湖北省高中试用课本

数　学

SHUXUE

第　四　册

湖北省高中试用课本

数　学

第四册

武汉市中小学教材编写组编

湖北省中小学教学教材研究室校订

*

湖北人民出版社出版　湖北省新华书店发行

宜昌市新华印刷厂印刷

1979年1月第1版　1979年1月第1次印刷

统一书号：K7106　1458　定价：0.33元

说　　明

这册教材是委托武汉市教育局组织力量编写的，黄石市教育局也派人参加了编写工作。现经我室校订，供我省高中二年级下学期使用。教材中有 * 号的第六章和第九章，各校可根据具体情况选用。

湖北省中小学教学教材研究室

一九七八年九月

目　　录

*第六章　排列、组合和二项式定理……………………1
第一节　排列……………………………………………1
第二节　组合……………………………………………12
第三节　数学归纳法……………………………………22
第四节　二项式定理……………………………………28
第七章　数列和极限……………………………………36
第一节　数列……………………………………………36
第二节　等差数列………………………………………42
第三节　等比数列………………………………………50
第四节　极限……………………………………………58
第八章　空间图形………………………………………73
第一节　平面……………………………………………73
第二节　直线和直线的位置关系………………………78
第三节　直线和平面的位置关系………………………85
第四节　平面和平面的位置关系………………………100
第五节　棱柱、棱锥、棱台……………………………113
第六节　圆柱、圆锥、圆台……………………………127
第七节　球………………………………………………144
*第九章　反三角函数和三角方程……………………151
第一节　反三角函数……………………………………151
第二节　三角方程………………………………………162

*第六章　排列、组合和二项式定理

第一节　排　　列

在实际工作中，考虑问题，往往要考虑它的各个方面，这就需要知道它总共有多少种可能情形．比如，用三面不同颜色的旗，按不同的次序挂在旗杆上表示信号，一共可以得到几种不同的信号？飞行在北京——武汉——广州航空线上的民航机，要准备多少种不同的飞机票？又应有几种不同的票价？又如一个城市的电话号码都用五位数字组成，那么最多可以安装多少台不同号码的电话机？回答这些问题，就要用到排列和组合的知识；排列、组合又是学习《概率论》和《数理统计》等应用数学的基础．

一　两个原理

我们先来看一个例子．

例 1　从武汉到葛店，可以乘火车，可以乘汽车，也可以乘轮船，一天中，火车有 2 次，汽车有 10 班，轮船有 2 班，乘坐不同班次的火车、汽车或轮船到葛店去，共有几种走法？

解： 因为到葛店的火车有 2 次，故乘火车到葛店去就有 2 种走法．同理，乘汽车有 10 种走法，乘轮船有 2 种走法，因此到葛店去的走法是乘火车、汽车与轮船的走法的和：

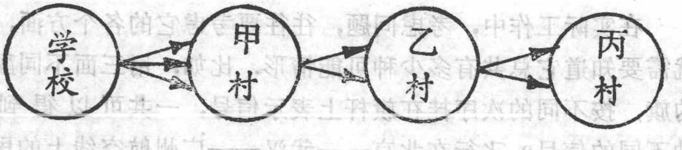
$$2+10+2=14$$

一般地说，就是下面的加法原理．

加法原理　完成一件事，有几种方式，第一种方式有 m 种方法，第二种方式有 n 种方法，……最后一种方式有 v 种方法．不论通过哪种方法，都可以完成这件事，那么完成这件事总共

有 $m+n+\cdots+v$ 种方法.

例 2　从学校出发，经过甲村、乙村到丙村. 如下图，学校到甲村有 3 条路，甲村到乙村有 2 条路，乙村到丙村也有 2 条路. 问从学校到丙村的途径有几种?



解：我们一步一步来分析这个问题.

从学校到甲村有 3 种走法，每一种走法到达甲村后，又有两种走法到乙村，故从学校到乙村，就有 $3\times2=6$ 种走法. 这 6 种走法中每一种又有两种走法到丙村，所以从学校到丙村共有 $6\times2=12$ 种走法.

总起来看，从学校到丙村的走法是学校经甲村、乙村到丙村的走法的积

$$3\times2\times2=12$$

一般地说，就是下面的乘法原理.

乘法原理　完成一件事，有几个步骤，第一步有 m 种方法，第二步有 n 种方法，……最后一步有 v 种方法. 必须通过每一步骤，才能完成这件事，那么完成这件事总共有 $m\cdot n\cdot\cdots\cdot v$ 种方法.

下面我们利用这两个定理来研究关于怎样计算不同情况或者不同做法的种数的一些问题.

二　全排列

例 1　用三面不同颜色的旗，按不同的次序挂在旗杆上表示信号，一共可以得到几种不同的信号?

解：设有红、黄、绿三种颜色的旗，按上、中、下三个位置挂在旗杆上表示信号.

挂在上面的一面旗，可以在三种颜色中任选一种，故有三种选法；上面的旗选定后，中间的旗，只能在剩下的两种颜色中选一种，共有两种选法；上、中二旗选定后，最后只剩下一种颜色排在下面，只有一种选法．如下表

上 ③	红	黄	绿
中 ②	黄　绿	红　绿	红　黄
下 ①	绿　黄	绿　红	黄　红

综上所述，根据乘法原理，可得 $3\times2\times1=6$ 种不同的信号.

例 2　用三个数字1、2、3，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解：这个问题相当于说，把 1、2、3 这三个数字分别放在百位、十位和个位上，有几种不同的放法？

百位上可以从 1、2、3 中任选一个，有 3 种方法；十位上在其余两个数字中任选一个，有 2 种方法；最后只剩下一个数字放在个位上，只有一种方法，根据乘法原理，共有 $3\times2\times1=6$ 种方法，就是可以组成 6 个不同的三位数：

123，132，213，231，312，321.

我们把考察的对象，如旗子，数字等都叫做元素．上面的问题，就是把 3 个不同的元素按照一定的顺序排成一列，要求出一共有几种不同的排法.

定义　把 n 个不同的元素按照一定的顺序排成一列，叫做 n 个不同元素的全排列.

全排列的特点是：所考虑的 n 个元素，每次都要全部拿来进行排列，因此，这样所得到的各种排列，它们包含的元素完全

相同，只是由于各个元素所排列的次序不同而构成了不同的全排列.

n 个元素构成的、所有不同的全排列的种数，用符号 P_n 表示，前面例 1、例 2 的算式都可以写成 $P_3=3\times2\times1=6$.

我们来研究计算 P_n 的公式(这里 n 是正整数). 和前面的两个例题相类似，可作如下分析：

第一个位置可从 n 个元素中任取一个来排，共有 n 种方法；

第二个位置只能在剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个来排，共有 $n-1$ 种方法；

第三个位置只能在剩下的 $n-2$ 个元素中任取一个来排，共有 $n-2$ 种方法.

这样继续下去，直到最后一个位置，也就是第 n 个位置，只剩一个元素，只有一种方法.

根据乘法原理，就得公式：

$$P_n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1 \tag{1}$$

(1) 式右边是前 n 个自然数的连乘积，用符号 $n!$ 表示，读作 n 的阶乘，公式(1) 可以写成

$$P_n=n! \tag{1'}$$

即 n 个元素的全排列数等于 $n!$.

例 3 计算：P_5 和 P_7.

解 $P_5=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$,

$P_7=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=5040$.

例 4 求证：

(1) $P_{m+1}-m\cdot m!=m!$;

(2) $m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]=\dfrac{m!}{(m-n)!}$.

证明 (1) $P_{m+1}-m\cdot m!=(m+1)!-m\cdot m!$

$$
\begin{aligned}
&= 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot m(m+1) \\
&\quad - m\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdot m \\
&= 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot m(m+1-m) \\
&= 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot m = m!;
\end{aligned}
$$

(2) $m\cdot(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]$

$$= \frac{m(m-1)\cdots[m-(n-1)]\cdot(m-n)[m-(n+1)]\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(m-n)[m-(n+1)]\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$= \frac{m!}{(m-n)!}.$$

练 习

1. 写出3个元素 a, b, c 的所有全排列.
2. 计算:

(1) $P_6 - P_5$;　　　　(2) $\frac{P_8}{P_5}$.

3. 下列等式是否正确? 为什么?

(1) $(2+3)! = 2! + 3!$;　　　(2) $(2\cdot 3)! = 2!\,3!$;

(3) $(n+1)! = (n^2+n)(n-1)!$.

三 选排列

例 1 飞行在北京——武汉——广州航空线上的民航机，要准备多少种不同的飞机票?

解: 每一个站到另一个站，就要一种飞机票，例如北京到武汉和武汉到北京的票是不同的，其他站也一样，就是每一个起点站和一个终点站要一种票.

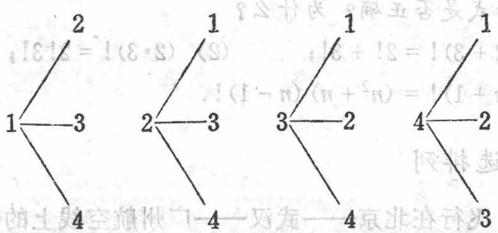
三个站中任何一个站都可以作起点站，终点是其余两个站中任选一个，就要一种票. 根据乘法原理，需要有 $3\times 2=6$ 种不同的飞机票.

起点站：	北京	北京	武汉	武汉	广州	广州
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
终点站：	武汉	广州	北京	广州	北京	武汉

这和全排列不同，它是从三个不同的元素中，每次取两个不同的元素按照一定的顺序排列的问题，要求出它一共有几种不同的排法.

例 2　从写有数字 1、2、3、4 的四张卡片中，每次取出二张，可以排成多少个不同的二位数？

这个问题就是从 1、2、3、4 个数字中，每次取出二个，按照十位、个位的顺序去排，要求一共有多少种不同的排法．因为第一步取十位上的数字有 4 种方法，第二步取个位上的数字有 3 种方法，所以根据乘法原理一共有 $4\times3=12$ 种方法，就是可以排成 12 个不同的二位数：



定义　从 m 个不同的元素中，每次取出 $n(1\leqslant n<m)$ 个不同的元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 m 个不同的元素中每次取 n 个不同元素的选排列.

所有不同的选排列的种数，用符号 A_m^n 表示，如例 1 就可以写成 $A_3^2=6$，例 2 可以写成 $A_4^2=12$.

选排列和全排列比较，它们相同的是都要按一定的顺序排

列；不同的是：全排列，每次全部元素都要拿来排列，因此它的各种不同排列之间并无元素的不同，而只有元素排例顺序的不同．而选排列，每次只取部分元素进行排列，因此不单要考虑元素排列的顺序，还必须考虑每次所取元素的不同．在选排列中，不同顺序，或不同元素的排列，都算作是不同的排列．

下面来研究计算 A_m^n 的公式(这里 m、n 都是正整数，并且 $m\geqslant n$)，和全排列相类似，可作如下分析：

第一个位置上可以从 m 个元素中任取一个来排，有 m 种方法；

第二个位置上在剩下的 $m-1$ 个元素中任取一个来排，有 $m-1$ 种方法；

第三个位置上再在剩下的 $m-2$ 个元素中任取一个来排，有 $m-2$ 种方法；

这样续续下去，到第 n 个位置上，经过前面 $n-1$ 次后，还剩下 $m-(n-1)$ 个元素，从中任取一个元素来排，有 $m-(n-1)$ 即 $m-n+1$ 种方法．

到此已经选够了 n 个元素，所以不再往下选取了．根据乘法原理，就得到公式：

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1) \tag{2}$$

即 从 m 个不同的元素中，每次取 n 个不同元素的选排列数等于 n 个连续正整数的乘积，其中最大的一个数是 m.

当 $n=m$ 时，选排列即变为全排列，其排列数由(2)式得：

$$A_m^n = A_m^m = m(m-1)\cdots\cdots(m-m+1) = m!$$

应用阶乘的符号，公式(2) 可以写成

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}^{*} \tag{2'}$$

* 按公式(2′)，$n=m$时，$A_m^m = \dfrac{m!}{(m-m)!}$而 $A_m^m = m!$，因此我们规定 $0!=1$.

推导过程参看全排列中例 4 的(2).

例 3 计算：(1) $A_8^4-2A_8^3$； (2) $\dfrac{A_{10}^3 P_7}{10!}$； (3) A_n^3.

解：(1) $A_8^4-2A_8^3=8\times7\times6\times5-2\times8\times7\times6$

$$=(5-2)\times8\times7\times6=1008;$$

(2) $\dfrac{A_{10}^3 P_7}{10!}=\dfrac{10\times9\times8\times7!}{10!}=\dfrac{10!}{10!}=1,$

或利用公式(2)，有

$$A_{10}^3=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10!}{7!},$$

于是 $\dfrac{A_{10}^3 P_7}{10!}=\dfrac{\dfrac{10!}{7!}\times7!}{10!}=1;$

(3) $A_n^3=n(n-1)(n-2)$.

例 4 用五面不同颜色的旗，按不同次序挂在旗杆上表示信号，可以单用一面，或二面、三面并用，一共可以得到几种不同的信号？

解：用一面旗做信号有 A_5^1 种，用二面旗做信号有 A_5^2 种，用三面旗做信号有 A_5^3 种，根据加法原理，所求的信号总数是

$$A_5^1+A_5^2+A_5^3=5+5\times4+5\times4\times3=85$$

答：一共可以得到 85 种不同的信号.

例 5 从六个数字 0，1，2，3，4，5 中每次取三个来排列：

(1) 共有多少种不同的排列法？

(2) 可以组成多少个没有重复数字的三位数？

(3) 在第(2)问中的三位数里，百位上是 1 的有多少个？

(4) 在第(2)问中的三位数里，百位上不是 1 的有多少个？

解：(1) 共有 $A_6^3=6\times5\times4=120$ 种不同的排列.

(2) 和(1)不同，从六个数字中任取三个排列，如果把

0 排在百位上就不是三位数了，因此必须把 0 在百位上的排列去掉，0 在百位的排列种数，等于从 0 以外的五个数字中每次取两个数字排列的种数，即 A_5^2 种，因此没有重复的三位数共有

$$A_6^3 - A_5^2 = 6\times5\times4 - 5\times4 = 120 - 20 = 100(\text{个}).$$

(3) 数字 1 在百位上的排列种数，和 0 在百位上的排列种数同样考虑，有 $A_5^2 = 20$(个).

(4) 数字 1 不在百位上，当然 0 也不能在百位上，所以百位上不是 1 的三位数共有

$$A_6^3 - 2A_5^2 = 120 - 40 = 80(\text{个}).$$

练　习

1. 写出从 5 个元素 a, b, c, d, e 里每次取 2 个元素的所有排列.

2. 计算

   (1) $A_8^4 - 2A_8^3$;　　(2) $A_4^1 + A_4^2 + A_4^3 + A_4^4$;

   (3) $\dfrac{A_9^5 + A_9^4}{A_{10}^6 + A_{10}^5}$.

3. 证下列等式：

   (1) $A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 = A_5^2$;　　(2) $A_{n+1}^m = A_n^m + mA_n^{m-1}$.

4. 一条铁路线上有 10 个车站，问一共需要多少种不同的车票？

5. 在十字路口来往的车辆，一共有多少种不同的行车路线？

6. 由数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 可以组成多少个没有重复数字的五位数？又由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 可以组成多少个没有重复数字的五位数？

四　重复排列举例

例 1　用三个数字 1、2、3 可以组成多少个没有重复数字

的三位数？这个问题是一个全排列问题，参看全排列的例 2，在那里我们已经求出了这样的三位数有 $P_3=3\times2\times1=6$ 个.

现在我们来看，如果允许百位、十位、和个位的数字可以重复，那末由 1、2、3 这三个数字所组成的三位数共有多少个？

解：所谓可以重复，就是百位上是某个数字以后，十位和个位还仍然可以用这个数字，例如，123 和 113 以及 111 都是符合要求的三位数，这样，百位上可以从 1、2、3 中任选一个，有 3 种方法；十位和个位都仍然可以再从 1、2、3 中任选一个，所以十位和个位也都各有 3 种方法. 故根据乘法原理可知，允许有重复的数字的三位数共有

$$3\times3\times3=3^3=27(\text{个}).$$

例 2 一个城市的电话号码用五位数字，最多可以安装多少台不同号码的电话？

解："28345" 这是 5 位数字的电话号码，而 "11237" 和 "00000" 也同样是 5 位数字的电话号码，因此这个问题是一个从 0 到 9 这十个数字中，每次取五个可以重复数字的排列问题. 和例 1 同样考虑，由乘法原理可知，总共能安装电话的台数为

$$10\times10\times10\times10\times10=10^5(\text{台}).$$

习 题 一

1. 不用多项式乘法，指出 $(a+b+c)(m+n)(p+q+r+s)$ 的展开式共有几项.
2. 乘积 $(a_1+a_2+\cdots a_m)(b_1+b_2+\cdots b_n)$ 一共有多少项？
3. 什么叫全排列？什么叫选排列？它们有什么异同点？
4. 计算：

(1) P_8； (2) $P_{10}-9P_9-8P_8$；

(3) $\dfrac{P_{10}}{P_6\cdot P_4}$； (4) $\dfrac{A_7^5-P_6}{6!+5!}$.

5. 计算：

(1) A_{10}^4；　(2) $A_{10}^3-2A_{10}^2$；

(3) $\frac{A_{15}^9}{A_9^9}$.

6. 证明下列等式：

(1) $A_{10}^4=A_{10}^2\cdot A_8^2$；　(2) $A_{10}^4=A_9^4+4A_9^3$；

(3) $A_m^{n+r}=A_m^n\cdot A_{m-n}^r$；　(4) $P_{n+1}-P_n=n^2P_{n-1}$.

7. 解方程：

(1) $A_x^2=20$；　(2) $A_x^3=xP_3$；

(3) $A_{2x+1}^4=140A_x^3$；　(4) $\frac{A_x^5+A_x^4}{A_x^3}=4$.

8. 某种产品加工时需要经过五个工种：

(1) 加工顺序共有多少种排法？

(2) 其中一个工种必须最先开始加工，工序有几种排法？

(3) 其中一个工种不能在最后加工，工序有几种排法？

(4) 其中有两个工种必须连续加工，而且这两个工种只能一个在另一个后，工序有几种排法？

9. 有红、黄、绿、兰四颗信号弹，若用不同的个数以及不同的颜色顺序表示不同的信号，问这四颗信号弹能表示多少不同的信号？

10. 从40本不同的书中取出三本，送给三个人，每人一本，有多少种方法？

11. (1) 由数字1，2，3，4，5，6可以组成多少个没有重复数字的五位数？

(2) 由数字0，1，2，3，4，5可以组成多少个没有重复数字的五位数？

(3) 由数字1，2，3，4，5可以组成多少个没有重复数字的自然数？

(4) 由数字 1，2，3，4，5 可以组成多少个没有重复数字并且比 13000 大的自然数？

12. 7 个人并坐照相：

(1) 如果某一个必须坐在中间，有多少种坐法？

(2) 如果某两人必须坐在两端（左右不限），有多少种坐法？

(3) 如果某一人不坐在中间，也不坐在两端，有多少种坐法？

13. (1) 从多少个元素里每次取出 2 个元素所有排列的种数是 56？

(2) 已知从 n 个元素里每次取出 2 个元素所有排列的种数等于从 $(n-4)$ 个元素里每次取出 2 个元素所有排列的种数的 7 倍，求 n.

14. *(1) 求由 2、3、4、5 所组成的所有没有重复数字的四位数数字的和.

(2) 求由 2、3、4、5 所组成的所有没有重复数字的四位数的和.

15. * 在十进制中，所有的正五位数有多少个？正 n 位数有多少个？

第二节 组 合

一 组合问题的实例及组合的定义

例 1 飞行在北京——武汉——广州航空线上的民航飞机，有几种不同的飞机票价？

解：这个问题和上节计算飞机票的种数不同，飞机票的种数和起点、终点站有关，从北京到武汉和从武汉到北京，应当是两种不同的飞机票；但是飞机票价只和起点与终点的距离有

关，从北京到武汉和从武汉到北京，飞机票价完全一样．因此，计算飞机票的种数问题，是从 3 个不同的元素（北京、武汉、广州）中，每次取出 2 个，按照一定顺序排列，要求一共有多少种不同的排列方法；而这里计算票价的问题，是从 3 个不同的元素中，每次取出 2 个，不管怎样顺序，并成一组，要求一共有多少种不同的方法．因此，票价的种数只有下面 3 种：

(1) 北京←-→武汉；(2) 武汉←-→广州；

(3) 北京←-→广州．

上面这个例子和前面讲的排列问题不同，它们都是从三个不同的元素中，每次取两个并成一组而成，不管元素排列的顺序如何．

定义 从 m 个不同的元素中，每次取出 $n(1\leqslant n\leqslant m)$ 个不同的元素，不管怎样的顺序并成一组，叫做从 m 个不同的元素中每次取 n 个不同的元素的一种组合．

所有不同的组合的种数，用符号 C_m^n 来表示．例 1 和例 2 中是在 3 个元素中每次取 2 个的组合，组合个数可写为 $C_3^2=3$.

二　组合种数 C_m^n 的计算公式

我们知道，排列和组合的根本区别，在于排列有顺序的要求，而组合没有顺序的要求，但是各种事物除了有各自的特征外，又是相互联系的．组合、全排列和选排列也是各有其特征，而又相互密切联系的．我们已经知道了全排列和选排列的计算公式，能否根据这两种排列的计算公式而推导出组合的计算公式呢？我们先看下面的例子：

从 a、b、c 这 3 个元素里每次取 2 个的组合只有 3 种：

$$ab,\ ac,\ bc.$$

而从 a、b、c 这 3 个元素里每次取 2 个元素的选排列有