普通高等教育“十一五”规划教材

离散数学

胡海涛　主　编
刘　颖　程文刚　副主编

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

普通高等教育“十一五”规划教材

离散数学

主　编　胡海涛
副主编　刘　颖　程文刚
编　写　陈　菲　周长玉
主　审　郑　玲

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十一五”规划教材。

全书共分为五篇，主要内容包括命题逻辑和谓词逻辑的基本概念和推理理论；集合的基本知识、关系和函数；半群与群、环与域、格与布尔代数等代数系统的基本概念与性质；欧拉图、哈密尔顿图、二部图、平面图及树的基本概念和表示；基本计数原理、容斥原理、鸽巢原理、二项式定理、生成函数、递推关系和Pólya计数定理。

本书知识面广，内容深入浅出、文字浅显易懂，适合作为高等院校计算机科学技术等相关专业的本科生和研究生的教学用书，也可供计算机工程技术和研究人员学习离散数学的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/胡海涛主编. —北京：中国电力出版社，2010.9
普通高等教育“十一五”规划教材
ISBN 978-7-5123-0873-2

Ⅰ. ①离…　Ⅱ. ①胡…　Ⅲ. ①离散数学–高等学校–教材　Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第179892号

中国电力出版社出版、发行
（北京三里河路6号　100044　http://jc.cepp.com.cn）
北京市同江印刷厂印刷
各地新华书店经售
*
2010年9月第一版　2010年9月北京第一次印刷
787毫米×1092毫米　16开本　19.25印张　461千字
印数0001—3000册　定价**31.00**元

前　言

目前，计算机领域的研究和应用中遇到的许多重大问题，不仅有许多技术上的问题，而且有很多理论性问题。这些问题的求解很大程度上依赖于和计算机相关的数学理论。因此，无论学生今后从事计算机领域的理论研究，还是应用开发或者技术管理工作，都需要打下坚实的数学理论基础，以适应计算机科学迅速发展和知识更新的需要，而离散数学是计算机科学必备的数学基础。

离散数学研究各种离散形式对象的结构及它们之间的关系，在数据结构、算法设计与分析、操作系统、编译原理、人工智能、软件工程、网络与分布式计算、计算机图形学、数据库理论、计算机体系结构等领域都得到了广泛应用。除了作为多门课程必需的数学基础之外，离散数学中所体现的现代数学思想对于加强学生的素质教育，培养学生的抽象思维和逻辑表达能力，提高发现问题、分析问题和解决问题的能力也有着不可替代的作用。

本书共分为五篇。第一篇为数理逻辑，内容包括命题逻辑、谓词逻辑的基本概念和推理理论；第二篇为集合论，包括集合的基本知识、关系和函数；第三篇为代数系统，包括代数系统的基本概念与性质，以及几类重要的代数系统，如半群和群、环与域、格和布尔代数；第四篇为图论，内容包括图的基本概念和表示，几类重要的图：欧拉图、哈密尔顿图、二部图、平面图和树；第五篇为组合学，包括基本计数原理、容斥原理、鸽巢原理、二项式定理、二项式系数、生成函数、递推关系与 Pólya 计数定理。

本书内容广泛，不仅包括目前一般离散数学的基本内容，如数理逻辑、集合论、代数系统和图论，还包括组合论，在编写过程中，力图将离散数学中的各部分内容有机地联系起来，同时也尽量地将各部分的内容特色表达清楚。

本书是在编者多年从事离散数学教学实践和参考国内外多种教材的基础上编写而成的，在编写的过程中尽量做到内容深入浅出、文字浅显易懂，因此，本书也非常适合于读者自学。书中每章均配有典型的例题和适量的习题，通过这些可以培养和提高学生解决问题的能力和技巧。

本书的前四篇，作为计算机科学与技术及相关专业本科生的必修课程，参考学时为 80；第五篇可以作为高年级本科生或计算机相关专业的研究生的选修课，参考学时为 32。本书不仅可以作为高等院校计算机科学与技术及相关专业的教材，也可以作为计算机工作者的参考书。

本书由胡海涛主编，第 1、2 章由刘颖编写，第 3、4 章由程文刚编写，第 5、6、7、8、9、10 章由胡海涛编写，陈菲和周长玉编写了逻辑和图论的部分内容和习题。全书由胡海涛统稿并校阅，郑玲老师对全书进行了审阅。

由于编者水平有限，书中错误及不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

最后，再一次感谢为本书出版做出积极贡献和支持的同志们。

编　者

2010 年 8 月于华北电力大学

目 录

第二篇 集 合 论

第三篇 代 数 系 统

第四篇　图　　论

*第五篇　组　　合　　学

第一篇

数理逻辑

逻辑学是研究推理的科学，具有十分悠久的历史，早在两千多年前的古希腊时代就已经很发达了。数理逻辑是数学化的逻辑学，是用数学方法研究推理的科学，其历史只有300多年。德国哲学家和数学家莱布尼兹(Leibniz)被认为是数理逻辑的创始人，他于17世纪中期明确提出了建立通用的符号语言和通用代数的思想。他认为数学之所以能迅速发展，数学知识之所以能行之有效，就是因为数学使用了特制的符号语言。这种符号为表达思想和进行推理提供了良好的条件。他希望能够建立一个普遍的符号语言，这种语言的符号应该是表意的，每个符号表达一个概念，如同数学的符号一样。一个完善的符号语言同时又应该是一个思维的演算。他希望根据这种演算，思维和推理就可以用计算来代替。这样当遇有争论的时候，大家只要拿起笔来计算一下，问题就解决了。表意的符号语言和思维的演算是他提出来的重要思想。

最近几十年数理逻辑发展迅速，研究范围不断扩大，应用领域日益广泛。不少成果已应用于计算机科学领域。如PROLOG语言就以一阶逻辑为基础。在程序验证、程序变换、软件形式说明、程序设计语言的形式语义学、人工智能等方面，都大量地应用数理逻辑的概念、方法和理论。

概括起来，数理逻辑可以分为逻辑演算、公理集合论、证明论、递归论和模型论五大分支。逻辑演算是数理逻辑中的最基础部分。本篇介绍逻辑演算中最基本、最成熟的两个部分：命题逻辑和谓词逻辑。这也是学习和研究各种非标准逻辑的基础，在计算机科学中应用最为广泛。

数理逻辑

逻辑学是研究推理的科学，它有十分悠久的历史。早在[illegible]代就已经很发达了。数理逻辑是数学化的逻辑学，是用数[illegible]已有300多年。德国哲学家和数学家莱布尼茨(Leibniz)[illegible]于17世纪中期明确提出了建立通用的符号语言[illegible]能迅速发展。数学知识之所以能够不断[illegible]符号语言[illegible]这种符号为表达思想和进行推理提供了极大的[illegible]的符号语言[illegible]这种语言的符号应该是表意的，[illegible]号一样。一个完善的符号语言同时又应该是一个思维的[illegible]推理可以用计算来代替。这样当遇到[illegible]计算一下，问题就解决了。表意的符号语言和思维[illegible]

[illegible]十年数理逻辑发展迅速，研究范围不断扩大，[illegible]计算机科学领域，如PROLOG语言就以[illegible]形式说明，程序设计语言的形式语义[illegible]大学[illegible]数理逻辑的概念、方法和理论。

概括起来，数理逻辑可以分为逻辑演算、公理集合论[illegible]大分支。逻辑演算是数理逻辑中的最基础部分。本[illegible]的两个部分：命题逻辑和谓词逻辑。这也是学习[illegible]在计算机科学中应用最为广泛。

第1章 命 题 逻 辑

1.1 命题与联结词

1.1.1 命题及其表示

所谓命题，是指具有真假意义的陈述句。也就是说，能够确定或能够分辨其真假的陈述句，且真或假二者必居其一，也只能居其一。简而言之，命题就是非真即假的陈述句。下面给出一些实例，判断是否为命题。

(1) 离散数学好学吗？

(2) 我真开心！

(3) 禁止吸烟！

(4) 我是学生。

(5) 6 不是自然数。

(6) 火星上有生物。

(7) 现在是八点钟。

(8) 2012 年奥林匹克运动会将在英国举行。

(9) 如果天气好，那么我去散步。

(10) 本命题为假。

在上面的例子中，(1)、(2)、(3)不是陈述句，因而不是命题。(4)、(5)、(6)、(7)、(8)、(9)是命题。其中(4)的真假意义要根据具体的“我”而定；(7)要根据“现在”具体的时间而定；(5)是假命题；(6)在目前可能无法判定真假，但从事物的本质而言，它本身是有明确真假意义的，只不过现在还不知道，所以承认这也是一个命题；(8)是真命题；(9)由两句话组成，有明确的真假意义，因而是命题；(10)无法确定它的真假，当“本命题”假时，它便真；当“本命题”真时它便假，这种断言叫悖论。

一些不能分解为更简单的陈述句的命题，称为原子命题。如上面的(4)、(5)、(6)、(7)、(8)都是原子命题。反之，称为复合命题，即由联结词、标点符号和原子命题复合而成的命题。如上面的(9)为复合命题。联结词的概念将在下一小节给出。

一个命题的真或假称为命题的真值，简称值，真用 T 或 1 表示；假用 F 或 0 表示。由于命题只有真、假二个真值，所以命题逻辑也称二值逻辑。

一个原子命题，一般用大写字母或带下标的大写字母，如 $P, Q, R, \cdots$，或 $P_i, Q_i, R_i, \cdots$，表示，把表示原子命题的符号，称为命题标识符，简称命题符。例如：

P: 北京是中国的首都。其中，“:”代表“表示”的意思。

一个命题标识符 P，如果表示一个确定的命题，则称 P 为原子命题常元，简称命题常元；若 P 只表示任意命题的位置标志，或表示不确定的命题，或以原子命题为值的变元 P，就称 P 为原子命题变元，简称命题变元。可见，命题变元是以命题的真值为值的变元。显然，命题变元不是命题。将一个命题变元 P 用一个特定命题去代替，才能确定它的真值，这时也称

为对 P 进行指派或对 P 进行解释。

1.1.2 联结词

联结词是逻辑联结词或命题联结词的简称，用它和原子命题构成复合命题。常用联结词有以下五种。

1. 否定联结词

设 P 是一个命题，由联结词 $\neg$ 和命题 P 构成 $\neg P$，$\neg P$ 为命题 P 的否定式复合命题。$\neg P$ 读为“非 P”。

联结词 $\neg$ 是自然语言中的“非”、“不”和“没有”等的逻辑抽象。否定联结词是一个一元运算。例如：

P：离散数学是计算机及相关专业的基础课。

$\neg P$：离散数学不是计算机及相关专业的基础课。

2. 合取联结词

令 P 和 Q 是两个命题，由联结词 $\wedge$ 把 P、Q 连接成 $P\wedge Q$，称 $P\wedge Q$ 为 P 和 Q 的合取式复合命题，$P\wedge Q$ 读为“P 与 Q”，或“P 合取 Q”。

联结词 $\wedge$ 是自然语言中的“和”、“与”、“并且”、“既…又…”等的逻辑抽象。合取联结词是一个二元运算。例如：

P：今天下雨。

Q：明天下雨。

$P\wedge Q$：今天与明天都下雨。

3. 析取联结词

设 P 和 Q 是两个命题，由联结词 $\vee$ 把 P、Q 连接成 $P\vee Q$，称 $P\vee Q$ 为 P 和 Q 的析取式复合命题，$P\vee Q$ 读做“P 或 Q”，或“P 析取 Q”。

析取联结词 $\vee$ 是自然语言中的“或”的逻辑抽象。但它与自然语言中的“或”的意义并不完全相同，自然语言中的“或”既可以表示“排斥或”，也可以表示“可兼或”。例如：

P：今天晚上我在家里看电视或去剧场看戏。

Q：他可能是 100m 或 200m 赛跑的冠军。

命题 P 中的“或”是“排斥或”，命题 Q 中的“或”是“可兼或”，而析取联结词表示的是“可兼或”。关于“排斥或”，我们会在 1.5 节给出它的定义。析取联结词是一个二元运算。

4. 条件联结词

设 P 和 Q 是两个命题，由联结词 $\rightarrow$ 把 P、Q 连接成 $P\rightarrow Q$，称 $P\rightarrow Q$ 为 P 和 Q 的条件式复合命题，把 P 和 Q 分别称为 $P\rightarrow Q$ 的前件和后件，或者前提和结论。$P\rightarrow Q$ 读为“若 P，则 Q”或“P 条件 Q”。

联结词 $\rightarrow$ 是自然语言中“如果…，则…”，“若…，才能…”等的逻辑抽象。条件联结词是一个二元运算。

在自然语言中，前件为假，不管结论真假，整个语句的意义，往往无法判断。但在命题逻辑中，当 P 为 F 时，无论 Q 为 T 还是为 F，都规定 $P\rightarrow Q$ 为 T，这称为“善意推定”。例如：

P：雪是黑的。

Q：太阳从西方升起。

R：3+3=6。

$P\rightarrow Q$：如果雪是黑的，那么太阳从西方升起。

$P\rightarrow R$：如果雪是黑的，那么3+3=6。

P为假命题，Q为假命题，R为真命题，而$P\rightarrow Q$和$P\rightarrow R$都是真命题。

5. 双条件联结词

令P和Q是两个命题，由联结词$\leftrightarrows$把P、Q连接成$P\leftrightarrows Q$，称$P\leftrightarrows Q$为P和Q的双条件式复合命题，$P\leftrightarrows Q$读为“P当且仅当Q”。

双条件联结词也可以用符号$\leftrightarrow$来表示。

双条件联结词$\leftrightarrows$是自然语言中的“充分必要条件”、“当且仅当”等的逻辑抽象。双条件联结词是一个二元运算。例如：

P：两个三角形全等。

Q：两个三角形的三组对应边相等。

$P\leftrightarrows Q$：两个三角形全等，当且仅当这两个三角形的三组对应边相等。

关于这五个联结词的定义，可以通过表1.1的真值表给出，关于真值表的定义，将在第1.3节详细说明。

表1.1

P	Q	$\neg P$	$P\wedge Q$	$P\vee Q$	$P\rightarrow Q$	$P\leftrightarrows Q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

注意：

(1) 复合命题的真值只取决于构成它们的各原子命题的真值，而与它们的内容、含义无关，与联结词所连接的两原子命题之间是否有关系也无关。

(2) $\wedge$、$\vee$和$\leftrightarrows$具有对称性，而$\neg$、$\rightarrow$没有。

(3) 联结词都有从已知命题得到新的命题的作用，从这个意义上来说，它们具有操作或运算的意义。因此，可以把它们看作是一种运算或是一种函数。

(4) 关于$\rightarrow$和$\leftrightarrows$有的数学书或逻辑学的书籍中有其他的说法，如称$\rightarrow$为蕴含，称$\leftrightarrows$为等价等，本书将避免使用这种称呼，因为在后面的章节我们将另外定义“蕴含”和“等价”这两个概念。

1.2 命题公式与翻译

1.2.1 命题公式

联结词、原子命题变元、圆括号“(”、“)”，可进行有限次地连接，得到许多字符串，那些有意义的字符串，称为命题逻辑中的合式公式，简称命题公式或公式。

定义1.1 单个的命题常元和命题变元，统称为原子命题公式，简称原子公式。

下面，使用递归来定义命题逻辑中的合式公式(wff)。

定义 1.2 命题逻辑中的合式公式是由下列规则形成的字符串：

(1)原子命题公式和真值 T、F 都是一个合式公式。

(2)若 A 是合式公式，则$(\neg A)$是合式公式。

(3)若 A 和 B 是合式公式，则$(A\wedge B)$、$(A\vee B)$、$(A\rightarrow B)$和$(A\leftrightarrows B)$都是合式公式。

(4)经过有限次地使用(1)、(2)、(3)所得到的包含原子命题公式、联结词和圆括号的字符串都是合式公式。

【例 1.1】 $(\neg P)\vee Q$、$(P\rightarrow(Q\wedge R))$都是合式公式，而$(P\rightarrow Q)\rightarrow(\wedge Q)$、$(P,(P\rightarrow Q)\leftrightarrows(\wedge R))$都不是合式公式。

为了方便计算，对于圆括号的使用和联结词的优先级做如下约定：

(1)公式最外层的圆括号可以省略，如把$(P\rightarrow(Q\vee R))$写成$P\rightarrow(Q\vee R)$。

(2)$\neg$只作用于邻接后的原子命题变元，如把$(\neg P)\vee Q$写成$\neg P\vee Q$。

(3)联结词的优先级从高到低依次为$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrows$。

定义 1.3 如果 A_1 是公式 A 的一部分，且 A_1 是一个公式，称 A_1 是 A 的子公式。

【例 1.2】 设公式 A 为$(P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\vee R)$，则$P\rightarrow Q$、$Q\vee R$ 都是 A 的子公式。

注意命题公式是没有真假值的，仅在一个公式中命题变元用确定的命题代入时，才得到一个命题。这个命题的真值，依赖于代换变元的那些命题的真值。此外，并不是由命题变元，联结词和一些括号组成的字符串都能构成命题公式，如例 1.1 中的$(P\rightarrow Q)\rightarrow(\wedge Q)$和$(P,(P\rightarrow Q)\leftrightarrows(\wedge R))$就都不是命题公式。

1.2.2 命题的翻译

有了合式公式的概念，可以把自然语言中的有些语句翻译成数理逻辑中的符号形式。把一个用文字叙述的命题相应地写成由命题标识符、联结词和圆括号表示的合式公式，称为翻译，也称符号化。

【例 1.3】 张明正在睡觉或游泳。

解 设 P：张明正在睡觉。Q：张明正在游泳。本例的“或”是“不可兼或”，而析取联结词是“可兼或”，因此不能直接对两个命题析取。构造表 1.2 如下。

表 1.2

P	Q	原命题	$P\leftrightarrows Q$	$\neg(P\leftrightarrows Q)$	$P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge Q$	$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	F	T	T	F	T
F	T	T	F	T	F	T	T
F	F	F	T	F	F	F	F

从表 1.2 中可以看出，原命题不能用 1.1 节的五个联结词单独写出，但是如用命题和联结词组合，可以把本命题表示为$\neg(P\leftrightarrows Q)$。

1.5 节给出其他联结词的定义后，本例也可以直接用异或联结词给出。

另外，本例也可这样理解：张明正在睡觉而不在游泳或张明正在游泳而不在睡觉。因而可符号化为$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$，由表 1.2 可以看出，它与$\neg(P\leftrightarrows Q)$的真值相同。

【例 1.4】 符号化下列命题：

(1)他既聪明又用功。

(2) 他虽聪明但不用功。

(3) 除非你努力，否则你将失败。

(4) 除非天气好，我才骑自行车上班。

(5) 小王晚上要回家，除非下大雨。

(6) 只有睡觉才能消除疲劳。

(7) 只要我还有口气，我就要战斗。

(8) A 中没有元素，A 就是空集。

(9) 张明或者李强都可以做这件事。

(10) 张明和李强都做这件事了。

解 (1) 设 P：他聪明。Q：他用功。本例可以表示为 $P\wedge Q$。

(2) 设 P：他聪明。Q：他用功。本例可以表示为 $P\wedge\neg Q$。

(3) 设 P：你努力。Q：你将失败。本例可以表示为 $\neg P\rightarrow Q$。

(4) 设 P：天气好。Q：我骑自行车上班。本例可以表示为 $\neg P\rightarrow\neg Q$ 或 $Q\rightarrow P$。

(5) 设 P：小王晚上要回家。Q：下大雨。本例可以表示为 $\neg Q\rightarrow P$。

(6) 设 P：睡觉。Q：消除疲劳。本例可以表示为 $Q\rightarrow P$。一般地，对于"只有 P 才 Q"这样的语句，P 是 Q 的必要条件，或 Q 是 P 的充分条件。

(7) 设 P：我还有口气。Q：我要战斗。本例可以表示为 $P\rightarrow Q$。一般地，对于"只要 P 就 Q"这样的语句，P 是 Q 的充分条件，或 Q 是 P 的必要条件。

(8) 设 P：A 中没有元素。Q：A 是空集。本例可以表示为 $P\leftrightarrows Q$。

(9) 设 P：张明可以做这件事。Q：李强可以做这件事。本例可以表示为 $P\vee Q$。

(10) 设 P：张明做了这件事。Q：李强做了这件事。本例可以表示为 $P\wedge Q$。

【例 1.5】 公式 $(P\wedge\neg Q)\rightarrow\neg R$，其中 P：李强是体育爱好者，Q：李强是文艺爱好者，R：李强是文体爱好者，试用自然语言把它叙述出来。

解 如果李强是体育爱好者而不是文艺爱好者，那么他不是文体爱好者。

符号化应该注意下列事项：

(1) 首先确定给定句子是否为命题。

(2) 句子中的连词是否为命题联结词。

(3) 正确地表示原子命题和适当选择命题联结词。

为了便于正确表达命题间的相互关系，有时也采用列出"真值表"的方法进一步分析各原子命题，并以此寻找合适的逻辑联结词，使原来的命题能够正确地用形式化符号予以表达，如例 1.3 中。第 1.3 节将详细讨论真值表。

1.3 真值表与等价公式

1.3.1 真值表

定义 1.4 对于命题公式 A 中每个命题变元 P，任给一个指派或解释，得到一种真值的组合，称为 A 的一个真值指派，或称为 A 的一种解释。若 A 的指派为 T，称该指派为 A 的成真指派或说 A 的解释为真。类似地，可以定义 A 的成假指派(或称 A 的解释为假)。

定义 1.5 设 A 为一命题公式，对其中出现的命题变元做所有可能的每一组真值指派，

连同公式 A 的相应的真值汇列成表，称为 A 的真值表。

为了能更规范、更方便地构造真值表，特做如下约定：

(1) 命题变元按字典顺序排列。

(2) 对公式的每个解释，以二进制数从小到大或者从大到小顺序列出。

(3) 若公式复杂，可先列出各子公式的真值(若有括号，则应从里层向外层展开)，最后列出所给公式的真值。

【例 1.6】 求 $(P\to Q)\leftrightarrows(\neg P\vee Q)$ 的真值表。

解 真值表见表 1.3。

表 1.3

P	Q	$P\to Q$	$\neg P$	$\neg P\vee Q$	$(P\to Q)\leftrightarrows(\neg P\vee Q)$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

【例 1.7】 求 $(P\to Q)\wedge\neg R$ 的真值表。

解 真值表见表 1.4。

表 1.4

P	Q	R	$P\to Q$	$\neg R$	$(P\to Q)\wedge\neg R$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1

在真值表中，命题公式真值的取值数目决定于分量的个数。例如，例 1.6 中由 2 个命题变元组成的命题公式共有 4 种可能的真值，例 1.7 中由 3 个命题变元组成的命题公式共有 8 种可能的真值。不难证明，n 个命题变元组成的命题公式共有 2^n 种真值情况。

1.3.2 公式分类

定义 1.6 设 A 为一个命题公式，对 A 做所有可能的解释，若这些解释使得 A 都为真，则称 A 为永真式；若这些解释使得 A 都为假，则称 A 为永假式；若至少存在一种解释使得 A 为真，则称 A 为可满足式。

永真式也称重言式，常用 T 表示；永假式也称矛盾式，常用 F 表示。

由定义可知，重言式必是可满足式，反之未必成立。

判定给定公式是否为永真式、永假式或可满足式的问题，称为给定公式的判定问题。