数学卷

中国科学技术
经·典·文·库

组 合 论（上册）

柯 召 魏万迪 著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书全面介绍了组合论中的计数问题，以及解决计数问题的数学工具，如母函数、容斥原理、(0，1)矩阵的积和式(排列式)、Pólya定理等．书中列举了大量的组合问题和例题，并用尽可能多的方法来解决它们，使读者能够掌握组合论的各种思想和方法．本书内容丰富，叙述由浅入深，每章开始都有内容提要，以便读者抓住要点．

本书对于学习组合论的读者是一本较好的入门书，对于计算机科学、数字通讯、代数等方面的研究工作者也是一本较好的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

组合论．上册/柯召，魏万迪著．—北京：科学出版社，2010
(中国科学技术经典文库・数学卷)
ISBN 978-7-03-029290-2

I. ①组… II. ①柯… ②魏… III. ①组合数学 IV. ①O157

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第203995号

责任编辑：张鸿林 杜小杨 陈玉琢/责任校对：陈玉凤

责任印制：钱玉芬/封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社编务公司排版制作
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1981年10月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)
2010年11月第三次印刷 印张：25 1/2
字数：501 000

定价：98.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

组合论又叫做组合分析、组合数学或组合学，它是一个历史悠久的数学分支．这个学科所研究的中心问题是与按照一定的规则来安排一些物件有关的问题：当符合要求的安排并非显然存在或不存在时，首要的问题就是证明或否定它的存在；当符合要求的安排显然存在或已被证明存在时，求出这样的安排的(全部或其中不等价的)个数，以及把构造出这样的安排的问题提上日程；如果给出了最优化标准，往往还需寻求最优的安排；如此等等．上述几方面的问题依次被称为存在性问题、计数问题、构造问题、最优化问题．

人们对组合论的兴趣和研究肇源颇早．据传，早在《河图》、《洛书》中我国人民就已对一些有趣的组合问题给出了正确的解答．但是，这门学科的飞速进展乃是近几十年的事．这是多种因素促进的结果．一方面，它受到了许多新兴的应用和理论学科的推动和刺激，诸如计算机科学、数字通讯理论、规划论和试验设计等等．另一方面，它自身内部的要求和力量也使它不停息地向前发展．因而这一具有悠久历史的数学分支现在不仅没有衰老，相反地，却是异常活跃且颇富成果的．

在本书中作者试图比较全面而系统地介绍组合论的问题、理论和方法，以及我国数学工作者在这一领域中的研究成果．全书分上、下两册．上册侧重于组合论课题的计数方面，下册专门讨论区组设计．至于作为组合论的重要组成部分的图论，由于本书篇幅的限制，且因它已渐趋独立，只有另待专书来介绍．

本书从组合论的基础部分开始，讲述较详，并力求使处理问题的方法多种多样．但是，当需用其他数学学科，如数论、代数、数学分析的知识时，则假定读者对它们已经熟知，不再细论．

本册的内容可分为两大部分．

第一部分主要介绍处理组合论计数问题的一般原理、方法和工具．粗略地说，这就是：

一、母函数(第二章)

在许多情形，所需求的数与若干非负整数有关．为简单计，这里假定与一个非负整数有关，且把要求的数记为 $u_n(n \geqslant 0)$．

很自然地，可以把未知数列 $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ 与一个形式幂级数(母函数)

$$u(x)=\sum_{n\geqslant 0}u_nx^n$$

联系起来，从而由 $u(x)$ 的性质得出 $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ 的性质.

二、反演公式(第三章)

常常遇到某些组合论问题中出现的二类数 $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$, $\{v_n\}_{n\geqslant 0}$ 满足关系式

$$v_n=\sum u_i,$$

这里求和指标 i 的活动范围仅与 n 有关，且 $\{v_n\}_{n\geqslant 0}$ 可以求得. 由此得出诸 u_n 经由诸 v_i 表出的公式称为反演公式.

三、递归关系(第四章)

如果由数列 $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ 的组合意义或其他性质可以导出 u_n 与 $u_{n-1},u_{n-2},\cdots$ 之间的一个确定的关系(称为递归关系)，就常可把具有大足标的 u 值化为具有小足标的 u 值来处理.

四、(0，1)矩阵(第五章)

有相当广的一类组合问题与(0，1)矩阵有密切的联系. 就计数问题而论，欲求的数往往就是从一个(0，1)矩阵中选出两两不同行且不同列的若干数所作成的积之和. 因此，对(0，1)矩阵的这种和式的计算就能导出这类组合问题的解.

五、Pólya 定量(第十章)

许多计数问题可以化为求某一置换群下映射的等价类的个数. 后者的求解就是 Pólya 定理的内容.

第二部分研究一些具体的组合论课题，它们是：

一、排列(第一、三、四、七、八、九章)，

二、组合(第一、七、八章)，

三、整数的分拆(第八章)，

四、集的分解(第四章)，

五、分配(第七章)，

六、(0，1)矩阵论中的一些组合问题(第五章)，

七、置换群中的一些组合问题(第六章).

在写作本书的过程中，许多同志，特别是中国科学院数学所代数组的同志，给作者以极大的关心、帮助和支持，对此，我们深表谢意.

限于作者的水平，书中会有缺点和错误，敬请读者批评指正.

作 者

目　　录

第一章　排列与组合

本章介绍最简单、最基本的组合论课题，即通常的“排列”、“组合”问题. 考虑问题的思路和解决问题的方法，都力求多样，以利于培养“组合思维”和熟练“组合技巧”，提高灵活地用之于较复杂的组合论问题的能力.

有两个简单易明的计数法则今后将经常用到，故放在本章之首来介绍(1.1). 接着，便讨论几个常见的组合问题和组合数的一些初等性质(1.2)，及其必要的扩充和推广(1.3). 此外，还介绍了研究排列数、组合数的母函数方法(1.4，1.5)，一方面由此可得出更多的结果，另一方面又为过渡到母函数的一般理论(第二章)提供一些必要的感性材料. 最后介绍几个应用的例子(1.6).

1.1　集. 计数的和、积法则

为了便于引用，这里列出集论的一些简单概念和符号，并不牵涉数学基础中的深奥问题和集论的专门知识. 关于自然数的常用性质，则假定读者已经熟知.

人们把所研究的对象叫做*元素*，或*元*，把某些元的总体叫做*集合*，或*集*，并说这集由这些元组成. 本书中，若不特别声明集中某些元是相同的，则认为所有元都是互异的. 一般情况下，用大写的拉丁字母表示集，用小写的拉丁字母表示元. 元 a 在集 A 中，或者说集 A 含有元 a，记为

$$a \in A\text{，或}\quad A \ni a.$$

元 a 不在集 A 中，或者说集 A 不含有元 a，记为

$$a \notin A \quad\text{或}\quad A \not\ni a.$$

如果集 A 中的每一元都在集 B 中，就说 A 是 B 的*子集*，或者说 B 是 A 的*包集*，记为

$$A \subseteq B \quad\text{或}\quad B \supseteq A.$$

如果集 A 与 B 之间既合 $A \subseteq B$，又合 $B \supseteq A$，就说集 A 与 B *相等*，记为

$$A = B\text{，}$$

否则记为

$$A \neq B.$$

如果$A \subseteq B$但$A \neq B$,则说A为B的真子集，或者说B为A的真包集，记为

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A.$$

易知，$A=B$的充要条件是集A与B由同样一些元素组成. 为了方便和统一起见，对没有任何元的情形也说存在一个集，叫做空集，记为$\varnothing$. 不是空集的集叫非空集. 易知，对任意集A，有$\varnothing \subseteq A$；对任意非空集B，有$\varnothing \subset B$.

为了确定一个集，常用以下几种方法.

第一，列出集A中的全部元. 例如，

$$A := \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\} \tag{1.1.1}$$

表示集A是由3，6，9，12，15，18这六个数组成的总体. 这里，符号“$:=$”表示由右节来定义左节的定义式.

第二，给出集A中元的特征性质P——合于性质P的元全在A中，不合性质P的元则不在A中，记为

$$A := \{ x \mid x \text{合于} P \}.$$

这样，(1.1.1)中的A又可写为

$$A = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 20\text{，且} 3 \mid x \},$$

这里，符号“$3 \mid x$”表示整数x是3的倍数.

第三，用集之间的运算来表出. 最基本的运算有：并、交、差.

如果三个集A，B，C之间符合

$$A = \{ x \mid x \in B \text{或} x \in C \},$$

则说集A是集B，C的并，记为

$$A = B \cup C.$$

如果这三个集符合

$$A = \{ x \mid x \in B \text{且} x \in C \},$$

则说集A是集B，C的交，记为

$$A = B \cap C.$$

如果这三个集符合

$$A = \{ x \mid x \in B \text{且} x \notin C \},$$

则说集 A 是集 B 对 C 的差，记为

$$A = B \setminus C .$$

并与交的定义和记号容易推广到多个乃至无穷多个集的情形，它们分别是

$$A := \bigcup_{i \in I} A_i := \{ x \mid x \in A_i \text{（某} i \in I\text{）} \}$$

和

$$A := \bigcap_{i \in I} A_i := \{ x \mid x \in A_i \text{（一切} i \in I\text{）} \},$$

这里 I 为指标集.

如果按照某一确定的规则 φ，集 A 的每一元 a 都对应于集 B 的唯一一个确定的元 a'，则称这个对应规则为映射或对应，并说 a' 是 a 在映射 φ 之下的像，记为

$$a \xrightarrow{\varphi} a' =: \varphi(a) \text{ 或 } \varphi : a \to a' .$$

这里，符号"$=:$"表示由左节来定义右节的定义式. 如果

$$B \supseteq \{ \varphi(a) \mid a \in A \},$$

则说映射 φ 是 A 到 B 内的映射，并说集 A 为 φ 的定义域，集 B 为 φ 的值域 如果

$$B = \{ \varphi(a) \mid a \in A \},$$

则说 φ 是 A 到 B 上的映射. 如果 φ 是 A 到 B 内的映射，且合条件

$$\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)\text{，若 } a_1 \neq a_2\text{，} \tag{1.1.2}$$

则说 φ 是 A 到 B 内的(1-1)映射. 如果 φ 是 A 到 B 上的映射且合条件(1.1.2)，则说 φ 是 A 到 B 上的(1-1)映射，简称为(1-1)映射，此时又说，集 A 与 B 是(1-1)对应的，如果集 A 与 B 之间有一个(1-1)映射存在，就说集 A 与 B 等势，记为

$$A \sim B ;$$

对于等势的集，又说它们具有相同的势. 势就是等势诸集的公共性质.

用 $\mathbb{Z}$ 表示全体整数所组成的集，用 $\mathbb{N}$ 表示全体自然数所组成的集，且记 $\mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. 称集

$$\{ x \mid m \leqslant x \leqslant n, x \in \mathbb{Z} \}$$

为 $\mathbb{Z}$ 的 m 至 n 截段，记为

$$[m,n].$$

也记

$$[m,\infty):=\{x\mid m\leqslant x<\infty,x\in\mathbb{Z}\},$$

$$(-\infty,m]:=\{x\mid -\infty<x\leqslant m,x\in\mathbb{Z}\},$$

$$[m,n):=[m,n]\setminus\{n\},$$

$$(m,n]:=[m,n]\setminus\{m\},$$

$$(m,\infty):=[m,\infty)\setminus\{m\},$$

$$(-\infty,n):=(-\infty,n]\setminus\{n\}.$$

如果集 A 与$[1, n]$等势，就说 A 是一个 n 元集，其中恰有 n 个元. 空集和 n 元集($n\in\mathbb{N}$)统称为有限集. 不是有限集的集叫做无限集. 易知，当 A，B 是有限集时，$A\sim B$ 的充要条件是 A，B 各有同样多的元，故此时 A 的势就是 A 的元的个数，简称为元数. 对于无限集，势的作用类似于有限集的元数的作用. 无论 A 是有限集还是无限集，其势均以$|A|$记之.

下面介绍有关计数问题的两个基本法则.

定理 1.1.1(和则) 若有限集 A,B 符合 $A\cap B=\varnothing$， 则

$$|A\cup B|=|A|+|B|. \tag{1.1.3}$$

证明 当 A,B 中有一个是空集时，结论(1.1.3)是平凡的. 今设 $A\neq\varnothing$，$B\neq\varnothing$，记

$$A=\{a_1,\cdots,a_n\},\quad B=\{b_1,\cdots b_m\},\quad n\geqslant 1,m\geqslant 1.$$

因为

$$a_i\neq b_j\quad(1\leqslant i\leqslant n;1\leqslant j\leqslant m),$$

故映射

$$\varphi: a_i\to i\qquad(1\leqslant i\leqslant n),$$

$$b_j\to n+j\qquad(1\leqslant j\leqslant m)$$

是 $A\cup B$ 到$[1, m+n]$上的(1–1)映射，故有(1.1.3). **证毕.**

和则还可叙述为：如果某物 $\mathcal{O}_1$ 有 m 种方法(这些方法所组成的集记为 A)选出，另一物 $\mathcal{O}_2$ 有另外 n 种方法(这些方法所组成的集记为 B)选出，则定理 1.1.1

断言，选出物$\mathscr{O}_1$或$\mathscr{O}_2$有$m+n$种方法.

设A,B是任意二集，则称集

$$\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

为集A与B的 Descartes 积，记为$A\times B$. 同样可以定义任意多(有限或无限)个集的 Descartes 积. 须注意，$A\times B$中二元相等，即$(a,b)=(a_1,b_1)$的充要条件是

$$a=a_1\text{ 且 }b=b_1.$$

$A\times B$中的元(a,b)称为A中元a与B中元b的有序对. 易知，$A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$，令

$$D(A,\{B_a\}_{a\in A};n):=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B_a\text{，且}|B_a|=n\},$$

这里$\{B_a\}_{a\in A}$表示由随a而定的集B_a所组成的集族，如果对任意的$a\in A$都有$B_a=B$，则记

$$D(A,B;n):=D(A,\{B_a\}_{a\in A};n).$$

易知，当$|B|=n$时，有

$$D(A,B;n)=A\times B.$$

定理 1.1.2(积则) 如果$|A|=m,|B_a|=n\ (a\in A),m\in\mathbb{N}^0,n\in\mathbb{N}^0$，则

$$|D(A,\{B_a\}_{a\in A};n)|=mn. \tag{1.1.4}$$

证明 若$m=0$或$n=0$，则(1.1.4)的两节同时为零. 设$m>0,n>0$,且记

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\},$$

$$B_{a_i}=\{b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in}\}(1\leqslant i\leqslant m),$$

则映射

$$\varphi:(a_i,b_{ij})\to(i-1)m+j(1\leqslant i\leqslant m;1\leqslant j\leqslant n)$$

是集$D(A,\{B_a\}_{a\in A};n)$到$[1,mn]$上的一个(1–1)映射，故(1.1.4)成立. **证毕**.

积则还可叙述为：如果某物$\mathscr{O}_1$有m种方法(这些方法所组成的集记为A)选出，由A中任一种方法a选出$\mathscr{O}_1$之后，都有n种方法(这些方法所组成的集记为B_a)选出另一物$\mathscr{O}_2$，则定理 1.1.2 断言，依次选出物$\mathscr{O}_1$和$\mathscr{O}_2$有mn种方法.

上述两个定理均可推广到有限多个集的情形.

定理 1.1.3 设诸集$A_i(1\leqslant i\leqslant n)$合于

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad (1 \leqslant i \neq j \leqslant n),$$

则

$$\left|\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i\right| = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |A_i|. \tag{1.1.5}$$

定理 1.1.4 已给集 A 和 $n_1,\cdots,n_k \in \mathbb{N}^0$. 若诸集 $A_i(1 \leqslant i \leqslant k)$ 逐次确定为

$$A_1 := A,$$
$$A_i := D(A_{i-1},\{(B_i)_a\}_{a\in A_{i-1}};n_i) \quad (2 \leqslant i \leqslant k),$$

其中集 $(B_i)_a$ 依 A_{i-1} 中的元 a 而定，且设 $|A_1| = n_1, |(B_i)_a| = n_i(a \in A_{i-1}, 2 \leqslant i \leqslant k)$，那么，

$$|A_k| = n_1 n_2 \cdots n_k. \tag{1.1.6}$$

上述两个定理的证明可由数学归纳法得出.

1.2 排列与组合

为了便于引用和比较，首先给出各种常见的排列、组合的定义.

定义 1.2.1 集 A 的一个*排列*是 A 中元的一个有序选出. 若 R 是对排列的限制条件，则这样的排列叫做 *R 排列*；如果 R 的叙述较长，又写为“排列，具有性质 R” 特别地，如果性质 R 是“排列中元的个数是 r”，这种 R 排列就简称为 r 排列，又说 r 是该排列的长. 如果性质 R 是“在排列中不允许任何元重复出现”，则这种 R 排列简称为*无重排列*；如果性质 R 是“在排列中允许元重复出现”，则这种 R 排列简称为*可重排列*. 全部 R 排列的个数叫做 *R 排列数*. 若 $|A|$ 为有限数，则称 A 的无重 $|A|$ 排列为 A 的*全排列*.

定义 1.2.2 集 A 的一个*组合*是 A 中元的一个无序选出. 若 Q 是对组合的限制条件，则这样的组合叫 *Q 组合*；如果 Q 的叙述较长，又写为“组合，具有性质 Q”. 特别地，如果性质 Q 是“组合中元的个数为 r”，则这种 Q 组合简称为 *r 组合*. 如果性质 Q 是“在组合中不允许任何元重复出现”，则这种 Q 组合简称为*无重组合*；如果性质 Q 是“在组合中允许元重复出现”，则这种 Q 组合简称为*可重组合*. 全部 Q 组合的个数叫做 *Q 组合数*.

例如，设集

$$A = \{a,b,c\}.$$

那么，A 的 2 可重排列共有九个：

$$aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc;$$

2 无重排列共有六个：

$$ab, ac, ba, bc, ca, cb\ ;$$

2 可重组合共有六个：

$$aa, bb, cc, ab, ac, bc;$$

2 无重组合共有三个：

$$ab, ac, bc.$$

若 $|A| = n$，那么，在讨论排列数和组合数时，不失一般，可设 A 为 $[1, n]$. 今后常用下列符号：

$\mathbb{P}_r^n$: 集 A 的 r 无重排列全体所组成的集，

$$P_r^n = |\mathbb{P}_r^n|;$$

$\mathbb{C}_r^n$: 集 A 的 r 无重组合全体所组成的集，

$$C_r^n = |\mathbb{C}_r^n|\ ;$$

$\mathbb{U}_r^n$ ：集 A 的 r 可重排列全体所组成的集，

$$U_r^n = |\mathbb{U}_r^n|\ ;$$

$\mathbb{F}_r^n$ ：集 A 的 r 可重组合全体所组成的集，

$$F_r^n = |\mathbb{F}_r^n|.$$

此外，还用到一些缩写符号：

$$r! = r(r-1)\cdots 2\cdot 1, (r \geqslant 1); 0! = 1\ ,$$

$$(n)_r = n(n-1)\cdots(n-r+1), (1 \leqslant r \leqslant n); (n)_0 = 1,$$

$$\binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r!}.$$

于是，上述几种排列、组合数可由下面的定理确定.

定理 1.2.1 若 $1 \leqslant r \leqslant n$, 则

$$P_r^n = (n)_r, \tag{1.2.1}$$

$$C_r^n = \binom{n}{r}, \tag{1.2.2}$$

$$U_r^n = n^r, \tag{1.2.3}$$

$$F_r^n = \binom{n+r-1}{r}. \tag{1.2.4}$$

证明　(1.2.1)的第一个证明　在一个无重排列 $a_1a_2\cdots a_r$ 中，a_1 可以取 n 个元中的任何一个，故有 n 种取法；a_1 取定之后，a_2 可以取其余 $n-1$ 个元的任何一个，故有 $n-1$ 种取法；$\cdots$；在 $a_1,a_2,\cdots,a_i$ 都取定之后，a_{i+1} 可以取剩下的 $n-i$ 个元的任何一个，故有 $n-i$ 种取法；$\cdots$；在 $a_1,a_2,\cdots,a_{r-1}$ 都取定之后，a_r 可以取剩下的 $n-r+1$ 个元的任何一个，故有 $n-r+1$ 种取法. 由积则，总的取法数为

$$n(n-1)\cdots(n-i)\cdots(n-r+1),$$

这就是(1.2.1).

(1.2.1) 的第二个证明　在 A 的 n 个元中，任何一个都可居无重排列的首位，故首元有 n 个取法. 当首元取定后，其他位上的元只能从 A 中另外 $n-1$ 个元中选取，故有 P_{r-1}^{n-1} 种取法，因此由积则，

$$P_r^n = nP_{r-1}^{n-1}. \tag{1.2.5}$$

由此递归关系和初始值 $P_1^{n-r+1} = n-r+1$，用数学归纳法即得(1.2.1).

(1.2.2) 的证明　集 A 的一个 r 无重组合就是 A 的一个 r 元子集. 任意一个 r 元子集，譬如说，$\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$，都将导出 A 的 $r!$ 个 r 排列，即集 $\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$ 的全部 r 无重排列. 反之，集 $\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$ 的全部 r 无重排列，仅导出 A 的一个 r 无重组合. A 的 r 无重排列数为 $(n)_r$，故 A 的 r 无重组合数为

$$\frac{(n)_r}{r!}.$$

(1.2.3) 的证明　在 A 的 r 可重排列中，任意位置可以取 A 中任意元，故每个位置都有 n 种取元的方法. 由积则，(1.2.3)成立.

(1.2.4) 的证明　与无重组合的情形不一样，集 A 的 r 可重组合不能简单地用某一个因子来除无重排列的个数 U_r^n 来得出. 因为不同的可重组合可以给出不同个数的可重排列. 例如，当 $A=\{a,b,c,d,e\}$ 时，A 的 3 可重组合 $\{a,b,c\}$ 可给出六个可重排列：

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba;$$

组合 $\{a,a,b\}$ 可给出三个可重排列:

$$aab, aba, baa;$$

而组合 $\{a,a,a\}$ 只给出一个可重排列 aaa. 所以，要采用另外的办法.

(1.2.4) 的第一个证明 把 $A=[1,n]$ 的每一个 r 可重组合依其自然顺序写出：

$$c_1c_2\cdots c_r, c_1 \leqslant c_2 \leqslant \cdots \leqslant c_r.$$

令

$$d_i = c_i + i - 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

尽管诸 c_i 中可能有相同的数，但诸 d_i 却都是不同的. 所以 $d_1d_2\cdots d_r$ 为集 $B_i=[1,n+r-1]$ 的一个 r 无重组合. 反之，对 B 的任一依自然顺序写出的 r 无重组合 $d_1d_2\cdots d_r$，由

$$c_i = d_i - i + 1 (1 \leqslant i \leqslant r)$$

所定出的诸 c_i 的组合就是 A 的一个 r 可重组合. 因为这种对应关系是(1-1)的，所以这两种组合的个数相同，而前者的个数为

$$\binom{n+r-1}{r},$$

故(1.2.4)成立.

(1.2.4) 的第二个证明 对 $A=[1,n]$ 的任一个依自然顺序写出的 r 可重组合 $i_1\cdots i_r$，添上 A 中全部元，再按自然顺序写出：

$$1\cdots2\cdots(i_1-1)\cdots i_1\cdots i_r\cdots(i_r+1)\cdots n. \tag{1.2.6}$$

所以，对每一可重组合 $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_r$，有形如(1.2.6)的唯一序列与之对应，且反之亦然. 在序列(1.2.6)中，于相同的数码 $i(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 的最末那个(如果某数码只出现一次，则“最末那个”就是它自身)之后画一条竖线，于是(1.2.6)成为

$$\cdots1|\cdots2|\cdots n-1|\cdots \tag{1.2.6$'$}$$

这样一来，序列(1.2.6)与图(1.2.6$'$)是(1-1)对应的. 所以二者的个数相同. 例如，$A=\{1,2,3,4,5\}$ 时，A 的 3 可重组合 224 所对应的序列(1.2.6)为

$$1\,2\,2\,2\,3\,4\,4\,5,$$

按要求画线后变为

$$1|2\,2\,2|3|4\,4|5.$$

在(1.2.6)中，每二个数码之间有一个空隙，共有 $n+r-1$ 个空隙. 这些空隙中仅有 $n-1$ 个可以画线，所以形如(1.2.6′)的图形的个数为

$$\binom{n+r-1}{n-1}=\binom{n+r-1}{r},$$

这就是所要证的.

(1.2.4) 的第三个证明　当 $r\geqslant 2$ 时，把 A 的全部 r 可重组合分为两类，第一类的每一个组合都含有 A 中某个定元 a，第二类的每一个组合都不含此元 a. 第一类的每一组合删去一个元 a 后余下者为 A 的一个 $(r-1)$ 可重组合，且反之亦然，故其个数为 F_{r-1}^{n}. 第二类的每一组合是集 $A\setminus\{a\}$ 的一个 r 可重组合，且反之亦然，故其个数为 F_r^{n-1}. 因此，

$$F_r^n=F_{r-1}^n+F_r^{n-1}\quad(n\geqslant 2,r\geqslant 2).\tag{1.2.7}$$

如果 $r=1$，则没有可能重复选取，故

$$F_1^n=n.$$

如果 $n=1$，则无论 r 为何正整数，都只有一个 r 可重组合，故

$$F_r^1=1.$$

由(1.2.7)得

$$\begin{aligned}F_2^n&=F_1^n+F_2^{n-1}=F_1^n+F_1^{n-1}+F_2^{n-2}\\&=\cdots\\&=F_1^n+F_1^{n-1}+\cdots+F_1^2+F_2^1\\&=n+(n-1)+\cdots+2+1\\&=\frac{n(n+1)}{2}=\binom{n+1}{2}.\end{aligned}\tag{1.2.8}$$

再者，

$$\begin{aligned}F_r^2&=F_{r-1}^2+F_r^1=F_{r-2}^2+F_{r-1}^1+F_r^1\\&=\cdots\end{aligned}$$