\underline{1}\}$。此序列只在 $n=0$ 处取单位值 1，如图 1-11b 所示。应注意它与 $\delta(t)$ 之间的区别。类似于 $\delta(t)$，$\delta(n)$ 也具有筛选特性，如

$$
x(n)\delta(n) = x(0)\delta(n) \tag{1.1.30}
$$

$$
x(n)\delta(n-m) = x(m)\delta(n-m) \tag{1.1.31}
$$

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(n-n_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n_0)\delta(n-n_0) = x(n_0) \tag{1.1.32}
$$

若将 $\delta(n)$ 在时间轴上延迟 $m$ 个抽样周期，得到 $\delta(n-m)$，则

$$
\delta(n-m) = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases} \tag{1.1.33}
$$

在式(1.1.33)中，若 $m$ 从 $-\infty$ 变到$\infty$，那么，$\delta(n)$的所有移位可形成一个无限长的脉冲串序列 $p(n)$，即

$$p(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n-m) \tag{1.1.34}$$

由式(1.1.34)可知，任意序列都可以表示为单位脉冲序列的移位加权和，由此得到 $\delta(n)$的加权特性：

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) = \cdots + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + \cdots \tag{1.1.35}$$

例如，序列 $x(n)=\{2,\ -4,\ \underline{-1},\ 8\}$ 可以写为

$$x(n)=2\delta(n+2)-4\delta(n+1)-\delta(n)+8\delta(n-1)$$

**4. 单位阶跃信号与单位阶跃序列**

单位阶跃信号的函数表达式定义为

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{1.1.36}$$

在式(1.1.36)中未定义 $t=0$ 时 $u(t)$的取值，有的教材中定义 $t=0$ 时 $u(t)=1/2$。$u(t)$的信号波形如图 1-12a 所示。


图 1-12　单位阶跃信号 $u(t)$和单位阶跃序列 $u(n)$

单位阶跃序列定义为

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases} \tag{1.1.37}$$

单位阶跃序列是一个右边序列，也是一个因果序列，即 $u(n)=\{\underline{1},\ 1,\ 1,\ \cdots\}$，如图 1-12b 所示。$u(n)$在 $n=0$ 处有明确规定值 1，这与图 1-12a 所示单位阶跃函数 $u(t)$在 $t=0$ 处是不同的。单位阶跃序列 $u(n)$与单位脉冲序列 $\delta(n)$之间有如下关系：

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1) \tag{1.1.38}$$

$$u(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n-m) \tag{1.1.39}$$

利用单位阶跃函数可表示单边信号，如单边正弦信号 $\sin t u(t)$、单边指数信号 $e^{-t}u(t)$等。利用将单位脉冲序列 $u(n)$与其他序列相乘，构成一个右边序列，又称因果序列。这种特性称为切除特性。

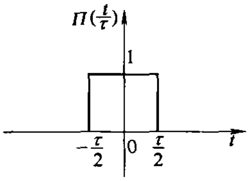
**5. 门函数信号与矩形序列**

矩形脉冲信号也称门函数，幅度为 1 的矩形脉冲信号可以用 $\Pi\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$表示，即

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)=\begin{cases}1 & |t|<\frac{\tau}{2}\\ 0 & 其他\end{cases} \tag{1.1.40}$$

门函数信号的波形如图 1-13a 所示。如果用单位阶跃函数来表示，则有

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)=u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right) \tag{1.1.41}$$



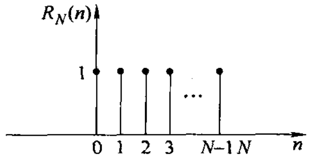




图 1-13 门信号 $\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$和矩形序列 $R_N(n)$

矩形序列定义为

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0 & 其他\end{cases} \tag{1.1.42}$$

即 $R_N(n)=\{\underbrace{1,\ 1,\ \cdots,\ 1}_{N}\}$。如图 1-13b 所示，此序列从 $0\sim N-1$，共有 $N$ 个为 1 的数值。如果用单位阶跃序列 $u(n)$表示矩形序列，则有

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

矩形序列 $R_N(n)$和 $\delta(n)$的关系为

$$R_N(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\delta(n-m)=\delta(n)+\delta(n-1)+\cdots+\delta[n-(N-1)]$$

**6. 内插函数信号**(辛格函数)

定义内插函数信号

$$\mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin x}{x}\quad(x\ 为实数) \tag{1.1.43}$$

也称为辛格函数，该信号在信号与系统理论中是占有重要地位的一个函数(信号)，它具有振荡的波形，其振幅按$\frac{1}{x}$的规律衰减。显然，$\mathrm{sinc}(x)$是关于 $x$ 的偶函数；利用罗必塔法则，该函数在 $x=0$ 处有最大值 1；当 $x\neq0$ 时，在 $\sin x$ 为 0 处 $\mathrm{sinc}(x)$出现过零点，此时 $x=\pm\pi$，$\pm2\pi$，…，如图 1-14 所示。

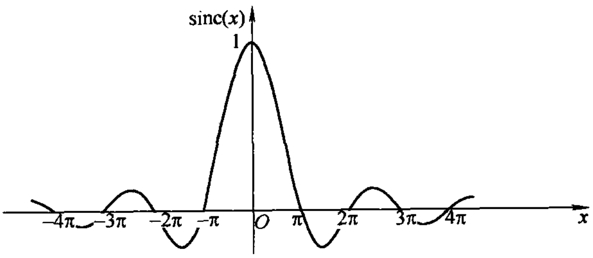



图 1-14 sinc(x)的波形