

张景中 / 主编

走进教育数学

Go to Educational Mathematics

微积分快餐

(第二版)

你能解读托尔斯泰的《战争与和平》吗？

你能预报中国明年的人口吗？

要学一点微积分（最少的微积分）：

两个概念，两个公式，加一个方程，

归根结底，就是几步代数，

加上一点实数，没有更多。

林 群 / 著



科学出版社

“十一五”国家重点图书出版规划项目



走进教育数学

Go to Educational Mathematics

微积分快餐

(第二版)

林 群 / 著

科学出版社
北 京

内 容 简 介

微积分最有用和急需的有两张表——导数表和积分表. 怎么得到的? 过去的证明又长又深入泥潭, 但本书另择渠道, 把证明复杂度降到几步高中数学, 又短又浅, 是教学的巨变, 也圆了微积分高中化之梦!

一举攻破两张表后还不够, 大学专业或考研的学生要学更多(包括微分方程、多元微积分及抽象微积分). 这时, 高中数学已不够用, 必须有极限以及更高深的方法参战. 本书只是按浅到深、急到缓顺序出场, 概念能少就少, 证明越浅越好, 不误用不添乱, 到了该出手才出手.

书中还对比了微积分教学的过去和现在.

图书在版编目(CIP)数据

微积分快餐 / 林群著. —2 版. —北京: 科学出版社, 2011

(走进教育数学 / 张景中主编)

ISBN 978-7-03-030552-7

I. 微… II. 林… III. 微积分—普及读物 IV. ①O172-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 042681 号

丛书策划: 李 敏

责任编辑: 李 敏 / 责任校对: 何艳萍

责任印制: 钱玉芬 / 整体设计: 黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销



*

2009 年 8 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2011 年 4 月第 二 版 印张: 8 3/4 插页: 2

2011 年 4 月第一次印刷 字数: 150 000

印数: 10 001—14 000

定价: 25.00 元

如有印装质量问题, 我社负责调换

《走进教育数学》丛书编委会

主 编 张景中

委 员 (按汉语拼音排序)

李尚志 林 群 沈文选 谈祥柏

王鹏远 张奠宙 张景中 朱华伟

总序

看到本丛书，多数人会问这样的问题：

“什么是教育数学？”

“教育数学和数学教育有何不同？”

简单说，改造数学使之更适宜于教学和学习，是教育数学为自己提出的任务。

把学数学比作吃核桃。核桃仁美味而富有营养，但要砸开才能吃到它。有些核桃，外壳与核仁紧密相依，成都人形象地叫它们“夹米子核桃”，如若砸不得法，砸开了还很难吃到。数学教育要研究的，就是如何砸核桃吃核桃。教育数学呢，则要研究改良核桃的品种，让核桃更美味，更营养，更容易砸开吃净。

“教育数学”的提法，最早出现在笔者1989年所写的《从数学教育到教育数学》中。其实，教育数学的活动早已有之，如欧几里得著《几何原本》、柯西写《分析教程》，

都是教育数学的经典之作。

数学教育有很多世界公认的难点,如初等数学里的几何和三角,高等数学里面的微积分,都比较难学。为了对付这些难点,很多数学老师、数学教育专家前赴后继,做了大量的研究,写了很多的著作,进行了广泛的教学实践。多年实践,几番改革,还是觉得太难,不得不“忍痛割爱”,少学或者不学。教育数学则从另一个角度看问题:这些难点的产生,是不是因为前人留下来的知识组织得不够好,不适于数学的教与学?能不能优化数学,改良数学,让数学知识变得更容易学习呢?

ii

知识的组织方式和学习的难易有密切的联系。英语中12个月的名字:January, February, ……。背单词要花点工夫吧!如果改良一下:一月就叫 Monthone, 二月就叫 Monthtwo, 等等,马上就能理解,就能记住,学起来就容易多了。生活的语言如此,科学的语言——数学——何尝不是这样呢?

很多人认为,现在小学、中学到大学里所学的数学,从算术、几何、代数、三角到微积分,都是几百年前甚至几千年前创造出来的。这些数学的最基本的部分,普遍认为是经过千锤百炼,相当成熟了。对于这样的数学内容,除了选择取舍,除了教学法的加工之外,还有优化改革的余地吗?

但事情还可以换个角度看。这些进入了课堂的数学,是在不同的年代,不同的地方,由不同的人,为不同的目的而创造出来的,而且其中很多不是为了教学的目的而创造出来的。难道它们会自然而然地配合默契,适宜于教学和学

习吗?

看来,这主要不是一个理论问题,而是一个实践问题.

走进教育数学,看看教育数学在做什么,有助于回答这类问题.

随便翻翻这几本书,就能了解教育数学领域里近20年来做了哪些工作.从已有的结果看到,教育数学有事可做,而且能做更多的事情.

比如微积分教学的改革,这是在世界范围内被广为关注的事.丛书中有两本专讲微积分,主要还不是讲教学方法,而是讲改革微积分本身.

由牛顿和莱布尼茨创建的微积分,是第一代的微积分.这是说不清楚的微积分.创建者说不清楚,使用微积分解决问题的数学家也说不清楚.原理虽然说不清楚,应用仍然在蓬勃发展.微积分在说不清楚的情形下发展了130多年.

柯西和魏尔斯特拉斯等,建立了严谨的极限理论,巩固了微积分的基础,形成了第二代的微积分.数学家把微积分说清楚了.但是由于概念和推理烦琐迂回,对于绝大多数学习高等数学的人来说,是听不明白的微积分.微积分在多数学习者听不明白的情形下,又发展了170多年,直到今天.

第三代的微积分,是正在创建发展的新一代的微积分.人们希望微积分不但严谨,而且直观易懂,简易明快.让学习者用较少的时间和精力就能够明白其原理,不但知其然而且知其所以然.不但数学家说得清楚,而且非数学专业的多数学子也能听得明白.

第一代微积分和第二代微积分,在具体计算方法上基

本相同；不同的是对原理的说明，前者说不清楚，后者说清楚了。

第三代微积分和前两代微积分，在具体计算方法上也没有不同；不同的仍是对原理的说明。

几十年来，国内外都有人从事第三代微积分的研究以至教学实践。这方面的努力，已经有了显著的成效。在我国，林群院士近10年来在此方向做了大量的工作。本丛书中的《微积分快餐》，就是他在此领域的代表作。

古今中外，通俗地介绍微积分的读物极多，但能够兼顾严谨与浅显直观的几乎没有。《微积分快餐》做到了。一张图，一个不等式，几行文字，浓缩了微积分的精华。作者将微积分讲得轻松活泼、简单明了，而且严谨自封，让读者在品尝快餐的过程中进入了高等数学的殿堂。

丛书中还有一本《直来直去的微积分》，是笔者学习微积分的心得。书中从“瞬时速度有时比平均速度大，有时比平均速度小”这个平凡的陈述出发，不用极限概念和实数理论，“微分不微，积分不积”，直截了当地建立了微积分基础理论。书中概念与《微积分快餐》中的逻辑等价而呈现形式不尽相同，殊途同归，显示出第三代微积分的丰富多彩。

回顾历史，牛顿和拉格朗日都曾撰写著作，致力于建立不用极限也不用无穷小的微积分，或证明微积分的方法，但没有成功。我国数学大师华罗庚所撰写的《高等数学引论》中，也曾刻意求新，不用中值定理或实数理论而寻求直接证明“导数正则函数增”这个具有广泛应用的微积分基本命题，可惜也没有达到目的。

前辈泰斗是我们的先驱. 教育数学的进展实现了先驱们简化微积分理论的愿望.

丛书中两本关于微积分的书, 都专注于基本思想和基本概念的变革. 基本思想、基本概念, 以及在此基础上建立的基本定理和公式, 是这门数学的筋骨. 数学不能只有筋骨, 还要有血有肉. 中国高等教育学会教育数学专业委员会理事长、全国名师李尚志教授的最新力作《数学的神韵》, 是有血有肉、丰满生动的教育数学. 书中的大量精彩实例可能是你我熟悉的老故事, 而作者却能推陈出新, 用新的视角和方法处理老问题, 找出事物之间的联系, 发现不同中的相同, 揭示隐藏的规律. 幽默的场景, 诙谐的语言, 使人在轻松阅读中领略神韵, 识破玄机. 看看这些标题, “简单见神韵”、“无招胜有招”、“茅台换矿泉”、“凌波微步微积分”, 可见作者的功力非同一般! 特别值得一提的是, 书中对微积分的精辟见解, 如用代数观点演绎无穷小等, 适用于第一代、第二代和第三代微积分的教学与学习, 望读者留意体味.

练武功的上乘境界是“无招胜有招”, 但武功仍要从一招一式入门. 解数学题也是如此. 著名数学家和数学教育家项武义先生说, 教数学要教给学生“大巧”, 要教学生“运用之妙, 存乎一心”, 以不变应万变, 不讲或少讲只能对付一个或几个题目的“小巧”. 我想所谓“无招胜有招”的境界, 就是“大巧”吧! 但是, 小巧固不足取, 大巧也确实太难. 对于大多数学子, 还要重视有章可循的招式, 由小到大, 以小御大, 小题做大, 小中见大. 朱华伟教授和钱展望教授的《数学解题策略》, 踏踏实实地从一招、一式、一题、一

法着手,探秘发微,系统地阐述数学解题法门,是引领读者登堂入室之作.作者是数学奥林匹克领域的专家.数学奥林匹克讲究题目出新,不落老套.我看了这本书里的不少例题,看不出有哪些似曾相识,真不知道他是从哪里搜罗来的!

朱华伟教授还为本丛书写了一本《从数学竞赛到竞赛数学》.竞赛数学当然就是奥林匹克数学.华伟教授认为,竞赛数学是教育数学的一部分.这个看法是言之成理的.数学要解题,要发现问题、创造方法.年复一年进行的数学竞赛活动,不断地为数学问题的宝库注入新鲜血液,常常把学术形态的数学成果转化为可能用于教学的形态.早期的国际数学奥林匹克试题,有不少进入了数学教材,成为例题和习题.竞赛数学与教育数学的关系,于此可见一斑.

写到这里,忍不住要为数学竞赛说几句话.有一阵子,媒体上面出现不少讨伐数学竞赛的声音,有的教育专家甚至认为数学竞赛之害甚于黄、赌、毒.我看了有关报道后第一个想法是,中国现在值得反对的事情不少,论轻重缓急还远远轮不到反对数学竞赛吧.再仔细读这些反对数学竞赛的意见,可以看出来,他们反对的实际上是某些为牟利而又误人子弟的数学竞赛培训.就数学竞赛本身而言,是面向青少年中很小一部分数学爱好者而组织的活动.这些热心参与数学竞赛的数学爱好者(还有不少数学爱好者参与其他活动,例如青少年创新发明活动、数学建模活动、近年来设立的丘成桐中学数学奖),估计不超过约两亿中小学生的百分之五.从一方面讲,数学竞赛培训活动过热产生的消极影响,和升学考试体制以及教育资源分配过分集中等多种因素有关,这笔账不能算在数学竞赛头上;从另一方面看,

大学招生和数学竞赛挂钩，也正说明了数学竞赛活动的成功因而得到认可。对于青少年的课外兴趣活动，积极的对策不应当是限制堵塞，而是开源分流。发展多种课外活动，让更多的青少年各得其所，把各种活动都办得像数学竞赛这样成功并且被认可，数学竞赛培训活动过热的问题自然就化解或缓解了。

回到前面的话题。上面说到“大巧”和“小巧”，自然想到还有“中巧”。大巧法无定法，小巧一题一法。中巧呢，则希望用一个方法解出一类题目。也就是说，把数学问题分门别类，一类一类地寻求可以机械执行的方法，即算法。中国古代的《九章算术》，就贯穿了分类解题寻求算法的思想。中小学里学习四则算术、代数方程，大学里学习求导数，学的多是机械的算法。但是，自古以来几何命题的证明却千变万化，法无定法。为了找寻几何证题的一般规律，从欧几里得、笛卡儿到希尔伯特，前赴后继，孜孜以求。我国最高科技奖获得者、著名数学家吴文俊院士指出，希尔伯特是第一个发现了几何证明机械化算法的人。在《几何基础》这部名著中，希尔伯特对于只涉及关联性质的这类几何命题，给出了机械化的判定算法。由于受时代的局限性，希尔伯特这一学术成果并不为太多人所知。直到1977年，吴文俊先生提出了一个新的方法，可以机械地判定初等几何中等式型命题的真假。这一成果在国际上被称为“吴方法”，它在几何定理机器证明领域中掀起了一个高潮，使这个自动推理中最不成功的部分变成了最成功的部分。

吴方法和后来提出的多种几何定理机器证明的算法，都不能给出人们易于检验和理解的证明，即所谓可读证明。国

内外的专家一度认为,机器证明的本质在于“用量的复杂克服质的困难”,所以不可能机械地产生可读证明.

笔者基于1974年在新疆教初中时指导学生解决几何问题的心得,总结出用面积关系解题的规律.在这些规律的基础上,1992年提出消点算法,和周咸青、高小山两位教授合作,创建了可构造等式型几何定理可读证明自动生成的理论和方法,并在计算机上实现.最近在网上看到,面积消点法也多次在国外的不同的系统中实现了.本丛书中的《几何新方法和新体系》,包括了面积消点法的通俗阐述,以及笔者提出的一个有关面积方法的公理系统,由冷拓同志协助笔者整理而成.教育数学研究的副产品解决了机器证明领域中的难题,对笔者而言实属侥幸.

基于对数学教育的兴趣,笔者从1974年以来,在30多年间持续地探讨面积解题的规律,想把几何变容易一些.后来发现,国内外的中学数学教材里,已经把几何证明删得差不多了.于是“迷途知返”,把三角作为研究的重点.数学教材无论如何改革,三角总是删不掉的吧.本丛书中的《一线串通的初等数学》,讲的是如何在小学数学知识的基础上建立三角,从三角的发展引出代数工具并探索几何,把三者串在一起的思路.

在《一线串通的初等数学》中没有提到向量.其实,向量早已下放到中学,与传统的初等数学为伍了.在上海的数学教材里甚至在初中就开始讲向量.讲了向量,自然想试试用向量解决几何问题,看看向量解题有没有优越性.可惜在教材里和刊物上出现的许多向量例题中,方法略嫌烦琐,反而不如传统的几何方法简捷优美.如何用向量法解几何

题？能不能在大量的几何问题的解决过程中体现向量解题的优越性？这自然是教育数学应当关心的一个问题。为此，本丛书推出一本《绕来绕去的向量法》。书中用大量实例说明，如果掌握了向量解题的要领，在许多情形下，向量法比纯几何方法或者坐标法干得更漂亮。这要领，除了向量的基本性质，关键就是“回路法”。绕来绕去，就是回路之意。回路法是笔者的经验谈，没有考证前人是否已有过，更没有上升为算法。书稿主要由彭翥成同志执笔，绝大多数例子，也是他采集加工的。

谈起中国的数学科普，谈祥柏的名字几乎无人不知。老先生年近八旬，从事数学科普创作超过半个世纪，出书 50 多种，文章逾千篇。对于数学的执著和一生的爱，洋溢于他为本丛书所写的《数学不了情》的字里行间。哪怕仅仅信手翻上几页，哪怕是对数学知之不多的中小学生，也会被一个个精彩算例所显示的数学之美和数学之奇深深吸引。书中涉及的数学知识似乎不多不深，所蕴含的哲理却足以使读者掩卷遐想。例如，书中揭示出高等代数的对称、均衡与和谐，展现了古老学科的青春；书中提到海峡两岸的数学爱好者发现了千百年来从无数学者、名人的眼皮底下滑过去的“自然数高次方的不变特性”，这些生动活泼的素材，兼有冰冷的思考与火热的激情，无论读者偏文偏理，均会有所收益。

沈文选教授长期从事中学数学研究、初等数学研究、奥林匹克数学研究和教育数学的研究。他的《走进教育数学》和本丛书同名，是一本从学术理论角度探索教育数学的著作。在书中他试图诠释“教育数学”的概念，探究

“教育数学”的思想源头与内涵；提出“整合创新优化”、“返璞归真优化”等优化数学的方法和手段；并提供了丰富的案例。笔者原来杜撰出“教育数学”的概念，虽然有些实例，但却凌乱无序，不成系统。经过文选教授的旁征博引，诠释论证，居然有了粗具规模的体系框架，有点学科模样了。这确是意外的收获。

本丛书中的《情真意切话数学》，是张奠宙教授和丁传松、柴俊两位先生合作完成的一本别有风味的谈数学与数学教育的力作。作者跳出数学看数学，以全新的视角，阐述中学数学和微积分学中蕴涵的人文意境；将中国古诗词等文学艺术和数学思想加以连接，既有数学的科学内涵，又有丰富的人文素养，把数学与文艺沟通，帮助读者更好地理解 and 亲近数学。在这里，老子道德经中“道生一，一生二，二生三，三生万物”被看成自然数公理的本意；“前不见古人，后不见来者，念天地之悠悠，独怆然而涕下”，解读为“四维时空”的遐想；“满园春色关不住，一枝红杏出墙来”用来描述无界数列的本性；而“孤帆远影碧空尽，惟见长江天际流”则成为极限过程的传神写照。书中把数学之美分为美观、美好、美妙和完美4个层次，观点新颖精辟，论述丝丝入扣。在课堂上讲数学如能够如此情深意切，何愁学生不爱数学？

浏览着这风格不同并且内容迥异的11本书，教育数学领域的现状历历在目。这是一个开放求新的园地，一个蓬勃发展的领域。在这里耕耘劳作的人们，想的是教育，做的是数学，为教育而研究数学，通过丰富发展数学而推进教育。在这里大家都做自己想做的事，提出新定义新概念，建立

新方法新体系，发掘新问题新技巧，寻求新思路新趣味，凡此种种，无不是为教育而做数学。

为教育而做数学，做出了些结果，出了这套书，这仅仅是开始。真正重要的是进入教材，进入课堂，产生实效，让千千万万学子受益，进而推动社会发展，造福人类。这才是作者们和出版者的大期望。切望海内外同道者和不同道者指正批评，相与切磋，共求真知，为数学教育的进步贡献力量。



xi

2009年7月

前言 (第二版)

xii

本书是《微积分快餐》第二版. 与第一版不同, 一元微积分表达得更简练了 (由 115 页减为 53 页). 首先只凭几步高中数学, 小战大胜: 战胜了极限概念、制服了初等函数的微分和积分, 高中生也能看明白, 满足了急需. 接着, 披露了高中微积分的缺口与死角, 并引出大学高深的方法和工具, 包括算法和计算机, 来堵口圆场, 圆了微积分完整化之梦, 消除了考研不够用的担忧.

与前更不同的是二元微积分, 重新写过了.

必须指出, 张景中的新著《直来直去的微积分》^[33]与本书异曲同工, 特请他写了附录 1!

本书前身是《光明日报》(1997 年 6 月 27 日), 《人民日报》(1997 年 8 月 6 日) 的几根几何线条^[6]以及《画中漫游微积分》(广西师范大学出版社, 1999 年 1 月) 的两步代数证明^[8].

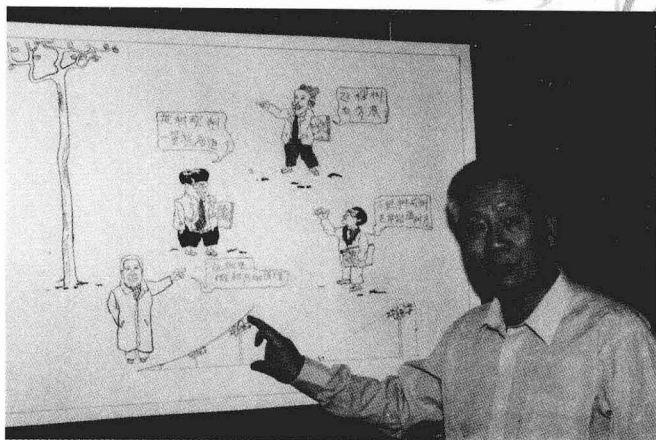
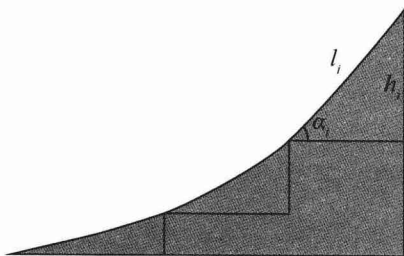
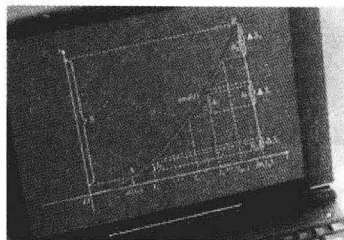


图 0-1 作者

图 0-2 通过斜坡求高渗透作者
微积分的基本思想图 0-3 用于中学
教材曲线求高图

xiii

以后又被用作国内中学^[16,23]及几所大学的教材。

本书仅提供骨架，习题与应用才是血与肉，其多少或深浅需要教师自己根据学生水平及专业需求，到其他课本中选取。

林明

2011 年 1 月