

高等院校数学专业教材

《解析几何》
配套教学参考书

主编：黄江平

航空工业出版社

高等院校数学专业教材

《解析几何》

配套教学参考书

主 编 黄江平
副主编 陈励敏
姚喜靖

航空工业出版社

内 容 提 要

本书是苏州大学吕林根、许子道等编写的高等学校教材《解析几何》一书(由高等教育出版社出版 1987 年 4 月第三版)的配套教学参考书。本教学参考书编有《解析几何》教材第一章到第六章各节的《学习要点》、《基本内容》、《习题及解答》三部分内容。

图书在版编目(CIP)数据

《解析几何》配套教学参考书/黄江平主编. —北京:航空工业出版社, 2002.3
ISBN 7-80134-905-9

I. 常 ... II. 黄 ... III. 解析几何—高等学校—教学参考资料 IV. 0715.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 057248 号

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

南昌航空工业院印刷厂印刷

全国各地新华书店经售

2002 年 3 月第 1 版

2002 年 3 月第 1 次印刷

开本: 787 × 1092 1/16

印张: 9.5

字数: 237 千字

印数: 1—1000

定价: 26 元

前 言

解析几何是一门应用代数方法研究几何图形的数学学科,是高等院校数学专业的主要基础课程之一。苏州大学吕林根、许子道等编写的《解析几何》一书(第三版),很多高等院校数学专业都采用其作为教材。

为了在校本科生更好地学习这门课程;方便教师备课;同时考虑到参加自学考试人员的不断增加,广大函授生、夜大生在既缺乏老师指导,又没有同学可以磋商的情况下,要独立完成学习任务,确有一定困难。我们编写了这本与教材配套的教学参考书。

本教学参考书编有教材第一章到第六章各节的《学习要点》、《基本内容》、《习题及解答》三部分内容。有的习题,还采用了多种解法,以启发读者思路。编者由衷地期望读者能深入钻研教材,掌握基本理论,通过独立思考作出习题的解答,在此基础上,再同书上的解答进行比较对照,提高解题能力。

本书的编写过程是这样,首先由黄江平副教授提供全部习题解答的初稿。然后由姚喜靖副教授审查修订第一、二、三、六章的习题解答,由陈励敏副教授审查修订第四、五章的习题解答,各节的“学习要点”也是姚喜靖副教授提供的,最后由黄江平副教授统稿,完稿。

由于编者水平有限,本书对一些习题的解答可能不是最佳的,错误之处也在所难免,我们衷心希望使用本书的读者提出宝贵的批评和意见。

在本书的出版过程中,始终得到湛江师范学院数学系领导的关怀与指导。同时也得到南昌航空工业学院印刷厂领导的大力支持和帮助,在此一并表示衷心的感谢。

编 者
2002年3月

目 录

第一章 矢量与坐标	1
§ 1.1 矢量的概念	1
§ 1.2 矢量的加法	3
§ 1.3 数量乘矢量	3
§ 1.4 矢量的线性关系与矢量的分解	6
§ 1.5 标架与坐标	11
§ 1.6 矢量在轴上的射影	16
§ 1.7 两矢量的数性积	17
§ 1.8 两矢量的矢性积	23
§ 1.9 三矢量的混合积	26
§ 1.10 三矢量的双重矢性积	29
第二章 轨迹与方程	31
§ 2.1 平面曲线的方程	31
§ 2.2 曲面的方程	35
§ 2.3 母线平行于坐标轴的柱面方程	39
§ 2.4 空间曲线的方程	40
第三章 平面与空间直线	45
§ 3.1 平面的方程	45
§ 3.2 平面与点的相关位置	50
§ 3.3 两平面的相关位置	54
§ 3.4 空间直线的方程	56
§ 3.5 直线与平面的相关位置	61
§ 3.6 空间两直线的相关位置	63
§ 3.7 空间直线与点的相关位置	69
§ 3.8 平面束	70
第四章 柱面、锥面、旋转面与二次曲面	74
§ 4.1 柱面	74
§ 4.2 锥面	76
§ 4.3 旋转曲面	79
§ 4.4 椭球面	81
§ 4.5 双曲面	84
§ 4.6 抛物面	87
§ 4.7 单叶双曲面与双曲抛物面的直母线	90

第五章 二次曲线的一般理论	97
§ 5.1 二次曲线与直线的相关位置	97
§ 5.2 二次曲线的渐近方向、中心、渐近线	101
§ 5.3 二次曲线的切线	106
§ 5.4 二次曲线的直线	109
§ 5.5 二次曲线的主直径与主方向	113
§ 5.6 二次曲线方程的化简与分类	115
§ 5.7 应用不变量化简二次曲线的方程	122
第六章 二次曲面的一般理论	126
§ 6.1 二次曲面与直线的相关位置	127
§ 6.2 二次曲面的渐近方向与中心	127
§ 6.3 二次曲面的切线与切平面	130
§ 6.4 二次曲面的径面与奇向	135
§ 6.5 二次曲面的主径面与主方向,特征方程和特征根	137
§ 6.6 二次曲面方程的化简和分类	139
§ 6.7 应用不变量化简二次曲面的方程	143

第一章 矢量与坐标

§ 1.1 矢量的概念

(一) 学习要点

掌握矢量的定义及其三种表示方法,特别是矢量的两个要素——模与方向;掌握一些特殊矢量如零矢量、单位矢量的表示方法和作用;掌握以下矢量间的一些基本关系;相等矢量、相反矢量、共线矢量、共面矢量;最后要掌握自由矢量与定位矢量(着重径矢)的概念,理解它们之间的联系与区别,特别注意自由矢量在矢量代数中的重要作用。

(二) 基本内容

1° 矢量 我们称既有大小又有方向的量叫矢量,记作 $\vec{a}$ 。以 A 为始点、B 为终点的矢量记作 $\vec{AB}$ 。矢量的长度(或模)是指矢量的大小,记作 $|\vec{a}|$ 或 $|\vec{AB}|$ 。模等于零的矢量叫零矢量,用 $\vec{0}$ 表示(其方向为任意方向)。模等于 1 的矢量叫单位矢量,与矢量 $\vec{a}$ 具有相同的方向的单位矢量记作 $\vec{a}^0$ 。

2° 相等矢量和反矢量 模与方向都相同的矢量叫相等矢量。在这个意义下,矢量的始点可以放在空间的任一点,因此,又称它为自由矢量。而确定了始点的矢量叫定矢量。

两个模相等、方向相反的矢量叫互为反矢量。

3° 共线矢量和共面矢量 平行于同一直线的一组矢量叫共线矢量。三个或三个以上平行于同一平面的一组矢量叫共面矢量。

显然,零矢量与任何共线的矢量组共线,也与任何共面的矢量组共面。而且,一组共线矢量一定是共面矢量;三矢量中如果有两矢量是共线的,这三矢量一定是共面的。

(三) 习题及解答

1. 下列情形中矢量的终点各构成什么图形?

- (1) 把空间中一切单位矢量归结到共同的始点;
- (2) 把平行于某一平面的一切单位矢量归结到共同始点;
- (3) 把平行于某一直线的一切矢量归结到共同始点;
- (4) 把平行于某一直线的一切单位矢量归结到共同的始点。

解 (1) 单位球面

(2) 单位圆的圆周

(3) 一条直线

(4) 距离为 2 的两点

2. 设点 O 是正六边形 ABCDEF 的中心,在矢量 $\vec{OA}$ 、 $\vec{OB}$ 、 $\vec{OC}$ 、 $\vec{OD}$ 、 $\vec{OE}$ 、 $\vec{OF}$ 、 $\vec{AB}$ 、 $\vec{BC}$ 、 $\vec{CD}$ 、 $\vec{DE}$ 、 $\vec{EF}$ 和 $\vec{FA}$ 中,哪些矢量是相等的?

解 $\vec{AB} = \vec{OC}, \vec{BC} = \vec{OD}, \vec{CD} = \vec{OE}, \vec{DE} = \vec{OF}, \vec{EF} = \vec{OA}, \vec{FA} = \vec{OB}$ 。

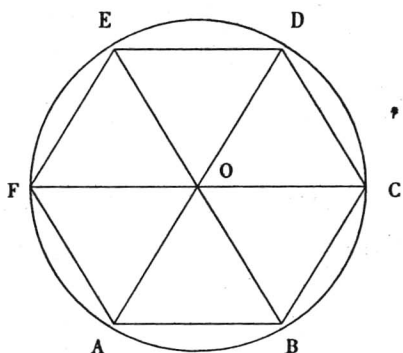


图 1-1

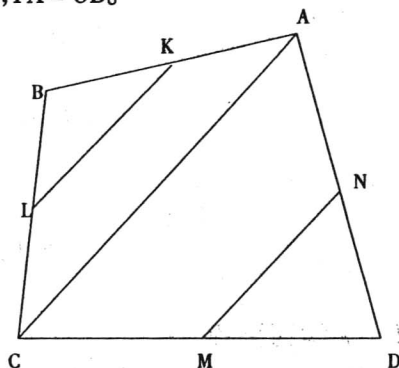


图 1-2

3. 设在平面上给了一个四边形 ABCD, 点 K、L、M、N 分别是边 AB、BC、CD、DA 中点, 求证: $\vec{OC} = \vec{NM}$, 当 ABCD 是空间四边形时, 这等式是否也成立?

证 连结 AC

$$\therefore \vec{KL} = \frac{1}{2} \vec{AC}, \vec{NM} = \frac{1}{2} \vec{AC}, \text{且 } \vec{NM} \text{ 同向。}$$

$$\therefore \vec{KL} = \vec{NM}$$

当 ABCD 为空间四边形时, 等式仍成立。

4. 设 ABCD—EFGH 是一个平行六面体, 在下列矢量中, 找出相等矢量和相反矢量:

(1) $\vec{AB}, \vec{CD}$; (2) $\vec{AE}, \vec{CG}$; (3) $\vec{AC}, \vec{EG}$; (4) $\vec{AD}, \vec{GF}$; (5) $\vec{BE}, \vec{CH}$ 。

解 相等的有 (2)、(3)、(5)

相反的有 (1)、(4)

5. 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 分别是三棱台 ABC—A'B'C' 的上、下底面, 试在矢量 $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}, \vec{A'B'}, \vec{C'A'}, \vec{AA'}, \vec{BB'}, \vec{CC'}$ 找出共面矢量和共面矢量。

解 共线矢量有: $\vec{AB}$ 和 $\vec{A'B'}$; $\vec{BC}$ 和 $\vec{B'C'}$; $\vec{CA}$ 和 $\vec{C'A'}$ 。

共面矢量有四组:

(1) $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}, \vec{A'B'}, \vec{B'C'}, \vec{C'A'}$;

(2) $\vec{AB}, \vec{A'B'}, \vec{AA'}, \vec{BB'}$;

(3) $\vec{BC}, \vec{B'C'}, \vec{BB'}, \vec{CC'}$;

(4) $\vec{CA}, \vec{C'A'}, \vec{CC'}, \vec{AA'}$ 。

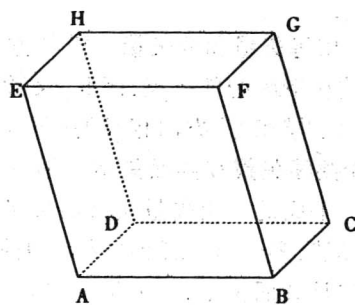


图 1-3

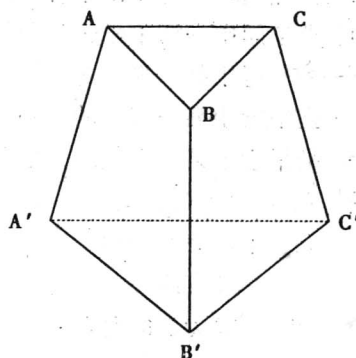


图 1-4

§ 1.2 矢量的加法

(一) 学习要点

掌握矢量加法的三角形法则和平行四边形法则(共线矢量不适用),以及由此推出的矢量加法的交换律和结合律;掌握矢量减法的几何作图以及矢量加法与矢量减法的关系;减去一个矢量相当于加上它的相反矢量;掌握平行四边形的矢量结构,即在 $\square ABCD$ 中, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$;掌握矢量模之间的关系,例如: $|\vec{a}| - |\vec{b}| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$,等等。

(二) 基本内容

1°矢量的加法 记已知矢量 $\vec{a}, \vec{b}$,以空间中任一点 O 为始点接连作 $OA = \vec{a}, AB = \vec{b}$ 得一折线 OAB ,从折线的端点 O 到另一端点 B 的矢量 $\overrightarrow{OB} = \vec{c}$ 叫做两矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和,记作 $\vec{a} + \vec{b}$ 求它们的和 $\vec{a} + \vec{b}$ 的运算叫矢量加法。这个法则可以推广到求有限个矢量的和。

矢量的加法的运算规则是:

1. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}; \vec{a} + \vec{0} = \vec{a};$

2. 交换律: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};$

3. 结合律: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$

2°矢量的减法 当矢量 $\vec{b}$ 与矢量 $\vec{c}$ 的和等于矢量 $\vec{a}$,即 $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ 时,矢量 $\vec{c}$ 叫矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 之差,记作 $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ 。由两矢量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 求它们的差 $\vec{a} - \vec{b}$ 的运算叫矢量减法。

与数的加减法类似,矢量的加法和减法满足等式:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - (-\vec{b}); \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

§ 1.3 数量乘矢量

(一) 学习要点

掌握数量乘矢量的定义(特别注意其方向及模的规定)及其运算法则:结合律和两个分配律;掌握把非零矢量化为单位矢量的方法;掌握三角形中线矢量的表示方法以及线段的定比分点的径矢的表示方法。

(二) 基本内容

数量乘矢量 实数 λ 与矢量 $\vec{a}$ 的乘积是一个矢量,记作 $\lambda \vec{a}$ 。 $\lambda \vec{a}$ 的长度 $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$,其方向规定为 $\lambda > 0$ 时与 $\vec{a}$ 相同, $\lambda < 0$ 时与 $\vec{a}$ 相反。这种运算叫做数量与矢量的乘法。

显然,当 $\lambda = 0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$ 时, $\lambda \vec{a} = \vec{0}$,同时,矢量 $\vec{a}$ 与非零矢量 $\vec{b}$ 共线的充分必要条件是存在唯一的实数 λ ,使得 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ 。

数乘矢量的运算法则是:

(1) $1 \vec{a} = \vec{a}; (-1) \vec{a} = -\vec{a};$

(2) 结合律: $\mu(\lambda \vec{a}) = (\mu\lambda)\vec{a}$;

(3) 第一分配律: $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;

(4) 第二分配律: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ 。

这里 $\vec{a}, \vec{b}$ 是矢量, λ, μ 为任意实数。

(三) 习题及解答

1. 要使下列各式成立, 矢量 $\vec{a}, \vec{b}$ 应满足什么条件?

(1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$; (2) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$;

(3) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$; (4) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$;

(5) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$ 。

解 (1) $\vec{a} \perp \vec{b}$;

(2) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线并同向;

(3) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线并反向, 且 $|\vec{a}| \geq |\vec{b}|$;

(4) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线并反向;

(5) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线并同向, 且 $|\vec{a}| \geq |\vec{b}|$ 。

2. 试解下列各题:

(1) 化简 $(x - y)(\vec{a} + \vec{b}) - (x + y)(\vec{a} - \vec{b})$;

(2) 已知 $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{b} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, 求 $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$ 和 $3\vec{a} - 2\vec{b}$;

(3) 从矢量方程组 $\begin{cases} 3\vec{x} + 4\vec{y} = \vec{a} & (A) \\ 2\vec{x} - 3\vec{y} = \vec{b} & (B) \end{cases}$ 解出矢量 $\vec{x}, \vec{y}$

解 (1) 原式 $= x\vec{a} + x\vec{b} - y\vec{a} - y\vec{b} - x\vec{a} + x\vec{b} - y\vec{a} + y\vec{b}$
 $= 2(x\vec{b} - y\vec{a})$

(2) $\vec{a} + \vec{b} = (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3) + (3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_3$;

$\vec{a} - \vec{b} = (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3) - (3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$;

$3\vec{a} - 2\vec{b} = -3\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3$;

(3) (A) $\times 3 +$ (B) $\times 4$ 得 $17\vec{x} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$

$\therefore \vec{x} = \frac{3}{17}\vec{a} + \frac{4}{17}\vec{b}$, 同理 $\vec{y} = \frac{2}{17}\vec{a} - \frac{3}{17}\vec{b}$

3. 已知四边形 ABCD 中 $\vec{AB} = \vec{a} - 2\vec{c}, \vec{CD} = 5\vec{a} + 6\vec{b} - 8\vec{c}$, 对角线 AC, BD 中点分别为 E, F, 求 $\vec{EF}$ 。

解 取 BC 中点 G, 则 $\vec{EG} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}, \vec{GF}$
 $= \frac{1}{2}\vec{CD} = \frac{5}{2}\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}, \vec{EF} = \vec{EG} + \vec{GF} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c} +$

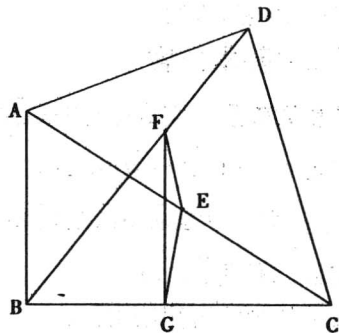


图 1-5

$$\frac{5}{2}\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$$

$$\therefore \vec{EF} = 3\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c}.$$

4. 设 $\vec{AB} = \vec{a} + 5\vec{b}$, $\vec{BC} = -2\vec{a} + 8\vec{b}$, $\vec{CD} = 3(\vec{a} - \vec{b})$, 证明 A、B、D 三点共线。

证明 $\because \vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = -2\vec{a} + 8\vec{b} + 3(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} + 5\vec{b}$, 即 $\vec{BD} = \vec{AB}$, $\therefore \vec{AB} \parallel \vec{BD}$, $\therefore$ A、B、D 三点共线。

5. 在四边形 ABCD 中, $\vec{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{BC} = -4\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{CD} = -5\vec{a} - 3\vec{b}$, 证明 ABCD 为梯形。

$$\text{证: } \because \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = 2(-4\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{BC}$$

$\therefore AD \parallel BC$, 且 $AD \neq BC$, 故 ABCD 为梯形。

6. 设 L、M、N 分别是 $\triangle ABC$ 三边 BC、CA、AB 的中点, 证明: 三中线向量 $\vec{AL}$ 、 $\vec{BM}$ 、 $\vec{CN}$ 可以构成一个三角形。

$$\text{证明 } \because \vec{AL} + \vec{BM} + \vec{CN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) + \frac{1}{2}$$

$(\vec{BC} + \vec{BA}) + \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB}) = \vec{0}$, 所以 $\vec{AL}$ 、 $\vec{BM}$ 、 $\vec{CN}$ 可以构成一个三角形。

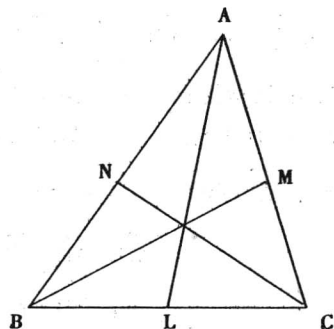


图 1-6

7. 设 L、M、N 分别是 $\triangle ABC$ 三边中点, O 是任意一点, 证明:

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OL} + \vec{OM} + \vec{ON}$$

$$\begin{aligned} \text{证 } \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} &= \vec{OL} + \vec{LA} + \vec{OM} + \vec{MB} + \vec{ON} + \vec{NC} \\ &= \vec{OL} + \vec{OM} + \vec{ON} + \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CB}) \\ &= \vec{OL} + \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{0} \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OL} + \vec{OM} + \vec{ON}$$

8. 设 M 是 $\square ABCD$ 的中心, O 是任意一点, 证明:

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 4\vec{OM}$$

$$\text{证明 } \because \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC}) = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OD})$$

$$\therefore 2\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$$

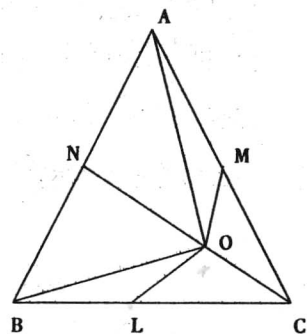
$$\text{即 } \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 4\vec{OM}$$

9. 在平行六面体 ABCDEFGH 中(参看 § 1.1 第 4 题图)中, 证明:

$$\vec{AC} + \vec{AF} + \vec{AH} = 2\vec{AG}$$

$$\text{证明 } \because \vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{AC} + \vec{AF} + \vec{AH} &= \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AB} + \vec{AE} + \vec{AD} + \vec{AE} \\ &= 2(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}) = 2\vec{AG} \end{aligned}$$



(第 7 题图)

10. 用向量法证明梯形两腰中点连线平行于上、下两底且等于它们长度和的一半。

证明 $\because \begin{aligned} \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} \\ \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \end{aligned}$
 $\therefore 2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$
 $\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$
 $\therefore \overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 同向, $\therefore \overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{DC}$ 同向
 且 $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}|)$, 得证。

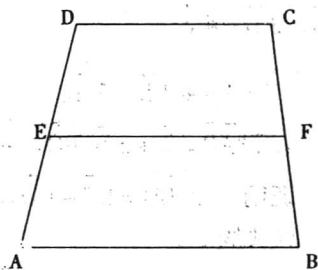


图 1-7

11. 用向量法证明平行四边形对角线互相平分。

证 设有平行四边形 ABCD, 取对角线 BD 中点 O,
 则 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ 。

而 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
 $\therefore \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

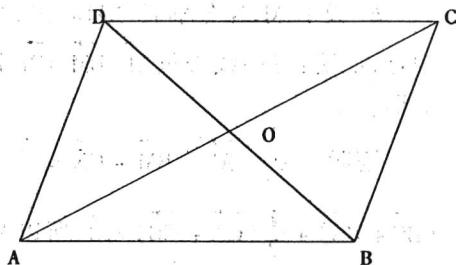


图 1-8

从而 A, O, C 三点共线, 且 O 为 AC 中点。

故对角线 AC、BD 互相平分。

12. 设点 O 是平面上正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心, 证明: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$

证明 设 $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{a}$,

将正 n 边形绕点 O 旋转 $\frac{2\pi}{n}$, 则旋转后 A_1 落在 A_2 , A_2 落在 $A_3 \cdots A_n$ 落在 A_1 , 从而正 n 边形仍重合。

$\therefore \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OA_n} + \overrightarrow{OA_1} + \cdots + \overrightarrow{OA_{n-1}} = \vec{a}$

即向量 $\vec{a}$ 经旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 后不变, 故 $\vec{a} = \vec{0}$ 。

$\therefore \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$ 。

13. 在上题条件下, 设 P 是任意点, 证明:

$$\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \cdots + \overrightarrow{PA_n} = n\overrightarrow{PO}$$

证明 $\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \cdots + \overrightarrow{PA_n} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_2}) + \cdots + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_n}) = n\overrightarrow{PO} + (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}) = n\overrightarrow{PO}$ 。

§ 1.4 矢量的线性关系与矢量的分解

(一) 学习要点

掌握一组矢量的线性组合的定义; 掌握共线矢量之间、共面矢量之间的关系; 掌握把一个

矢量分解成几个线性无关矢量的线性组合的方法,并求出线性组合的系数。

(二) 基本内容

1°线性组合 由矢量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ 与数量 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 所组成的矢量 $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$ 叫做矢量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ 的线性组合。也称:矢量 $\vec{a}$ 可以分解成矢量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ 的线性组合。

几个重要结论:

(1) 如果矢量 $\vec{e} \neq 0$,那么矢量 $\vec{r}$ 与 $\vec{e}$ 共线的充要条件是 $\vec{r}$ 可以用 $\vec{e}$ 来线性表示,即 $\vec{r} = x \vec{e}$ (其中系数 x 被 $\vec{e}, \vec{r}$ 唯一确定)。

(2) 如果矢量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 不共线,那么矢量 $\vec{r}$ 与 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 共面的充要条件是 $\vec{r}$ 可以分解为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 的线性组合,即 $\vec{r} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2$ (其中系数 x, y 被 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{r}$ 唯一确定)。

(3) 如果矢量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 不共面,那么空间任意矢量 $\vec{r}$ 可以由 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 线性表示,即 $\vec{r} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3$, (其中系数 x, y, z 被 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{r}$ 唯一确定)。

2°线性相关和线性无关 对于 $n(\geq 1)$ 个矢量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$,如果存在不全为零的 n 个数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 使得 $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$,那么称 n 个矢量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ 为线性相关的,否则叫做线性无关的。

几个重要定理如下:

(1) 矢量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n (n \geq 2)$ 线性相关的充要条件是其中有一个矢量是其余矢量的线性组合。

(2) 如果矢量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ 中有一部分矢量线性相关,则这一组矢量线性相关。

(3) 一个矢量 $\vec{a}$ 是线性相关的充要条件是 $\vec{a} = \vec{0}$;而两个矢量线性相关的充要条件是它们共线;三个矢量线性相关的充要条件是它们共面。

(4) 空间中四个矢量总是线性相关的。

(三) 习题及解答

1. 在平行四边形 ABCD 中,

(1) 设对角线 $\vec{AC} = \vec{a}, \vec{BD} = \vec{b}$,求 $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{DA}$;

(2) 设边 BC 和 CD 的中点为 M 和 N,且 $\vec{AM} = \vec{p}, \vec{AN} = \vec{q}$,求 $\vec{BC}, \vec{CD}$ 。

解 (1) $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \frac{1}{2} \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{DB} = \frac{1}{2} (\vec{a} -$

$\vec{b})$

同理 $\vec{BC} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}), \vec{CD} = \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a}), \vec{DA} = -\frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$

(2) $\therefore \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC} = \vec{AM} = \vec{p}$

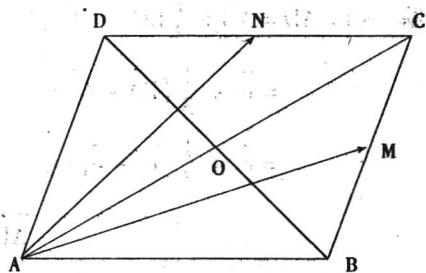


图 1-9

$$\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC} = \vec{AN} = \vec{q}$$

即

$$-\vec{CD} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{p} \quad ①$$

$$\frac{1}{2}\vec{DC} + \vec{BC} = \vec{q} \quad ②$$

由①②可解得 $\vec{BC} = \frac{4\vec{q} - 2\vec{p}}{3}$; $\vec{CD} = \frac{2\vec{q} - 4\vec{p}}{3}$ 。

2. 在平行六面体 ABCD—EFGH 中(参看 §1, 第4题图)设 $\vec{AB} = \vec{e}_1$, $\vec{AD} = \vec{e}_2$, $\vec{AE} = \vec{e}_3$, 三个面上对角线矢量设为 $\vec{AC} = \vec{p}$, $\vec{AH} = \vec{q}$, $\vec{AF} = \vec{r}$, 试把矢量 $\vec{a} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{q} + \nu\vec{r}$ 写成 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 的线性组合。

$$\begin{aligned} \text{解 } \vec{a} &= \lambda\vec{AC} + \mu\vec{AH} + \nu\vec{AF} \\ &= \lambda(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \mu(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) + \nu(\vec{e}_3 + \vec{e}_1) \\ &= (\lambda + \nu)\vec{e}_1 + (\lambda + \mu)\vec{e}_2 + (\mu + \nu)\vec{e}_3. \end{aligned}$$

3. 设一直线上三点 A、B、P 满足 $\vec{AP} = \lambda\vec{PB}$ ($\lambda \neq -1$), O 是空间任意一点, 求证:

$$\vec{OP} = \frac{\vec{OA} + \lambda\vec{OB}}{1 + \lambda}$$

证明 由 $\vec{AP} = \lambda\vec{PB}$ 得

$$\vec{OP} - \vec{OA} = \lambda(\vec{OB} - \vec{OP})$$

$$\therefore (1 + \lambda)\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda\vec{OB}$$

$$\therefore 1 + \lambda \neq 0, \therefore \vec{OP} = \frac{\vec{OA} + \lambda\vec{OB}}{1 + \lambda}$$

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 设 $\vec{AB} = \vec{e}_1$, $\vec{AC} = \vec{e}_2$ 。

(1) 设 D、E 是边 BC 的三等分点, 将 $\vec{AD}, \vec{AE}$ 分解为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 的线性组合;

(2) 设 AT 是角 A 的平分线(它与 BC 交于 T 点), 将 $\vec{AT}$ 分解为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 的线性组合。

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad \vec{AD} &= \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC} \\ &= \vec{e}_1 + \frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{AC}) \\ &= \vec{e}_1 + \frac{1}{3}(\vec{e}_2 - \vec{e}_1) \end{aligned}$$

故

$$\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2,$$

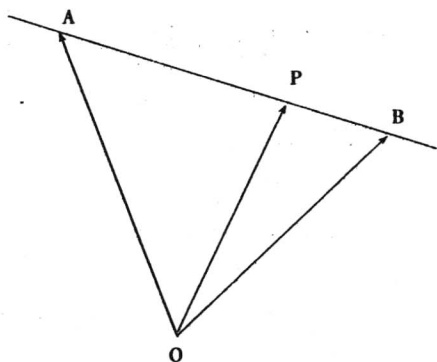


图 1-10

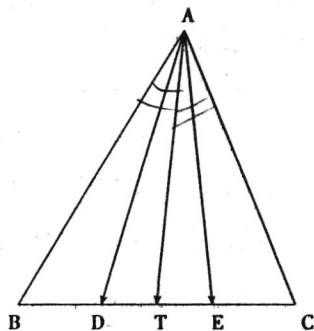


图 1-11

同理

$$\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2$$

(2) 由角平分线性质有:

$$|\vec{BT}| : |\vec{TC}| = |\vec{AB}| : |\vec{AC}|$$

即

$$|\vec{BT}| : |\vec{TC}| = |\vec{e}_1| : |\vec{e}_2|$$

故

$$\vec{BT} = \frac{|\vec{e}_1|}{|\vec{e}_2|} \cdot \vec{TC};$$

由第3题结果有:

$$\vec{AT} = \frac{\vec{AB} + \frac{|\vec{e}_1|}{|\vec{e}_2|}\vec{AC}}{1 + \frac{|\vec{e}_1|}{|\vec{e}_2|}}$$

整理得

$$\vec{AT} = \frac{1}{|\vec{e}_1| + |\vec{e}_2|} (|\vec{e}_2|\vec{e}_1 + |\vec{e}_1|\vec{e}_2)$$

5. 在四面体 OABC 中, 设 G 是 $\triangle ABC$ 重心, 求向量 $\vec{OG}$ 对于向量 $\vec{OA}$ 、 $\vec{OB}$ 、 $\vec{OC}$ 的分解式。

$$\text{解 } \vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AG}$$

$$= \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{AF}$$

$$= \vec{OA} + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \right]$$

$$= \vec{OA} + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2}(\vec{OB} - \vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OA}) \right]$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

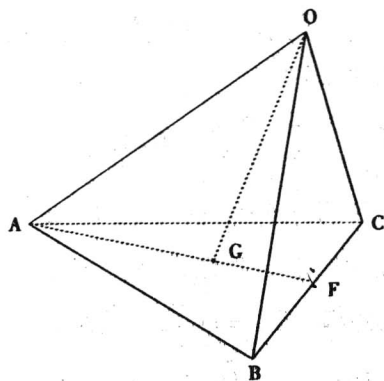


图 1-12

6. 用向量法证明以下各题:

(1) 三角形三中线共点;

(2) P 是 $\triangle ABC$ 重心的充要条件是 $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$ 。

证明 (1) 设 $\triangle OAB$ 的中线 AD 和 BE 交于点 M。记 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, F 为 AB 中点, 则

$$\vec{OM} = \vec{OE} + \vec{EM} = \vec{OE} + m\vec{EB}$$

$$= \vec{OE} + m(\vec{OB} - \vec{OE})$$

$$= \frac{1}{2}\vec{a} + m(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a})$$

$$\text{从而 } \vec{OM} = \frac{1}{2}(1-m)\vec{a} + m\vec{b}$$

①

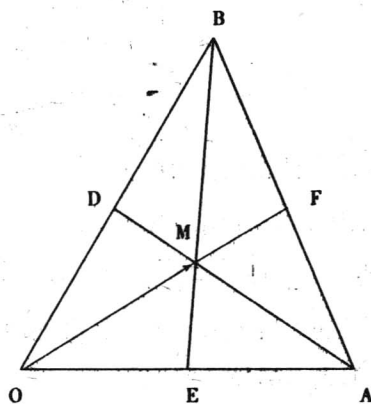


图 1-13

同理又可得

$$\vec{OM} = n\vec{a} + \frac{1}{2}(1-n)\vec{b} \quad ②$$

由①②解得 $m = n = \frac{1}{3}$

$$\therefore \vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{OF}$$

$\therefore \vec{OF}$ 与 $\vec{OM}$ 共线,故三中线共点M。

(2) 必要性:若P为重心,则

$$\begin{aligned} \vec{PA} &= -2\vec{PD} = -2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{PB} + \vec{PC}) \\ &= -(\vec{PB} + \vec{PC}) \end{aligned}$$

$\therefore \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$ (图中D为BC中点)

充分性:由 $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$ 得

$$\vec{PA} = -(\vec{PB} + \vec{PC}) = -2\vec{PD}$$

$\therefore P$ 为 $\triangle ABC$ 重心。

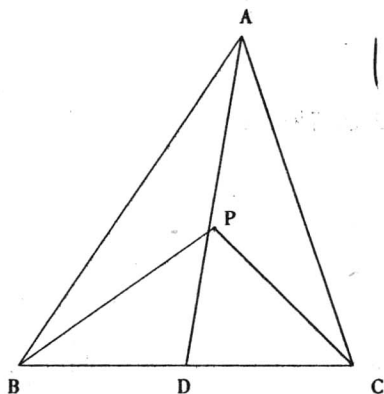


图 1-14

7. 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线,问 $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$

是否线性相关?

解 $\because \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, 根据 § 1.4 例 4 结论得: $\vec{c} \nparallel \vec{d}$, 故 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 线性无关。

8. 证明三矢量 $\vec{a} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{b} = 4\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{c} = -3\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 11\vec{e}_3$ 共面, 其中 $\vec{a}$ 能否用 $\vec{b}, \vec{c}$ 线性表示? 如能表示, 写出线性表示关系式。

证并解 设 $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$, 把已知条件代入整理: $(4m - 3n + 1)\vec{e}_1 + 3(-2m + 4n - 1)\vec{e}_2 + (2m + 11n - 2)\vec{e}_3 = \vec{0}$, $\because \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 线性无关, 上式中 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 系数均为零, 故得方程组

$$\begin{cases} 4m - 3n + 1 = 0 \\ 2m - 4n + 1 = 0 \\ 2m + 11n - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{解得} \quad m = -\frac{1}{10}, n = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \vec{a} = -\frac{1}{10}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}$$

从而 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 线性相关(共面)。

9. 证明 $\lambda\vec{a} - \mu\vec{b}$, $\mu\vec{b} - \nu\vec{c}$, $\nu\vec{c} - \lambda\vec{a}$ 共面

证明 $\because (\lambda\vec{a} - \mu\vec{b}) + (\mu\vec{b} - \nu\vec{c}) + (\nu\vec{c} - \lambda\vec{a}) = \vec{0}$, 故它们线性相关, 从而共面。

10. 设 $\vec{OP}_i = \vec{r}_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 试证 P_1, P_2, P_3, P_4 四点共面的充要条件是存在不全为零的实数 $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 使

$$\lambda_1 \vec{r}_1 + \lambda_2 \vec{r}_2 + \lambda_3 \vec{r}_3 + \lambda_4 \vec{r}_4 = \vec{0}, \text{ 且 } \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 0$$

证明 必要性: 若 P_1, P_2, P_3, P_4 四点共面, 则 $\vec{P_4P_1}, \vec{P_4P_2}, \vec{P_4P_3}$ 三矢共面, 故存在不全为零的

实数 $\lambda_i (i=1,2,3)$ 使 $\lambda_1 \overrightarrow{P_4P_1} + \lambda_2 \overrightarrow{P_4P_2} + \lambda_3 \overrightarrow{P_4P_3} = \vec{0}$, 即

$$\lambda_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_4) + \lambda_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_4) + \lambda_3(\vec{r}_3 - \vec{r}_4) = \vec{0}, \text{整理得:}$$

$$\lambda_1 \vec{r}_1 + \lambda_2 \vec{r}_2 + \lambda_3 \vec{r}_3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \vec{r}_4 = \vec{0}$$

令 $\lambda_4 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$, 有 $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = 0$, 且 $\lambda_i (i=1,2,3,4)$ 不全为零, 使 $\sum_{i=1}^4 \lambda_i \vec{r}_i = \vec{0}$.

充分性: 若存在不全为零的实数 $\lambda_i (i=1,2,3,4)$, 使 $\lambda_1 \vec{r}_1 + \lambda_2 \vec{r}_2 + \lambda_3 \vec{r}_3 + \lambda_4 \vec{r}_4 = \vec{0}$, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$, 故 $\lambda_4 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$, 从而可得

$$\lambda_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_4) + \lambda_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_4) + \lambda_3(\vec{r}_3 - \vec{r}_4) = \vec{0}, \text{即}$$

$$\lambda_1 \overrightarrow{P_4P_1} + \lambda_2 \overrightarrow{P_4P_2} + \lambda_3 \overrightarrow{P_4P_3} = \vec{0}$$

其中 $\lambda_i (i=1,2,3)$ 不全为零 (否则 $\lambda_4 = 0$, 与设矛盾)

$\therefore \overrightarrow{P_4P_1}, \overrightarrow{P_4P_2}, \overrightarrow{P_4P_3}$ 共面, 从而 P_1, P_2, P_3, P_4 共面。

§ 1.5 标架与坐标

(一) 学习要点

掌握空间标架的建立、矢量的分量(坐标)、点的坐标的概念及其表示方法, 会把点 P 的径矢 $\overrightarrow{OP}$ 用坐标矢量线性表示出来, 从而求出点 P 的坐标; 掌握坐标轴、坐标平面、各卦限点的坐标的特征; 掌握用点的坐标表示矢量的分量, 用矢量的分量进行矢量的线性运算以及表示矢量的线性关系和线段定比分点坐标。

(二) 基本内容

1° 标架 直线上的一个定点 O 连同在直线上的一个非零矢量 $\vec{e}$ 的全体称为直线上的仿射标架, 记作 $\{O; \vec{e}\}$ 。

平面上的一个定点 O 及两个不共面的有序矢量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 的全体称为空间上的仿射标架, 记作 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 。

空间的一点 O 与三个不共面的有序矢量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 的全体称为空间的仿射标架, 记作 $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ 。

特别地, 以空间为例, 称 $\{O; \vec{e}_1^0, \vec{e}_2^0, \vec{e}_3^0\}$ 为笛卡尔标架; $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 为笛卡尔直角标架 (简称直角标架), 其中 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 为两两互相垂直的么矢。

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 的排列顺序符合左手规则时, 称为左旋(手)标架, 反之称为右旋(手)标架。

2° 坐标 以空间为例: 在直角标架 $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 下, 对于空间中任一点 P , 有一个有序实数组 x, y, z 与之——对应, 称 (x, y, z) 为点 P 在 $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 下的坐标; 类似地, 空间中任一点矢量 $\vec{r}$ 都可以表示成 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 的线性组合: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, 称 $\{x, y, z\}$ 为矢量 $\vec{r}$ 的坐标分量表示。

3° 用矢量的分量进行矢量的线性运算