考研数学真题与典型题详解系列

新派克
XIN PAI KE

概率论与数理统计

（理工类）

考研真题与典型题详解

金圣才　主编

概率论 解 数理统计

汇总众多高校考研专业课真题，并进行详细解答！

精选名校题库、讲义和笔记，汇集专业典型试题！

题量充足，来源广泛，突出热点，参考答案详尽！

中国石化出版社

考研数学真题与典型题详解系列

概率论与数理统计
（理工类）

考研真题与典型题详解

金圣才　主编

中国石化出版社

内 容 提 要

本书是一本考研数学（理工类）真题与典型题详解的复习资料，是根据最新硕士研究生入学考试理工类数学大纲，参考并整理了众多概率论与数理统计的题库和相关资料精编而成。全书共分 8 章，每章包括 4 个部分，第 1 部分是考试内容及要求，第 2 部分是重要公式、性质及结论，第 3 部分是历年考研真题详解，第 4 部分是典型题详解。

本书特别适用于在硕士研究生入学考试中参加数学（一）和数学（二）科目的考生，也适用于各大院校学习概率论与数理统计的师生参考，对于参加职称考试、自考及其他相关专业人员来说，也是学习概率论与数理统计的一本不可多得的复习资料。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计（理工类）考研真题与典型题详解/金圣才主编.
—北京：中国石化出版社，2005
（考研数学真题与典型题详解系列）
ISBN 7-80164-804-8

Ⅰ.概...Ⅱ.金...Ⅲ.①概率论-研究生-入学考试-解题②数理统计-研究生-入学考试-解题
Ⅳ.O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 040013 号

中国石化出版社出版发行
地址：北京市东城区安定门外大街 58 号
邮编：100011　电话：(010)84271850
读者服务部电话：(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com.cn
北京精美实华图文制作中心排版
北京大地印刷厂印刷
新华书店北京发行所经销
*
787×1092 毫米 16 开本 31.5 印张 805 千字
2005 年 5 月第 1 版　2005 年 5 月第 1 次印刷
定价：49.80 元
（购买时请认明封面防伪标识）

前　言

本书根据最新硕士研究生入学考试数学大纲，参考并整理了众多数学资料精编而成。全书共分8章，每章包括4部分，第1部分是考试内容及要求，第2部分是重要公式、性质及结论，第3部分是历年真题详解，第4部分是典型题详解。

本书具有如下特点：

(1) 题量较大，来源广泛。主要选自200多本数学复习资料（含10年来考研真题)、名校题库以及众多教材和相关资料，经编著而成。可以说本书的试题都经过了精心挑选，博选众书，取长补短。

(2) 解答详细，突出重难点。对每一道题，包括选择题和填空题，都进行了详细的解答。有些试题提供了多种解题方法，便于读者进一步理解。

(3) 难点归纳，理论知识和考试要点归纳有特色。有些试题的结论在一般教材上并没有作为定理或结论，但在考研中却可以直接使用，这些内容本书都进行了总结和分析。

需要特别说明的是：

本书的每道题都是一道典型的例题，读者如果把本书的每一道题认真地看懂、研读，相信在考研中一定能够取得很好的成绩！

本书特别适用于硕士研究生入学考试中数学科目的考生，也适用于各大院校学习数学的师生参考，对于参加职称考试、自考及其他相关专业人员来说，也是学习数学的一本不可多得的复习资料。

由于题量较大，解答详细，错误、遗漏不可避免，诚请读者指正，不妥之处和建议可与编者联系，不甚感激。

为了帮助读者更好地学习数学等各门课程，圣才考研网开设了数学等公共课和专业课的论坛及专栏，还提供各个高校最新考研专业真题、各专业试题库、笔记、讲义及大量专业课复习资料。

限于篇幅，有些试题和资料未能在本书收录，如有建议或需试卷，请登录网站：

圣才考研网 www.100exam.com

金圣才

目　录

第1章　随机事件和概率

1.1　考试内容及要求

考试内容

随机事件与样本空间　事件的关系与运算　完备事件组　概率的概念　概率的基本性质　古典型概率　几何型概率　条件概率　概率的基本公式　事件的独立性　独立重复试验

考试要求

1. 了解样本空间（基本事件空间）的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系及运算。

2. 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率和几何型概率，掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯公式。

3. 理解事件独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法。

基本解题方法

1. 事件的表示

事件的表示方法有：

（1）以适当的形式表示试验的样本点、样本空间及事件。

（2）用事件的关系和运算表示事件。

（3）化简、证明与验证事件的关系。

2. 求事件的概率

1）直接计算

（1）几何概型计算概率：

① 建立问题的数学模型；

② 计算出样本空间和事件的度量 D 和 d；

③ 事件的概率为 d/D。

（2）古典概型的概率计算：

① 选取适当的样本空间 Ω，使它满足有限性和等可能性的要求，且事件 A 为 Ω 的一个子集；

② 计算样本点总数 n 和事件 A 包含的基本事件个数 k；

③ $P(A)=k/n$。

注：计算 Ω 与 A 中基本事件数 n 与 k，通常采用的方法是排列与组合。

2）间接计算

（1）根据问题的描述，选择恰当的概率公式。

（2）简化概率计算的复杂性，注意利用事件的互斥性和独立性。

（3）计算出所求概率。

常用于计算的公式和方法有：

（1）逆事件概率公式。

(2) 加法公式。

(3) 条件概率公式与乘法公式。

(4) 全概率公式与逆概率公式。

(5) 建立差分或微分方程。

1.2 重要公式、性质及结论

1. 加法、乘法原理，排列与组合

(1) 加法原理 设完成一件事有 n 类方法（只要选择其中一类方法就可以完成这件事），若第一类方法有 m_1 种，第二类方法有 m_2 种……第 n 类方法有 m_n 种，则完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种方法。

(2) 乘法原理 设完成一件事须有 n 个步骤（仅当 n 个步骤都完成，才能完成这件事），若第一步有 m_1 种方法，第二步有 m_2 种方法……第 n 步有 m_n 种方法，则完成这件事共有

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$

种方法。

注意：加法原理与乘法原理的区别：前者完成一步就完成一件事；后者需 n 步均完成才完成一件事。

(3) 排列 从 n 个不同元素中任取 $m(m \leqslant n)$ 个，按照一定的顺序排成一列，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列，从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，记为

$$P_n^m = n(n-1)\cdot \cdots \cdot [n-(m-1)] = \frac{n!}{(n-m)!}$$

从 n 个不同元素中全部取出的排列称为全排列，其排列的总数记为

$$P_n = n(n-1)\cdot \cdots \cdot 1 = n!$$

规定 $0! = 1$。

(4) 允许重复的排列 从 n 个不同元素中有放回地取 m 个元素，按照一定顺序排列成一列，其排列的总数为

$$N = \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{m\text{个}n} = n^m$$

(5) 不全相异元素的排列 若 n 个元素中有 m 类（$1 < m \leqslant n$）本质不同的元素，而每类元素中分别有 k_1，k_2，…，k_m 个元素（$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$；$1 < k_i < n$；$i = 1, 2, \cdots, m$），则 n 个元素全部取出的排列称为不全相异元素的一个全排列，其排列的总数为

$$N = \frac{n!}{k_1!\ k_2!\ \cdots k_m!}$$

(6) 组合 从 n 个元素中取出 m 个元素，不管其顺序并成一组，称为从 n 个不同元素中取出的 m 个元素的一个组合，其组合总数记为 C_n^m，

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)\cdot \cdots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

组合的性质：

① $C_n^m = C_n^{n-m}$

② $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$

注意：排列与组合的区别：前者与次序有关，后者与次序无关。

2. 样本空间与随机事件

（1）随机试验（记为 E） 若试验（观察或实验过程）满足条件：

① 试验可在相同条件下重复进行；

② 试验的结果具有多种可能性；

③ 试验前不能确切知道会出现何种结果，只知道所有可能出现的结果，则该试验称为随机试验。

（2）随机事件 随机试验 E 的一个结果，简称事件，用大写字母 A、B、C、D 表示。

（3）基本事件（样本空间） 随机试验 E 的所有基本事件组成的集合，记为 $\Omega = \Omega(\omega)$。

（4）基本事件空间（样本点） 随机试验 E 的每一个不可再分解的结果，用 ω 表示。

（5）必然事件 在一定条件下，每次试验中一定要发生的事件，记为 Ω。

（6）不可能事件 在一定条件下，每次试验中一定不发生的事件，记为 Φ。

3. 事件的关系与运算

（1）事件的包含 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含 A（或 A 包含于 B），记为 $B \supset A$。

（2）事件相等 若 $A \supset B$ 且 $B \supset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A = B$。

（3）事件 A 与 B 之和（并） $A \cup B$（或 $A + B$）$\triangleq$事件 A 与 B 至少有一个发生，推广：

① $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k \cup \cdots \cup A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \triangleq n$ 个事件 A_1，A_2，…，A_n 至少有一个发生；

② $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k \cup \cdots \cup A_\infty = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \triangleq$无穷个事件 A_1，A_2，…，A_k，…至少有一个发生。

性质：

a. $A \subset A \cup B$；$B \subset A \cup B$；

b. $A \cap (A \cup B) = A$；$B \cap (A \cup B) = B$；

c. $A \cup A = A$；

（4）事件 A 与 B 的差 $A - B \triangleq$事件中 A 发生而 B 不发生。

性质：

① $A - B \subset A$；

② $(A - B) \cup A = A$；$(A - B) \cup B = A \cup B$；

③ $(A - B) \cap A = A - B$；$(A - B) \cap B = \Phi$；

（5）事件 A 与 B 的积 $A \cap B$（或 AB）$\triangleq$事件 A 与 B 同时发生，推广：

① $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \triangleq n$ 个事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生；

② $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap \cdots \cap A\infty \triangleq \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \triangleq$无穷个事件 A_1，A_2，…，A_k，…同时发生。

性质：

a. $A \cap B \subset A$；$A \cap B \subset B$；

b. $(A \cap B) \cup A = A$；$(A \cap B) \cup B = B$；

c.$A\cap A=A$。

(6) 互斥事件　在试验中，若事件 A 与 B 不能同时发生，即 $A\cap B=\Phi$，则称 A、B 为互斥事件。

推广：在试验中，若事件组 A_1，A_2，…，A_n 任意两个都是互斥的，则该事件组称为互斥事件组。

注意：

① 在一次试验中，基本事件都是两两互斥的；

② 若 A、B 互斥，则 $A\cup B=A+B$。

(7) 对立事件　每次试验中，“事件 A 不发生”的事件称为事件 A 的对立事件。A 的对立事件记为 $\overline{A}$，特性：

①$A+\overline{A}=\Omega$（必然事件）；

②$A\overline{A}=\Phi$（不可能事件）。

由定义可知：对立事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件。

(8) 一些常用的事件间的关系式

① $A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$（交换律）；

② $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$（结合律）；

③ $(A\cup B)C=AC\cup BC$，$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$（分配律）；

④ $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$（对偶律或者摩根定律）

一般有：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

⑤ $\Phi\subset A\subset\Omega$；

⑥ 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$AB=A$；

⑦ $A+\Phi=A$，$A+\Omega=\Omega$，$A\Phi=\Phi$，$A\Omega=A$；

⑧ $A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$，$A\supset AB$，$B\supset AB$；

⑨ $A\cup B=A+(B-AB)=B+(A-B)=B+A\overline{B}=A+B\overline{A}=AB+A\overline{B}+\overline{A}B$；

⑩ $\overline{A}=\Omega-A$，$\overline{\overline{A}}=A$，$A-B=A\overline{B}$；

⑪ 若 $A\subset B$，则 $\overline{A}\supset\overline{B}$；

⑫ 若 $A\subset B$，则 $B=A\cup(B-A)$ 且 $A(B-A)=\Phi$。

4. 随机事件的概率

(1) 古典概率定义

设随机试验 E 的样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，$n$ 为有限的正整数，且每个样本点 ω_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 出现的可能性相等，则事件 $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}\}(1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_m\leqslant n)$ 出现的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

即 $P(A)=\dfrac{\text{有利于事件 }A\text{ 的基本事件数 }m}{\text{基本事件的总数 }n}$。

(2) 几何概率

假设 Ω 是 R^n $(n=1,2,3)$ 中任何一个可度量的区域，从 Ω 中“等可能”地选择一点，则相应随机试验的样本空间就是 Ω。假设事件 A 是 Ω 中任何一个可度量的子集，则

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

由上式定义的概率称为几何概率，符合上述假定的模型称为几何概型，其中，$\mu(A)$表示 Ω 中子集A 的量度（长度、面积、体积）。

(3) 概率的统计定义

若随机事件 A 在n 次试验中出现了 m 次，称 m 为事件A 在n 次试验中出现的频数，并称比值 $f_n(A)=\frac{m}{n}$为事件A 在n 次试验中出现的频率。

在一个随机试验中，如果事件 A 出现的频率$\frac{m}{n}$随着试验次数n 的增大，它在区间 $[0,1]$ 上的某个常数 p 的附近摆动，那么定义事件 A 的概率为

$$P(A)=p$$

概率的这种定义称为概率的统计定义。

(4) 概率的公理化定义

设 A 为随机事件，$P(A)$ 为定义在所有随机事件组成的集合上的实函数，且满足下列三条公理：

公理 1　对任一事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

公理 2　$P(\Omega)=1$;

公理 3　对于两两互斥的可数多个随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有 $P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$，则称函数 $P(A)$ 为事件 A 的概率，这个定义称为概率的公理化定义。

(5) 概率的基本性质

性质 1　不可能事件的概率为 0，即 $P(\Phi)=0$。

性质 2　设有限多个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 两两互斥，那么

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

性质 3　设 A 为任一随机事件，那么

$$P(\bar{A})=1-P(A)$$

性质 4　设 A、B 为两个事件，且 $A\supset B$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

推论 1　若 $A\supset B$，则 $P(A)\geqslant P(B)$。

5. 概率的加法公式

(1) 两个事件并的概率计算公式，设 A、B 为两个事件，则有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

注：①该公式称为两个事件的概率加法公式；

②在运用此公式时，只要求 A、B 是两个随机事件，并不要求 A 与 B 是互不相容的；

③若 $AB=\Phi$，则该公式变为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

(2) 多个事件并的概率计算公式。设 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 是n 个随机事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

注：特别地，对三个事件 A、B、C，我们有

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$

6. 条件概率与乘法公式

(1) 条件概率

设 A、B 是两个事件，且 $P(A)>0$,称 $P(B \mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生条件下事件 B 发生的条件概率。

(2) 条件概率的基本性质

条件概率也是一种概率，当 $P(A)>0$ 时,有:

① $0 \leqslant P(B \mid A) \leqslant 1$;

② $P(\Omega \mid A) = 1, P(A \mid A) = 1$;

③ $P(B \mid A) + P(\overline{B} \mid A) = 1$;

④ $P(B \cup C \mid A) = P(B \mid A) + P(C \mid A) - P(BC \mid A)$;

⑤ 当 $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ 两两互不相容时

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \mid A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i \mid A)。$$

(3) 乘法定理

$P(AB) = P(A)P(B \mid A), P(A) > 0$

$P(AB) = P(B)P(A \mid B), P(B) > 0$

$P(ABC) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB), P(AB) > 0$

$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$

$[P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0]$

7. 全概率公式和贝叶斯公式

(1) 全概率公式

设 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 为一个完备事件组，即它们两两互不相容，其和为 Ω，并且 $P(A_i) > 0 (i = 1,2,\cdots n)$,则对任一事件 B，有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

(2) 贝叶斯公式（逆概公式）

设随机事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 以及 B 满足全概率公式中的条件，则对任一 i $(1 \leqslant i \leqslant n)$，有

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}$$

在上面公式右边，分母为全概率公式，是 n 项之和，分子是分母中某一项。

8. 事件的独立性

(1) 两个事件相互独立，设 A、B 是两个随机事件，如果

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称事件 A 和事件 B 是相互独立的。

(2) 两事件相互独立的性质

① 若 $P(A) > 0$[或 $P(B) > 0$]，则事件 A 与事件 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B \mid A) = P(B)$[或 $P(A \mid B) = P(A)$]；

② 必然事件与任何事件相互独立；不可能事件与任何事件相互独立；

③ 若事件 A 与 B 相互独立，则下列各对事件也相互独立：A 与 $\overline{B}$；$\overline{A}$ 与 B；$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$。

(3) 多个事件的独立性　设 A_1，A_2，…，A_n 为一个事件组，对任意 k （$1<k\leqslant n$），$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，如果

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称事件组 A_1，A_2，…，A_n 相互独立。

(4) 多个事件相互独立的性质

① 设 A_1，A_2，…，A_n 相互独立，则它们中的任何一个部分事件组也相互独立；

② 设 A_1，A_2，…，A_n 是 n 个相互独立的随机事件，则对任意的 m （$1\leqslant m\leqslant n$），$\overline{A}_{i_1}$，$\overline{A}_{i_2}$，…，$\overline{A}_{i_m}$，$A_{i_{m+1}}$，…，A_{i_n} 也是相互独立的随机事件，其中 i_1，i_2，…，i_m，i_{m+1}，…，i_n 是 1，2，…，n 的一个排列；

③ A_1，A_2，…，A_n 是 n 个相互独立的事件，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i)$$

(5) 多个事件两两独立

若 n 个事件中任意两个事件都是相互独立的，则称这 n 个事件为两两独立。

注意：A_1，A_2，…，A_n 相互独立，则 A_1，A_2，…，A_n 两两相互独立；反之，则不一定。

9. 伯努利概型、伯努利公式

(1) n 重伯努利概型

只有两个试验结果的试验称为伯努利试验。如果 n 次试验相互独立，每次试验中只有 A 发生和 $\overline{A}$ 发生两种结果，并且每次试验中 A 发生的概率都相等，即 $P(A) = p(0 < p < 1)$，这样的试验模型称为 n 重伯努利概型。

(2) 伯努利公式（二次概率公式）

设在每次试验中，事件 A 发生的概率为 p （$0<p<1$），则在 n 次重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率记作 $P_n(k)$，则

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},(q = 1 - p;k = 0,1,2,\cdots,n)$$

下列各事件及其概率在 n 次伯努利试验中用到：

① P(事件 A 发生的次数不到 k 次) $= P_n(0) + P_n(1) + \cdots + P_n(k-1)$；

② P(事件 A 发生的次数多于 k 次) $= P_n(k+1) + P_n(k+2) + \cdots + P_n(n)$；

③ P(事件 A 发生次数不少于 k 次) $= P_n(k) + P_n(k+1) + \cdots + P_n(n)$；

④ P(事件 A 发生次数不多于 k 次) $= P_n(0) + P_n(1) + \cdots + P_n(k)$。

说明：对于涉及概率性质的计算题，要求熟练掌握概率的性质公式，并能根据题目的条件做出正确的计算。下面两点要熟记：

(1) 常用事件的等价变形：

① $A\overline{B}=A-AB$；

② $A\cup B=A\overline{B}+AB+\overline{A}B$（表为不相容事件的和）；

③（对偶公式）$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$。

（2）常用的概率计算公式：

① $P(\overline{A})=1-P(A)$；

② $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，特别地，$B\subset A,P(A-B)=P(A)-P(B)$；

③ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；

④ $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}^{n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$。

解题时应注意以下几点：

（1）利用古典概率计算公式求概率时，可在不同的样本空间考虑，这样同一道题可以有多种解法。但计算随机事件 A 所含的样本点时，必须与所考虑的样本空间中的情形相一致。如果一个考虑顺序，用排列做，另一个则也须考虑顺序也得用排列做，一定要统一。

（2）所求中有“至少”的问题，通常用“对立事件”解答为便。

（3）“任取 k 件”与“有放回地逐件抽取 k 件”所得的概率一般是不同的，后者为“有重复的排列关系”。

（4）“任取 k 件”与“无放回地逐次抽取 k 件”虽然考虑问题的角度不同，但其概率却是相同的，即前者用“组合关系”考虑，后者用“无放回排列关系”考虑。

1.3 历年考研真题详解

1.3.1 填空题

1．（1990 数学一）设随机事件 A、B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4、0.3 和 0.6，若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$________。

解：由 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 知，$P(AB)=0.1$，又根据

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$$

于是 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3$

【评注】 A，B 有常用分解公式：$A=AB+A\overline{B}$

于是 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$

从而 $P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$

2．（1994 数学一）已知 A、B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$________。

解：由 $P(\overline{AB})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$ 以及 $P(AB)=P(\overline{AB})$，有 $P(B)=1-P(A)=1-p$

【评注】 请注意随机事件 A、B 常用公式：$A=AB+A\overline{B}$，从而

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$$

3．（1993 数学一）一批产品共有 10 个正品和 2 个次品，任意抽取两次，每次抽一个，抽出后不再放回，则第二次抽出的是次品的概率为________。

解：直接用古典概型进行计算：考虑 12 个产品全部取出排成一行，总共有 12！种排法，而第二个位置排次品有 2 种情形，其余 11 个位置可任意排放剩下的 11 个产品，共有 11！种排法，故所求概率为 $\frac{2\times 11!}{12!}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

【评注】 设一批产品中有 a 个正品，b 个次品，不放回地从中任取 k 件产品，则第 k 次取到次品的概率为 $\frac{b}{a+b}$，与 k 无关。

4．(1992 数学一) 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{6}$，则事件 A、B、C 全不发生的概率为________。

【分析】 事件 A、B、C 全不发生的概率，即求概率 $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$，而 $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A+B+C})=1-P(A+B+C)=1-P(A)-P(B)-P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$ 转化为可利用已知条件的情形。

解：因为 $P(AB)=0$，所以有 $P(ABC)=0$，于是有

$$
\begin{aligned}
P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) &= P(\overline{A+B+C}) = 1-P(A+B+C) \\
&= 1-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)-P(A)-P(B)-P(C) \\
&= 1-\frac{3}{4}+\frac{2}{6}=\frac{7}{12}
\end{aligned}
$$

5．(1997 数学一) 袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个是黄球，30 个是白球，今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第二个人取得黄球的概率是________。

解：设 $A=$ {第一个人取出的为黄球}，$B=$ {第一个人取出的为白球}，$C=$ {第二个人取出的为黄球}。

则 $P(A)=\frac{2}{5}, P(B)=\frac{3}{5}, P(C\mid A)=\frac{19}{49}, P(C\mid B)=\frac{20}{49}$

由全概率公式知：

$$P(C)=P(A)\cdot P(C\mid A)+P(B)\cdot P(C\mid B)=\frac{2}{5}\times\frac{19}{49}+\frac{3}{5}\times\frac{20}{49}=\frac{2}{5}$$

【评注】 根据“抽签原理”，第一个人、第二个人、…、等等，取到黄球的可能性相同，均为 $\frac{20}{20+30}=\frac{2}{5}$。一般地，袋中有 a 个黄球。b 个白球，从中将球依次不放回地摸出，则第 k 次摸到黄球的概率为 $\frac{a}{a+b}$（与 k 无关）。

6．(1996 数学一) 设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1% 和 2%，现从由 A 和 B 的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，则该次品属 A 生产的概率是________。

解：设事件 $A=$ {抽取的产品为工厂 A 生产的}，$B=$ {抽取的产品为工厂 B 生产的}，$C=$ {抽取的是次品}，则

$$P(A)=0.6, P(B)=0.4, P(C\mid A)=0.01, P(C\mid B)=0.02$$

由逆概公式知

$$
\begin{aligned}
P(A\mid C) &= \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{P(A)\cdot P(C\mid A)}{P(A)P(C\mid A)+P(B)P(C\mid B)} \\
&= \frac{0.6\times 0.01}{0.6\times 0.01+0.4\times 0.02}=\frac{3}{7}
\end{aligned}
$$

【评注】 本题可理解为两次随机试验，第一次是次品率，可看作随机试验的结果，然后再随机抽取一件，是第二次试验，涉及到两次或两次以上随机试验时，想到用全概率公式或逆概率公式。

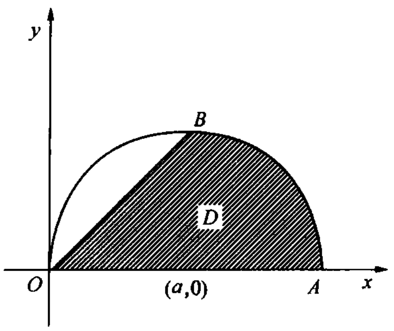

图 1-1

7.（1991 数学一）随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（a 为正常数）内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于$\frac{\pi}{4}$的概率为________。

【分析】 本题为几何概型，可画一示意图，将问题转化为平面图形的面积计算。

解： 由 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$所确定的区域如图所示。

过原点 O 作线段OB，使其与 x 轴的夹角为$\frac{\pi}{4}$。则根据几何概率的定义，所求概率为

$$p=\frac{S_D}{S_{\text{半圆}}}=\frac{2}{\pi a^2}S_D=\frac{2}{\pi a^2}\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi a^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta} r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$$

8.（1989 数学一）已知随机事件 A 的概率$P(A)=0.5$,随机事件B的概率$P(B)=0.6$及条件概率 $P(B\mid A)=0.8$,则和事件 $A\cup B$ 的概率$P(A\cup B)=$ ________。

解： 由题设

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B\mid A)=0.4$$

于是 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.4=0.7$

【评注】 $P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$,注意$P(A-B)=P(A)-P(B)+P(AB)$是不成立的。

9.（1989 数学一）甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5。现已知目标被命中，则它是甲射中的概率为________。

解： $A=$ {甲射击}，$B=$ {乙射击}，$C=$ {目标被击中}，则

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},P(C\mid A)=0.6,P(C\mid B)=0.5$$

由逆概率公式知所求概率为

$$P(A\mid C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)P(C\mid A)}{P(A)P(C\mid A)+P(B)P(C\mid B)}=\frac{6}{11}$$

10.（1999 数学一）设两两相互独立的三事件 A，B 和C 满足条件：$ABC=\varnothing$，$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$,且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$,则 $P(A)=$________。

解： 根据加法公式有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AC)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)$$

由题设 A、B、C 两两独立,$ABC=\varnothing$ 且$P(A)=P(B)=P(C)$,因此有 $P(AB)=P(AC)=P(BC)=P^2(A)$,$P(ABC)=P(\varnothing)=0$,从而

$$P(A\cup B\cup C)=3P(A)-3P^2(A)=\frac{9}{16}$$

解得 $P(A)=\frac{3}{4}$,$P(A)=\frac{1}{4}$

又根据题设 $P(A)<\frac{1}{2}$,故 $P(A)=\frac{1}{4}$

因此本题应填$\frac{1}{4}$

11.（2000 数学一）设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为$\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$________。

解：由题设，有

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=\frac{1}{9},P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$$

因为 A、B 相互独立，所以 A 与$\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立。于是由 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$，

有 $$P(A)P(\overline{B})=P(\overline{A})P(B)$$

即有 $$P(A)[1-P(B)]=[1-P(A)]P(B)$$

可得 $$P(A)=P(B)$$

从而 $$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=[1-P(A)]^2=\frac{1}{9}$$

解得 $$P(A)=\frac{2}{3}$$

【评注 1】 A 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中有一对是相互独立的，则其余三对也一定相互独立。

【评注 2】 一般来说，A 与 B 相互独立和 A 与 B 互不相容之间没有包含关系。特别是不能由 A 与 B 相互独立推导出 A 与 B 互不相容的结论，实际上，当 A 与 B 相互独立时，往往 A 与 B 是相容的。

【评注 3】 本题大概有三分之一的考生填$\frac{4}{9}$。是什么原因呢？恐怕是将相互独立与互不相容概念混淆了，误认为 A 与 B 互不相容，从而

$$\frac{1}{9}=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$
$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=1-[P(A)+P(B)]=1-2P(A)$$

于是$P(A)=\frac{4}{9}$

1.3.2 选择题

1.（1998 数学一） 设 A、B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1,P(B)>0,P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$,则必有(　　)。

(A) $P(A\mid B)=P(\overline{A}\mid B)$　　(B) $P(A\mid B)\neq P(\overline{A}\mid B)$

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$

【分析】 由题设 $P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$ 知，不论 A 是不发生，随机事件 A 发生的概率相同，说明 A，B 互相独立。或直接用条件概率定义进行推导。

解：由条件概率公式及条件 $P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$,知

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}$$

于是有

$$P(AB)[1-P(A)]=P(A)P(\overline{A}B)=P(A)[P(B)-P(AB)]$$

可见 $$P(AB)=P(A)P(B)$$

故选（C）。

【评注】 对于任意随机事件 A，B 有两两互不相容的分解：