高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

Spark® 星火·燎原

丛书主编 马德高

线性代数辅导及习题精解

（同济·第四版）

本册主编 同济大学 胡一鸣

联系考研，渗透精讲历年考研真题

典型例题分析 + 教材习题答案 + 同步自测练习

赠《2010年考研真题&重要公式及性质》手册

延边大学出版社

Spark® 星火·燎原

线性代数辅导及习题精解

（同济·第四版）

本册主编 胡一鸣
副 主 编 邢建民 刘红星

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书. 第3册 / 马德高主编. -- 延吉 : 延边大学出版社，2010.6
ISBN 978-7-5634-3211-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 072908 号

高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

主编：马德高
责任编辑：赵立才
出版发行：延边大学出版社
社址：吉林省延吉市公园路 977 号　　**邮编**：133002
网址：http://www.ydcbs.com
E-mail：ydcbs@ydcbs.com
电话：0433-2732435　　**传真**：0433-2732434
印刷：山东鸿杰印务有限公司
开本：880×1230　1/32
印张：108　**字数**：2 750 千字
版次：2010 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
ISBN 978-7-5634-3211-0

定价：134.60 元

前言

线性代数是高等院校理工科专业和部分文科专业一门重要的基础课程，也是历年硕士研究生入学考试的重点科目。

同济大学应用数学系编写的《工程数学——线性代数》深受广大教师和学生欢迎，被全国很多高校采用。经过历次修订后的第四版，更是结构严谨、逻辑清晰、层次分明、行文流畅，在讲授基础知识的同时又注意提炼和渗透数学思想方法，质量、体例均臻于炉火纯青。

为了帮助广大高校在校生和正在准备考研的学子学好、复习好线性代数这门课程，我们本着"选好教材、做好辅导"的宗旨，以上述的同济大学应用数学系编写的《线性代数》(第四版)为针对教材，编写了这本与之章节、内容完全同步的《线性代数辅导及习题精解》配套辅导用书。

全书内容章节设置与教材完全同步，共分六章，每一章又分为若干节，循着教材顺序对每一章每一节内容清晰梳理、深入讲解，每章内容讲完后，再对整章内容重点做一回顾和加深，然后给出该章教材上的习题答案详解，并提供该章同步自测题。

每一章中每节内容讲解　这部分由三块组成：该节知识结构图表、该节重点考点提炼、该节题型例题方法。

一、知识结构图表　这一部分用直观、形象的图表形式，将该节知识间的相互联系、逻辑关系清晰地展示给读者，让读者对该节内容了然于胸。

二、重点考点提炼　这一部分将该节一些重要的知识点和考点清晰、准确地提炼出来，并简明点出掌握这些重点、考点需要注意的问题，让读者一下子抓住重点、针对复习。

三、题型例题方法　这一部分是每一节讲解中的核心内容，也是全书的核心内容。作者基于多年的教学经验和研究生入学考试试题研究经验，将该节教材内容中学生需要掌握的、考研中经常考到的重点、难点、考点，归纳为一个一个的在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出大量的精选例题、考研真题，举一反三、深入讲解，务必使您对每一个知识点扎实掌握，并能熟练运用在具体解题中。可谓基础知识梳理、重点考点深讲、联系考试解题三重互动、一举突破，获得实际应用应试能力的

全面提升。例题讲解中穿插出现的“思路探索”、“方法点击”,更是巧妙点拨让您举一反三、触类旁通。

每一章后教材习题答案 这一部分对该章教材上的全部习题给出详细、准确的解答,让您回顾、巩固、深化前面的内容讲解。

每一章后同步自测练习 这一部分是作者基于自己多年的教学经验并结合历年考研数学试题特点科学设计的,目的是给读者提供进一步的练习机会,让读者进一步消化知识、夯实考点、提高能力。其后给出了练习全部解答。

考研数学试题解析 书的最后,附上了最新考研数学试题及解析,以便让那些将来准备或正在准备考研的读者了解最新考研试题、检测自我能力水平,找出差距、调整复习。

全书内容编写系统、新颖、清晰、独到,充分体现了如下三大特色:

一、知识梳理清晰、简洁 直观、形象的图表总结,精炼、准确的考点提炼,权威、独到的题型归纳,将教材内容简明扼要的展现给读者,便于读者快速复习、高效掌握,形成稳固、扎实的知识结构体系,为后面提高解题能力和数学思维水平打下坚实的基础。

二、能力提升迅速、互动 所有重点、难点、考点,统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型,然后针对每一个基本题型,举出大量精选的例题、考研真题,举一反三、深入讲解,真正将知识掌握和解题能力提升高效结合,一举完成。

三、联系考研密切、实用 本书是一本教材同步辅导,也是一本考研复习用书,书中处处联系考研:例题中有考研试题,同步自测中也有考研试题,为的就是让同学们同步完成考研备考,达到考研要求的能力。

本书注意博采众家之长,参考了多本同类书籍,吸取了不少养分,在此向这些书籍的作者表示感谢。同时,由于作者水平所限,不足之处,在所难免,殷切希望读者提出宝贵意见,以便再版时改进、修正。

编者

目　录

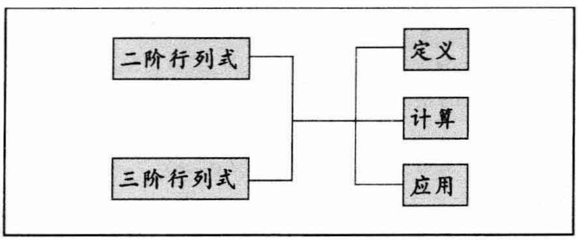
第一章 行列式

本章首先介绍了二阶与三阶行列式的概念，接着介绍了全排列及逆序数的概念，然后把二阶与三阶行列式的定义作了推广，给出了 n 阶行列式的定义，讨论了 n 阶行列式的性质和计算，并讨论了对换的一些性质，最后介绍了克拉默法则及其应用.

第一节 二阶与三阶行列式

一、内容简析

【知识结构】



【重要知识点和考点分析】

1. 把 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为排成二行二列的数表 $\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}$ 的二阶行列式，并记作 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

2. 把 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$

称为数表 $\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$ 的三阶行列式.

3. 本节重点是二阶与三阶行列式的计算，特别注意的是在行列式展开过程中各项的正负号是否正确.

二、题型、例题、方法

基本题型 Ⅰ：二阶行列式的计算

例 1 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

解：(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times 2 - 1\times(-1) = 5$；

(2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = a\times b^2 - b\times a^2 = ab(b-a)$.

【方法点击】 二阶行列式的计算可由定义直接计算.

基本题型 Ⅱ：三阶行列式的计算

例 2 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$（反对称行列式） (3) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$

解：(1) $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6\times1\times1+2\times2\times2+3\times1\times1-1\times1\times2-2\times1\times6-2\times3\times1$

$=-3$；

(2) 由三阶行列式的定义得

$\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & z & 0 \end{vmatrix} = 0\times0\times0+x\times z\times(-y)+y\times(-x)\times(-z)-y\times0\times$

$(-y)-0\times z\times(-z)-x\times(-x)\times0=0$

(3) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha-\sin\gamma\cos\beta-\sin\alpha\cos\gamma-$

$\sin\beta\cos\alpha = \sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)$.

【方法点击】 本题利用对角线法则直接计算.

基本题型 Ⅲ：行列式的应用

例 3 设 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$，求 x 的值.

解：$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = x\times x\times x+1\times1\times1+1\times1\times1-1\times x\times1-1\times1\times x-1\times1\times x$

$= x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)=0$，

解方程可得：$x=1$ 或 $x=-2$.

【方法点击】 本题先通过行列式计算将等式化成一元三次方程形式，然后解方程即可求得 x 的值.

例 4 求函数 $f(x)=\begin{vmatrix}2x & 1 & -1\\ -x & -x & x\\ 1 & 2 & x\end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数.

解:行列式展开后只有主对角线上三元素的乘积才出现 x^3 项,其系数为:

$$2\times(-1)\times 1=-2.$$

【方法点击】 此类型题目只考虑行列式的不同行不同列乘积中出现 x^n 的项,然后将它们的系数相加即可.

例 5 用行列式解下列方程

(1) $\begin{cases}6x_1-4x_2=10\\ 5x_1+7x_2=29\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}4x_1+5x_2=0\\ 3x_1-7x_2=0\end{cases}$

(3) $\begin{cases}bx-ay+2ab=0\\ -2cy+3bz-bc=0\\ cx+az=0\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x_1=0.5x_1+0.3x_2+0.4x_3+10\\ x_2=0.4x_1+0.5x_3+20\\ x_3=0.2x_1+0.1x_2+12\end{cases}$

解:(1) $D=\begin{vmatrix}6 & -4\\ 5 & 7\end{vmatrix}=6\times7-(-4)\times5=62,$

$D_1=\begin{vmatrix}10 & -4\\ 29 & 7\end{vmatrix}=10\times7-(-4)\times29=186,$

$D_2=\begin{vmatrix}6 & 10\\ 5 & 29\end{vmatrix}=6\times29-5\times10=124,$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{186}{62}=3,\quad x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{124}{62}=2.$

(2) $D=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 3 & -7\end{vmatrix}=4\times(-7)-5\times3=-43,$

$D_1=\begin{vmatrix}0 & 5\\ 0 & -7\end{vmatrix}=0\times(-7)-0\times5=0, D_2=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 3 & 0\end{vmatrix}=0\times4-0\times3=0,$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{0}{-43}=0,\quad x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{0}{-43}=0.$

(3) 原方程组变为$\begin{cases}bx-ay=-2ab\\ -2cy+3bz=bc\\ cx+az=0\end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix}b & -a & 0\\ 0 & -2c & 3b\\ c & 0 & a\end{vmatrix}=b\times(-2c)\times a+(-a)\times3b\times c+0-0-0-0$$

$$=-5abc,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-2ab & -a & 0\\ bc & -2c & 3b\\ 0 & 0 & a\end{vmatrix}=-2ab\times(-2c)\times a+0+0-0-(-a)\times bc\times a-0$$

$$=5a^2bc,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} b & -2ab & 0 \\ 0 & bc & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}=b\times bc\times a+(-2ab)\times 3b\times c+0-0-0-0$$

$$=-5ab^2c,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} b & -a & -2ab \\ 0 & -2c & bc \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}=0+(-a)\times bc\times c+0-(-2ab)\times(-2c)\times c$$

$$=-5abc^2,$$

所以 $x=\dfrac{D_1}{D}=-a, y=\dfrac{D_2}{D}=b, z=\dfrac{D_3}{D}=c.$

(4) 原方程组变为

$$\begin{cases} 0.5x_1-0.3x_2-0.4x_3=10 \\ -0.4x_1+x_2-0.5x_3=20 \\ -0.2x_1-0.1x_2+x_3=12 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 0.5 & -0.3 & -0.4 \\ -0.4 & 1 & -0.5 \\ -0.2 & -0.1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=0.5\times 1\times 1+(-0.3)\times(-0.5)\times(-0.2)+(-0.4)\times(-0.4)\times(-0.1)-(-0.4)\times 1\times(-0.2)-(-0.3)\times(-0.4)\times 1-0.5\times(-0.5)\times(-0.1)$$

$$=0.229,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 10 & -0.3 & -0.4 \\ 20 & 1 & -0.5 \\ 12 & -0.1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=10\times 1\times 1+20\times(-0.1)\times(-0.4)+(-0.3)\times(-0.5)\times 12-(-0.4)\times 1\times 12-10\times(-0.1)\times(-0.5)-1\times(-0.3)\times 20$$

$$=22.9,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 0.5 & 10 & -0.4 \\ -0.4 & 20 & -0.5 \\ -0.2 & 12 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=0.5\times 20\times 1+(-0.4)\times 12\times(-0.4)+(-0.2)\times 10\times(-0.5)-(-0.4)\times 20\times(-0.2)-0.5\times 12\times(-0.5)-1\times 10\times(-0.4)$$

$$=18.32,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 0.5 & -0.3 & 10 \\ -0.4 & 1 & 20 \\ -0.2 & -0.1 & 12 \end{vmatrix}$$

$$=0.5\times 1\times 12+10\times(-0.4)\times(-0.1)+(-0.3)\times 20\times(-0.2)-10\times 1\times(-0.2)-0.5\times(-0.1)\times 20-12\times(-0.3)\times(-0.4)$$

$$=9.16,$$

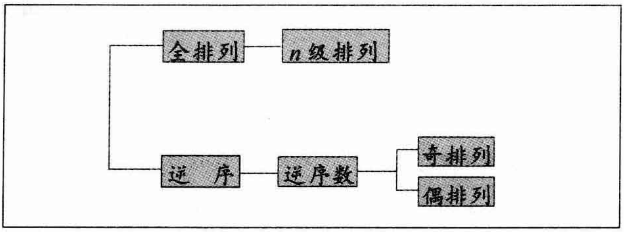
所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=100, x_2=\dfrac{D_2}{D}=80, x_3=\dfrac{D_3}{D}=40.$

【方法点击】 利用方程组与行列式的关系.

第二节 全排列及其逆序数

一、内容简析

【知识结构】



【重要知识点和考点分析】

1. n 个不同元素排成一列称为 n 个元素的全排列. 我们通常考虑 n 个自然数的排列，也称为 n 级排列.

2. n 个元素的所有排列的种数用 P_n 表示，$P_n=n\cdot(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$.

3. n 个元素的任一排列中，一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中所有逆序的总和称为这个排列的逆序数，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$. 若 τ 为奇数称此排列为奇排列；若 τ 为偶数，则称之为偶排列.

4. 本节的重点是求一个排列的逆序数，难点是求含有字母的排列的逆序数. 这也是考研经常侧重的. 任一排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数可如下计算：$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数 $+\,i_2$ 的后面比 i_2 小的数的个数 $+\cdots+\,i_{n-1}$ 后面比 i_{n-1} 小的数的个数.

二、题型、例题、方法

基本题型：逆序数的求法

例 1 求下列排列的逆序数

(1) 134782695 (2) 217986354 (3) 987654321

套用上述公式

解：(1)
$$\tau(134782695)=\begin{array}{c}1\;\;3\;\;4\;\;7\;\;8\;\;2\;\;6\;\;9\\ 0+1+1+3+3+0+1+1\end{array}=10;$$

(2)
$$\tau(217986354)=\begin{array}{c}2\;\;1\;\;7\;\;9\;\;8\;\;6\;\;3\;\;5\\ 1+0+4+5+4+3+0+1\end{array}=18;$$

(3)
$$\tau(987654321)=\begin{array}{c}9\;\;8\;\;7\;\;6\;\;5\;\;4\;\;3\;\;2\\ 8+7+6+5+4+3+2+1\end{array}=36.$$

【方法点击】 求逆序数一般按上面给出的公式依次来算，对初学者来说，可按本例给出的虚线对应，可避免出错.

例2 求下列排列的逆序数，并确定它们的奇偶性.

(1) $n(n-1)\cdots 21$ (2) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$

(3) $135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 42$

解：(1) $\tau(n(n-1)\cdots 2\cdot 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

对$\dfrac{n(n-1)}{2}$的奇偶性判断，需按以下情况进行讨论：

当$n=4k$时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$为偶数；

当$n=4k+1$时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$为偶数；

当$n=4k+2$时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$为奇数；

当$n=4k+3$时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$为奇数；

请注意：为什么要分四种情况而不是两种

因此，当$n=4k$或$4k+1$时，此排列为偶排列；当$n=4k+2$或$4k+3$时，此排列为奇排列，($k\in \mathbf{Z}^{+}\cup\{0\}$).

(2) 排列中前n个数$1,3,5,\cdots,(2n-1)$之间不构成逆序，后n个数$2,4,6,\cdots,(2n)$之间也不构成逆序，只有前n个数与后n个数之间才构成逆序，因此

$\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$

(3) $\tau(135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 42)=0+2+4+\cdots+(2n-2)=n(n-1)$.

【方法点击】 对含字母的排列求逆序数，一定要对字母进行讨论来确定其与前后数的大小关系及其奇偶性.

例3 设排列$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$的逆序数为k，则$x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$的逆序数是多少？

解：方法一：若排列$x_1x_2\cdots x_n$中关于x_1有a_1个逆序，则有$(n-1)-a_1$个顺序，即在排列$x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$中关于x_1有$(n-1)-a_1$个逆序；若关于x_2有a_2个逆序，则有$(n-2)-a_2$个顺序；……；关于x_n有a_n个逆序，则有$(n-n)-a_n$个顺序，而$a_1+a_2+\cdots+a_n=k$，故$x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$的逆序数为

$$\begin{aligned}\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_1)&=[(n-n)-a_n]+\cdots+[(n-2)-a_2]+[(n-1)-a_1]\\&=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0-k\\&=\frac{1}{2}n(n-1)-k.\end{aligned}$$

方法二：因为任一对数偶在$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$和$x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$中必形成一个逆序和一个顺序，所以两个排列的逆序之和等于从n个数中取2个数的排列数，即$C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$，于是$\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)=\dfrac{n(n-1)}{2}-\tau(x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n)=\dfrac{n(n-1)}{2}-k$

【方法点击】 本例重点考查了$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$中逆序与$x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$顺序之间有类似互补的性质.

例4 选择i与k使

(1) $1274i56k9$ 成偶排列.

(2) $1i25k4897$ 成奇排列.

解：(1) 由题意知，i 和 k 只能取 3 和 8.

若 $i=3,k=8$，则 $\tau(127435689)=4+1=5$

若 $i=8,k=3$，则 $\tau(127485639)=4+1+3+1+1=10$

所以当 $i=8,k=3$ 时成偶排列.

(2) 由题意知，i 和 k 只能取 3 或 6.

若 $i=3,k=6$，则 $\tau(132564897)=1+1+1+1+1=5$

若 $i=6,k=3$，则 $\tau(162534897)=4+2+1+1=8$

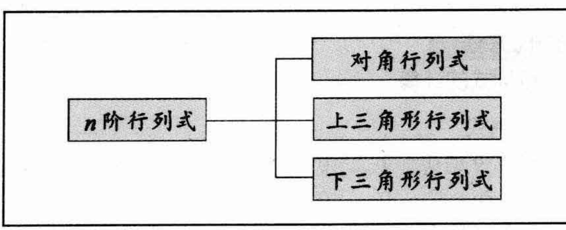
所以当 $i=3,k=6$ 时，成奇排列.

【方法点击】 此类题往往采用列举所有情况一一讨论.

第三节 n 阶行列式的定义

一、内容简析

【知识结构】



【重要知识点和考点分析】

1. 排成 n 行 n 列的 n^2 个数 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$ 的行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和，故 n 级行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，每一项的符号取决于组成该项的 n 个元素的列下标排列的逆序数(行下标按自然顺序排列)，即当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时取正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时取负号.

2. 几种特殊行列式的结果

(1) $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$;

(2) $\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$;

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$;

(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

3. 本节的重点是掌握n阶行列式的定义,并熟记几种特殊行列式的结果.

二、题型、例题、方法

基本题型Ⅰ:行列式的计算

例1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2006 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2007 \end{vmatrix}.$$

【思路探索】 因行列式的项中有一元素为零时,该项值为零,故只需求出所有非零项即可,要求出非零项$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的列下标$j_1j_2\cdots j_n$的所有$n$级排列,先由第1行的非零元素,写出$j_1$可能取的数码;再由第2,3,…,$n$行的非零元素分别写出$j_2,j_3,\cdots,j_n$可能取的数码,进而求出$j_1j_2\cdots j_n$的所有$n$级排列.非零项$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的列下标$j_1j_2\cdots j_n$的$n$级排列有多少个,相应地该行列式就含多少个非零项;如果一个也没有,则不含非零项,行列式的值为零.

解:D中的第1行的非零元素只有$a_{1\,2006}$,因而j_1只能取2006,同理由第2,3,…,2007行知,$j_2=2005,j_3=2004,\cdots,j_{2006}=1,j_{2007}=2007$.于是$j_1,j_2,\cdots,j_{2007}$只能组成一个2007级排列 (2006)(2005)…21(2007),

即D中非零项只有一项,所以

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{\tau(2006\cdots 2\,1\,2007)}a_{1\,2006}\cdot\cdots\cdot a_{2006\,1}\cdot a_{2007\,2007} \\ &= (-1)^{2005+\cdots+2+1}1\times2\times\cdots\times2006\times2007 \\ &= -2007!. \end{aligned}$$

【方法点击】 本题中行列式含零元素较多，只需计算非零项即可.

例2 计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} x_1 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & y_2 \\ y_3 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & y_4 & 0 & x_4 \end{vmatrix}.$$

解：设 $D_4=|x_{ij}|_{4\times 4}$，则 D_4 中第1行的非零元素为 $x_{11}=x_1, x_{13}=y_1$，故 $j_1=1, 3$；同理由第2，3，4行可求 $j_2=2,4; j_3=1,3; j_4=2,4$. 因而 j_1,j_2,j_3,j_4 能组成四个4级排列：1234；1432；3214；3412. 于是有

$$\begin{aligned} D&=x_1x_2x_3x_4-x_1y_2x_3y_4-y_1x_2y_3x_4+y_1y_2y_3y_4 \\ &=(x_1x_3-y_1y_3)(x_2x_4-y_2y_4). \end{aligned}$$

【方法点击】 本题中行列式含零元素较多，从而只找出非零项再求和.

例3 按行列式定义，计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解：用 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 表示排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的反序数，并且用 D 表示所给的行列式.

根据行列式的定义，行列式展开后每项都是 n 个元素相乘，且这 n 个元素要位于 D 中不同的行与不同的列，因此，D 除去为零的项外，只有一项，即

$$a_{1n}a_{2n-2}\cdots a_{n1}=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n=n!.$$

这一项的行标为自然顺序，列标构成的排列为

$$n,n-1,\cdots,2,1$$

其反序数为$\frac{n(n-1)}{2}$. 故 $\quad D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot n!.$

基本题型Ⅱ：n 阶行列式的证明

例4 证明：(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}=0;$

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$

证明：(1) 由行列式定义知，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4j_5)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$$

若 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}\neq 0$，由题设知 j_3,j_4,j_5 只能等于 4 或 5，从而 j_3，j_4,j_5 中至少有两个相等，这与 $j_1j_2j_3j_4j_5$ 是 1,2,3,4,5 的一个全排列矛盾，故 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}=0$，于是 $D=0$.

(2) $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

由题设，要使 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}\neq 0$，必须 j_1,j_2 取 1 或 2，而 $j_1j_2j_3j_4$ 是 1，2,3,4 的一个全排列，故 j_3,j_4 取 3 或 4，于是

$$\begin{aligned} D&=(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} \\ &\quad+(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+(-1)^{\tau(2143)}a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \\ &=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}. \end{aligned}$$

而 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})(a_{33}a_{44}-a_{43}a_{34})=$
$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$

所以等式成立.

【方法点击】 利用行列式定义展开后，行列式的项中有一元素为零时，该项值为零，便可简化结果.

例 5 证明：$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

证明：根据行列式的定义，项的一般形式为

$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，

行列式的第 1 行只有 a_{1n} 为非零元，第 2 行除 $a_{2,n-1}$ 和 a_{2n} 外全为零，…，则行列式只有 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n,1}$ 这一项为非零元，而这一项的列下标所成的排列的逆序数为

$$\tau(n,n-1,\cdots,2,1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

于是 $$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$