山西新晋科教文化中心　策划

矩阵的研究

MATRICES RESEARCH

张红玉　魏慧敏　编著

山西出版集团
山西人民出版社

山西新晋科教文化中心　策划

矩阵的研究

MATRICES RESEARCH

张红玉　魏慧敏　编著

山西出版集团
山西人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

矩阵的研究/张红玉，魏慧敏主编．—太原：山西人民出版社，2010.7

ISBN 978-7-203-06875-4

Ⅰ．①矩…　Ⅱ．①张…②魏…　Ⅲ．①矩阵—研究

Ⅳ．①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 123479 号

矩阵的研究

著　　者：张红玉　魏慧敏
责任编辑：贾　娟
装帧设计：陶雅娜

出 版 者：山西出版集团・山西人民出版社
地　　址：太原市建设南路 21 号
邮　　编：030012
发行营销：0351-4922220　4955996　4956039
0351-4922127（传真）　4956038（邮购）
E-mail：sxskcb@163.com　发行部
sxskcb@126.com　总编室
网　　址：www.sxskcb.com

经 销 者：山西出版集团・山西人民出版社
承 印 者：山西辰昱印务有限公司

开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：9
字　　数：200 千字
印　　数：1—1000 册
版　　次：2010 年 7 月　第 1 版
印　　次：2010 年 7 月　第 1 次印刷
书　　号：ISBN　978-7-203-06875-4
定　　价：26.00 元

前言 Forwords

本书通过矩阵与行列式、线性方程组、二次型、线性变换及多项式之间的联系总结了矩阵的地位及作用。并且通过典型例题给出了应用矩阵解题的方法,同时也包含了作者多年的教学成果。

全书共分七章,第一章矩阵、第二章行列式与矩阵、第三章线性方程组与矩阵由魏慧敏执笔,第四章二次型与矩阵由魏慧敏、张红玉执笔,第五章线性空间与矩阵、第六章线性变换与矩阵、第七章多项式与矩阵由张红玉执笔。各章详细地介绍了有关矩阵的重要定理结论,然后通过相关典型例题的详细解析给出矩阵在其中的应用。

本书可以作为数学、应用数学、物理、计算机及其他工科类各专业的参考书,特别可作为硕士研究生的参考书,也可作为高校教师的参考资料。希望此书能帮助读者培养学习矩阵代数的兴趣,能引导启发读者掌握解决问题的思路和方法。

在编写过程中,作者参考了国内外的许多名家之作,在此表以致谢。由于编者学识浅薄,书中难免有缺点不足之处,敬请专家、同行和读者批评指正。

编者

2009 年 11 月

目 录

CONTENTS

前言 …… 1

第一章　矩阵 …… 1
　§1 矩阵 …… 1
　§2 λ－矩阵 …… 9

第二章　行列式与矩阵 …… 29
　§1 行列式 …… 29
　§2 行列式与矩阵 …… 32

第三章　线性方程组与矩阵 …… 55
　§1 线性方程组 …… 55
　§2 线性方程组与矩阵 …… 57

第四章　二次型与矩阵 …… 71
　§1 二次型 …… 71
　§2 二次型与矩阵 …… 73

第五章　线性空间与矩阵 …… 87
　§1 线性空间 …… 87
　§2 线性空间与矩阵 …… 90

第六章　线性变换与矩阵 …… 108
　§1 线性变换 …… 108
　§2 线性变换和矩阵 …… 109

第七章　多项式与矩阵 …… 128
　§1 多项式 …… 128
　§2 多项式与矩阵 …… 133

参考文献 …… 140

第一章 矩 阵

§1 矩 阵

一、矩阵的运算

1. 相等:设 $A=(a_{ij})_{mn}$,$(b_{ij})_{lk}$,如果 $m=l,n=k$,且 $a_{ij}=b_{ij}$,对 $i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$ 都成立,我们就说 $A=B$.

2. 加法:设 $A=(a_{ij})_{sn},B=(b_{ij})_{sn}$是两个同型矩阵(即都是 $s\times n$ 矩阵),则矩阵 $C=(c_{ij})_{sn}=(a_{ij}+b_{ij})_{sn}$称为 A 和 B 的和,记为 $C=A+B$. 元素全为零的矩阵称为零矩阵,记为 O_{sn},可简单地记为 O. 对所有的 A,有$A+O=A$.

$$A+(-A)=O$$
$$A-B=A+(-B)$$

3. 乘法:设

$$A=(a_{ik})_{sn},B=(b_{kj})_{nm},$$

那么矩阵

$$C=AB=(c_{ij})_{sm}$$

称为矩阵 A 与 B 的乘积,其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},$$

即矩阵 A 与 B 的乘积 C 的第 i 行第 j 列的元素 c_{ij}等于第一个矩阵 A 的第 i 行与第二个矩阵 B 的第 j 列的对应元素的乘积的和. 当然,在乘积的定义中,我们要求第二个矩阵的行数与第一个矩阵的列数相等.

例 1 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\-1&1&3&0\\0&5&-1&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&2&1\\3&1&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}$,

那么 $AB=\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\-1&1&3&0\\0&5-&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&4\\1&2&1\\3&1&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&6&7\\10&2&-6\\-2&17&10\end{pmatrix}$

矩阵的乘法适合结合律:$(AB)C=A(BC)$.

但是矩阵的乘法不适合交换律、消去律,即一般说来

$$AB\neq BA.$$

当 $AB=AC$ 时,不一定有 $B=C$.

例如,设

$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$

$AC=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$

$BA=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}.$

注:两个不为零的矩阵的乘积可以是零.

矩阵的乘法和加法还适合分配律,即

$$A(B+C)=AB+AC,$$
$$(B+C)A=BA+BC.$$

我们还可以定义矩阵的方幂.设 A 是一 $n\times n$ 矩阵,定义

$$\begin{cases} A^0=E \\ A^1=A \\ A^{k+1}=A^kA \end{cases}$$

换句话说,A^k 就是 k 个 A 连乘..由乘法的结合律,易得

$$A^kA^l=A^{k+l},$$
$$(A^k)^l=A^{kl}.$$

这里 k,l 是任意正整数.因矩阵乘法不适合交换律,故$(AB)^k$ 与 A^kB^k 一般不相等.

1)$A=(a_{ij})_{n\times n}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$

ε_i 表示 n 维单位列向量,则 $A\varepsilon_j=\alpha_j,\varepsilon_i^TA=\beta_i$

2)$(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_{n-1})\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_2\\ \beta_3\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$

$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}0\\ \varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_{n-1}\end{pmatrix}(0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1})$

3)$E_{ij}E_{kl}=\begin{cases}E_{ij}, j=k \text{ 时}\\ 0, j\neq k \text{ 时}\end{cases}$

4) $\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} k_1 a_{11} & \cdots & k_1 a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_n a_{n1} & \cdots & k_n a_{nn} \end{pmatrix}$

$\to A \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 a_{11} & \cdots & k_1 a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_n a_{n1} & \cdots & k_n a_{nn} \end{pmatrix}$

4. 数量乘法:矩阵

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 $A=(a_{ij})_{sn}$ 与数 k 的数量乘积,记为 kA. 换句话说,用数 k 乘矩阵就是把矩阵的每个元素都乘上 k.

5. 矩阵的转置:把一矩阵 A 的行列互换,所得到的矩阵称为 A 的转置,记为 A'.

$(A')'=A$,

$(A+B)'=A'+B'$,

$(AB)'=B'A'$,

$(kA)'=kA'$.

6. 子式:在一个 $s\times n$ 矩阵 A 中任意选定 k 行和 k 列,位于这些选定的行和列的交点上的 k^2 个元素按原来的次序所组成的 k 级行列式,称为 A 的一个 k 级子式. 其中 $k\leqslant \min(s,n)$.

二、特殊矩阵

1. 单位矩阵: 对角线元素都为 1,其余元素为 0 的 n 阶方阵
2. 对角矩阵: 对角线之外的元素都为 0 的 n 阶方阵
3. 三角矩阵: 对角线以上(或以下)元素全为 0 的 n 阶方阵
4. 对称矩阵: 满足 $A'=A$ 的 n 阶方阵 A.
5. 反对称矩阵: 满足 $A'=-A$ 的 n 阶方阵 A
6. 幂等矩阵: 满足 $A^2=A$ 的 n 阶方阵 A
7. 幂零矩阵: 满足 $A^k=O$ 的 n 阶方阵 A
8. 对合矩阵: 满足 $A^2=E$ 的 n 阶方阵 A
9. 正交矩阵: 满足 $A'=A^{-1}$ 的 n 阶方阵 A
10. 循环矩阵:形如 $A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$ 的 n 阶方阵.
11. 埃尔米特矩阵:满足 $\overline{A}^T=A$ 的 n 阶方阵 A
12. 右伪逆矩阵: 设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵,规定:$A^{RM}=A'(AA')^{-1}$ 为右伪逆矩阵. 即 $AA^{RM}=AA'$

$(A'A)^{-1}=E$

13. 左伪逆矩阵:设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵,规定:$A^{LM}=(A'A)^{-1}A'$为左伪逆矩阵. 即 $A^{LM}A=(A'A)^{-1}A'A=E$

14. 若尔当(*Jordan*)块:形如

$$J(\lambda,t)=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda\end{pmatrix}_{t\times t}$$

的矩阵,其中 λ 是复数.

15. 若尔当形矩阵:由若干个若尔当块组成的准对角矩阵. 其一般形状如

$$\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s\end{pmatrix}$$

三、矩阵的秩

1. 矩阵的秩的表述:

1)矩阵的行秩与列秩统称为矩阵的秩.

2)矩阵的不为零的子式的最大阶数称为矩阵的秩.

3)矩阵的秩是 r,若矩阵中有一个 r 级子式不为零,同时所有 $r+1$ 级子式全为零.

注 (1)矩阵 A 的秩$\geqslant r$ 的充要条件为有一个 r 级子式不为零

(2)矩阵的秩$\leqslant r$ 的充要条件为的所有 $r+1$ 级子式全为零.

(3)在秩为 r 的矩阵中,不为零的 r 级子式所在的行正是它行向量组的一个极大线性无关组,所在的列正是它列向量的一个极大线性无关组.

计算矩阵秩的方法:对矩阵作行的初等变换,把矩阵化成阶梯形,这个阶梯形矩阵中非零的行的个数就是原来矩阵的秩.

定理 1 设 A,B 是数域 P 上 $n\times m$ 矩阵,则

$r(A\pm B)\leqslant r(A)+r(B)$

$r(A\pm B)\geqslant r(A)-r(B)$

定理 2 设 A 是数域 P 上 $n\times m$ 矩阵,B 是数域 P 上 $m\times s$ 矩阵,于是

秩$(AB)\leqslant\min$[秩(A),秩(B)],

推论 1 如果 $A=A_1A_2\cdots A_t$,那么

秩$(A)\leqslant\min\limits_{1\leqslant j\leqslant t}$(秩 A_j).

推论 2 设 A 是数域 P 上 $n\times m$ 矩阵,B 是数域 P 上 n 阶可逆矩阵,C 是数域 P 上 n 阶可逆矩阵,则

$r(BAC)=r(BA)=r(AC)=r(A)$

定理 3 $r(AB)=r(B)$的充要条件为 $BX=0$ 与 $ABX=0$ 同解; $r(AB)=r(A)$ 的充要条件为 $A^TX=0$ 与 $B^TA^TX=0$ 同解.

定理 4 设 $A_{s\times n}B_{n\times m}=C_{s\times m}$,则 $r(A)+r(B)-n\leqslant r(C)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}$

推论 3 若 $A_{s\times n}B_{n\times m}=0$,则 $r(A)+r(B)\leqslant n$.

定理 5 设 $D=\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$,则 $r(A)+r(B)\leqslant r(D)$

定理 6 设 $M=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$,则 $r(A)+r(B)=r(M)$

3. 初等矩阵:由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

初等矩阵都是可逆的,它们的逆矩阵还是初等矩阵. 即

$P(i,j)^{-1}=P(i,j)$,$P(i(c))^{-1}=P(i(c^{-1}))$,$P(i,j(k))^{-1}=P(i,j(-k))$

4. 矩阵等价:A 与 B 如果可以经过一系列初等变换互得,就称 A 与 B 等价.

等价具有反身性、对称性与传递性.

定理 7 若 A 是 n 级矩阵($n\geqslant 2$),则

$$\text{秩}(A^*)=\begin{cases} n, & \text{若秩}(A)=n; \\ 1, & \text{若秩}(A)=n-1; \\ 0, & \text{若秩}(A)<n-1. \end{cases}$$

四、矩阵的逆

1. 逆矩阵:对于 n 级方阵 A,如果有 n 级方阵 B,使得 $AB=E$(E 是 n 级单位矩阵),则称 A 可逆,B 就称为 A 的逆矩阵,记为 A^{-1}.

2. 伴随矩阵:设 A_{ij}是矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

中元素 a_{ij}的代数余子式,矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的伴随矩阵.

$$AA^*=A^*A=\begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d \end{pmatrix}=dE,\text{其中 } d=|A|$$

定理 7 矩阵 A 可逆的充要条件是 A 非退化的,而且

$A^{-1}=\frac{1}{d}A^*\ (d=|A|\neq 0)$

注 如果 $|A|=d\neq 0$,那么

$|A^{-1}|=d^{-1}$

例:已知 $A^2-2A+3E=0$,求证 A 可逆,并求 A^{-1}.

解:由 $A^2-2A+3E=0$ 得 $\frac{1}{3}(A^2-2A)=E$,

即 $\frac{1}{3}(A-2E)A=E$,

从而 A 可逆,且 $A^{-1}=\frac{1}{3}(A-2E)$.

定理 8 如果矩阵 A,B 可逆,那么 A' 与 AB 也可逆,且

$(A')^{-1}=(A^{-1})'$

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

定理 9 矩阵 A,B 等价的充要条件是有初等矩阵 $P_1,\cdots,P_l,Q_1,\cdots,Q_t$ 使

$A=P_1P_2\cdots P_lBQ_1Q_2\cdots Q_t$.

定理 10 n 级矩阵 A 为可逆的充要条件是它能表成一些初等矩阵的乘积:

$A=Q_1Q_2\cdots Q_m$.

推论 4 两个 $s\times n$ 矩阵 A,B 等价的充要条件为,存在可逆的 s 级矩阵 P 与可逆的 n 级矩阵 Q 使

$A=PAQ$.

推论 5 可逆矩阵总可以经过一系列初等行变换化成单位矩阵. 即

设 A 是一 n 级可逆矩阵,有一系列初等矩阵 $P_1,\cdots,P_m$ 使

$$P_m\cdots P_1A=E, \tag{1}$$

由(4)即得

$$P_m\cdots P_1E=A^{-1}. \tag{2}$$

(1),(2)两个式子说明,如果用一系列初等行变换把可逆矩阵 A 化成单位矩阵,那么同样地用这一系列初等行变换去化单位矩阵,就得到 A^{-1}.

把 A,E 这两个 $n\times n$ 矩阵凑在一起,作成一个 $n\times 2n$ 矩阵 $(A\quad E)$,则

$$(A\quad E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\quad A^{-1})$$

同理,可逆矩阵也能用初等列变换化成单位矩阵,这就给出了用初等列变换求逆矩阵的方法.

五、分块矩阵

乘法:设 $A=(a_{ik})_{sn}$,$B=(b_{kj})_{nm}$,把 A,B 分成一些小矩阵

$$A=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \end{array} \\
\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tl} \end{pmatrix}
\end{array},\quad B=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\
\begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{array} & \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{l1} & B_{l2} & \cdots & B_{lr} \end{pmatrix}
\end{array},$$

其中每个 A_{ij} 是 $s_i\times n_j$ 小矩阵,每个 B_{ij} 是 $n_i\times m_j$ 小矩阵,于是有

$$C=AB=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\
\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array} & \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{t1} & C_{t2} & \cdots & C_{tr} \end{pmatrix}
\end{array},$$

其中

$C_{pq}=A_{p1}B_{1q}+A_{p2}B_{2q}+\cdots+A_{pl}B_{lq}=\sum\limits_{k=1}^{l}A_{pk}B_{kq}(p=1,2,\cdots,t;q=1,2,\cdots,r)$.

注:在分块(1),(2)中矩阵 A 的列分法必须与矩阵 B 的行的分法一致.

分块矩阵在矩阵乘法中的应用:

对于 n 阶方阵 A 可以写成$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$或$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$(任意矩阵类似)

$B_1,B_2,\cdots,B_m$ 表示 B 的行向量,于是 $B=\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\\ \vdots\\ B_m\end{pmatrix}$,

按分块相乘,就有

$$AB=\begin{pmatrix}a_{11}B_1+a_{12}B_2+\cdots+a_{1m}B_m\\ a_{21}B_1+a_{22}B_2+\cdots+a_{2m}B_m\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}B_1+a_{n2}B_2+\cdots+a_{nm}B_m\end{pmatrix}.$$

可以看出 AB 的行向量是 B 的行向量的线性组合;将 AB 进行另一种分块乘法,从结果中可以看出 AB 的列向量是 A 的列向量的线性组合.

例 求矩阵

$$D=\begin{pmatrix}a_{11}\cdots a_{1k}0\cdots 0\\ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\\ a_{k1}\cdots a_{kk}0\cdots 0\\ c_{11}\cdots c_{1k}b_{11}\cdots b_{1r}\\ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\\ c_{r1}\cdots c_{rk}b_{r1}\cdots b_{rr}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & O\\ C & B\end{pmatrix}$$

的逆矩阵,其中 A,B 分别是 k 级和 r 级的可逆矩阵,C 是 $r\times k$ 矩阵,O 是 $k\times r$ 零矩阵.

解:因为

$|D|=|A||B|$,

所以当 A,B 可逆时,D 也可逆. 设

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix}A & O\\ C & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_k & O\\ O & E_r\end{pmatrix},$$

这里 E_k,E_r 分别表示 k 级和 r 级单位矩阵. 乘出来并比较等式两边,得

$$\begin{cases}AX_{11}=E_k,\\AX_{12}=O,\\CX_{11}+BX_{21}=O,\\CX_{12}+BX_{22}=E_r.\end{cases}$$

由第一、二式得

$X_{11}=A^{-1},X_{12}=A^{-1}O=O,$

代入第四式,得

$X_{22}=B^{-1},$

代入第三式,得

$BX_{21}=-CX_{11}=-CA^{-1},X_{21}=-B^{-1}CA^{-1}.$

因此

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\end{pmatrix}.$$

特别地,当 $C=O$ 时,有

$$\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\O&B^{-1}\end{pmatrix}.$$

形如:$\begin{pmatrix}A_1&&&O\\&A_2&&\\&&\ddots&\\O&&&A_2\end{pmatrix}$的分块矩阵,其中 A_i 是 $n_i\times n_i$ 矩阵($i=1,2,\cdots,l$),通常称为准对角矩阵. 准对角矩阵包括对角矩阵作为特殊情形.

对于两个有相同分块的准对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1&&&O\\&A_2&&\\&&\ddots&\\O&&&A_l\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}B_1&&&O\\&B_2&&\\&&\ddots&\\O&&&B_l\end{pmatrix},$$

如果它们相应的分块是同级的,那么有

$$AB=\begin{pmatrix}A_1B_1&&&O\\&A_2B_2&&\\&&\ddots&\\O&&&A_lB_l\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}A_1+B_1&&&O\\&A_2+B_2&&\\&&\ddots&\\O&&&A_l+B_l\end{pmatrix}$$

它们还是准对角矩阵.

其次,如果 $A_1,A_2,\cdots,A_l$ 都是可逆矩阵,那么

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l^{-1} \end{pmatrix}.$$

分块矩阵的初等变换称为广义初等变换：

(1)两行(列)对换；

(2)一行(列)左乘(右乘)一个矩阵 P；

(3)一行(列)加上另一行(列)的 P (矩阵)倍数.

单位分块矩阵：$\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$实施广义初等变换后得到如下类型的矩阵：

$$\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix},\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & P \end{pmatrix},\begin{pmatrix} E_m & P \\ O & E_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}.$$

这五类分块方阵称为广义初等矩阵. 和初等矩阵与初等变换的关系一样，用这些矩阵左乘任一个分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

只要分块乘法能够进行，其结果就是对它进行相应的变换：

$$\begin{pmatrix} O & E_m \\ E_n & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C+PA & D+PB \end{pmatrix}. \tag{5}$$

同样，用它们右乘任一矩阵，进行分块乘法时也有相应的结果.

在(5)中，适当选择 P，可使 $C+PA=O$. 例如 A 可逆时，选 $P=-CA^{-1}$，则 $C+PA=O$. 于是(5)的右端成为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

这种形状的矩阵在求行列式、逆矩阵和解决其它问题时是比较方便的，因此(5)中的运算非常有用.

§2 λ－矩 阵

1. λ－矩阵：一个矩阵的元素是 λ 的多项式，即 $P[\lambda]$的元素，就称为 λ－矩阵. 用 $A(\lambda)$，$B(\lambda)$，…等表示.

注(1)数域 P 中的数为元素的矩阵称为数字矩阵，它是特殊的 λ－矩阵.

(2)λ－矩阵的加法与乘法，它们与数字矩阵的运算有相同的运算规律.

(3)λ - 矩阵的行列式是 λ 的一个多项式,它与数字矩阵的行列式有相同的性质. 例:矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积.

2. λ - 矩阵的秩:如果 λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 中有一个 $r(r\geqslant 1)$ 级子式不为零,而所有 $r+1$ 级子式(如果有的话)全为零,则称 $A(\lambda)$ 的秩为 r. 零矩阵的秩规定为零.

3. λ - 矩阵的逆:如果有一个 $n\times n$ 的 λ - 矩阵 $B(\lambda)$ 使

$A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=E$,

这里 E 是 n 级单位矩阵. 矩阵 $B(\lambda)$(它是唯一的)称为 $A(\lambda)$ 的逆矩阵,记为 $A^{-1}(\lambda)$.

4. λ - 矩阵的初等变换:

(1)矩阵的两行(列)互换位置;

(2)矩阵的某一行(列)乘以非零的常数 c;

(3)矩阵有某一行(列)加另一行(列)的 $\varphi(\lambda)$ 倍,$\varphi(\lambda)$ 是一个多项式.

5. λ - 矩阵的等价:如果可以经过一系列初等变换将 $A(\lambda)$ 化为 $B(\lambda)$,$A(\lambda)$ 称为与 $B(\lambda)$ 等价

等价是 λ - 矩阵之间的一种关系,(!) 反身性 (2) 对称性 (3) 传递性

6. 行列式因子:设 λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为 r,对于正整数 k,$1\leqslant k\leqslant r$,,$A(\lambda)$ 中必有非零的 k 级子式. $A(\lambda)$ 中全部 k 级子式的首项系数为 1 的最大公因式 $D_k(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 k 级行列式因子.

7. 不变因子:标准形的主对角线上非零元素 $d_1(\lambda)$,$d_2(\lambda)$,$\cdots$,$d_r(\lambda)$ 称为 λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 的不变因子.

8. 初等因子:把矩阵 A(或线性变换 A)的每个次数大于零的不变因子分解成互不相同的一次因式方幂的乘积,所有这些一次因式方幂(相同的必须按出现的次数计算)称为矩阵 A(或线性变换 A)的初等因子.

定理 1 一个 $n\times n$ 的 λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 是可逆的充要条件为行列式 $|A(\lambda)|$ 是一个非零的数.

定理 2 矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充要条件为有一系列初等矩阵

$P_1,P_2,\cdots,P_l,Q_1,Q_2,\cdots,Q_t$,使

$A(\lambda)=P_1P_2\cdots P_lB(\lambda)Q_1Q_2\cdots Q_t$.

定理 3 任意一个非零的 $s\times n$ 的 λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 都等价于下列形式的矩阵,即任意一个 λ - 矩阵可以经过初等变换化为某种对角矩阵.

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (\star)$$

其中 $r\geqslant 1$,$d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,r)$ 是首项系数为 1 的多项式,且

$d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)(i=1,2,\cdots,r-1)$.

矩阵($\star$)称为 $A(\lambda)$ 的标准形,且唯一.

例 用初等变换化 λ - 矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\lambda-1 & \lambda\\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^3+\lambda-1 & -\lambda^2\end{pmatrix}$$

为标准形.

$$A(\lambda)\to\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\lambda-1 & 1\\ \lambda & \lambda^2 & 0\\ 1+\lambda^2 & \lambda^3+\lambda-1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2\lambda-1 & 1-\lambda\\ 0 & \lambda^2 & \lambda\\ 1 & \lambda^3+\lambda-1 & 1+\lambda^2\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\lambda-1 & 1-\lambda\\ 0 & \lambda^2 & \lambda\\ 0 & \lambda^3-\lambda & \lambda+\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2 & \lambda\\ 0 & \lambda^3-\lambda & \lambda+\lambda^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3-\lambda\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & \lambda^2+\lambda & -\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda\end{bmatrix}=B(\lambda)$$

定理 4 等价的 λ - 矩阵具有相同的秩.

注 在 λ - 矩阵的行列式因子之间,有关系式

$D_k(\lambda)\mid D_{k+1}(\lambda)\,(k=1,2,\cdots,r-1)$.

定理 5 矩阵 $A(\lambda)$ 是可逆的充要条件是它可以表成一些初等矩阵的乘积.

推论 两个 $s\times n$ 的 λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充要条件为,有一个 $s\times s$ 可逆矩阵与一个 $n\times n$ 可逆矩阵 $Q(\lambda)$,使

$B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$.

定理 6 如果有 $n\times n$ 数字矩阵 P_0,Q_0 使

$\lambda E-A=P_0(\lambda E-B)Q_0$,

则 A 和 B 相似.

定理 7 两个 λ—矩阵等价⇔行列式因子相同⇔不变因子相同⇔初等因子相同.

定理 8 A,B 是数域 P 上的两个 n 阶方阵,A 与 B 相似⇔特征矩阵 $\lambda E-A$ 和 $\lambda E-B$ 等价⇔A 与 B 具有相同的初等因子⇔A 与 B 具有相同的行列式因⇔

A 与 B 具有相同的不变因子.

定理 9 复数矩阵 A 与对角矩阵相似 A 的初等因子都是一次的⇔A 的不变因子没有重根⇔A 的最小多项式没有重根.

定理 10 设 A 是复数域上 n 维线性空间 V 的线性变换,在 V 中必定存在一组基,使 A 在这组基下的矩阵是若尔当形,并且这个若尔当形矩阵除去其中若尔当块的排列次序外是被 A 唯一决定的.

定理 11 每个 n 级的复数矩阵 A 都与一个若尔当形矩阵相似,这个若尔当形矩阵除去其中若尔当块的排列次序外是被矩阵 A 唯一决定的,它称为 A 的若尔当标准形.

定理 12 数域 P 上 $n\times n$ 方阵 A 在上相似于唯一的一个有理标准形,称为 A 的有理标准形.

注:(1) $n\times n$ 矩阵的特征矩阵的秩一定是 n.

(2)$r(A(\lambda)) = r$, $A(\lambda)$行列式因子一共有 r 个,而且 $A(\lambda)$行列式因子在初等变换下是不变的.

(3)$n \times n$ 矩阵的不变因子总是有 n 个,它们的乘积就等于这个矩阵的特征多项式.

(4)不变因子是矩阵的相似不变量(它们与该矩阵的选取无关),因此把一个线性变换的任一矩阵的不变因子定义为此线性变换的不变因子.

(5)矩阵 A 的最小多项式就是 A 的最后一个不变因子.

(6)若尔当形矩阵除去其中若尔当块排列的次序外被它的初等因子唯一决定,若尔当形矩阵包括对角矩阵作为特殊情形,那就是由一级若尔当块构成的若尔当形矩阵.

初等因子与不变因子的求法:

1)用初等变换化特征矩阵 $\lambda E - A$ 为对角形式,然后将主对角线上的元素分解成互不相同的一次因式方幂的乘积,则所有这些一次因式的方幂(相同的按出现的次数计算)就是 A 的全部初等因子.

2)设一个 n 级矩阵的全部初等因子为已知,在全部初等因子中将同一个一次因式$(\lambda - \lambda_j)$ $(j=1,2,\cdots,r)$的方幂的那些初等因子按降幂排列,而且当这些初等因子的个数不足 n 时,就在后面补上适当个数的 1,使得凑成 n 个. 设所得排列为

$(\lambda - \lambda_j)^{k_{nj}}, (\lambda - \lambda_j)^{k_{n-1,j}}, \cdots, (\lambda - \lambda_j)^{k_{1j}}, (j=1,2,\cdots,r).$

于是令

$d_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_{i1}}(\lambda - \lambda_2)^{k_{i2}}\cdots(\lambda - \lambda_r)^{k_{ir}}(i=1,2,\cdots,n),$

则 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$就是 A 的不变因子.

例 设 12 级矩阵的不变因子是

$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{9个}, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2(\lambda+1), (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2.$

按定义,它的初等因子有 7 个,即

$(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda+1), (\lambda+1), (\lambda-i)^2, (\lambda+i)^2.$

其中$(\lambda-1)^2$ 出现三次,$\lambda+1$ 出现二次.