概率论与数理统计

主编　郭跃华　朱月萍

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

概率论与数理统计

Gailülun yu Shuli Tongji

主　编　郭跃华　朱月萍

副主编　陆志峰　钱　峰　赵为华

参　编　徐相建　王建宏

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书主要内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析、随机过程的基本概念和马尔可夫链等。每章末附有应用案例及分析、复习指导和计算机探究。全书注重理论和实际相结合，注重提高学生应用计算机解决实际问题的能力。

本书可作为高等学校理工类、经管类各专业本科生概率论与数理统计课程的教材，也可供相关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/郭跃华，朱月萍主编．—北京：高等教育出版社，2011.1

ISBN 978-7-04-031081-8

Ⅰ.①概… Ⅱ.①郭…②朱… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第208670号

策划编辑 李晓鹏 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 赵 阳 **责任绘图** 郝 林
版式设计 余 杨 **责任校对** 杨雪莲 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京明月印务有限责任公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2011年1月第1版
印　　张	21.75	**印　　次**	2011年1月第1次印刷
字　　数	410 000	**定　　价**	29.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　31081-00

前　言

随机现象的普遍性，使得概率论与数理统计的应用渗入社会、生活的各个领域。例如，我国发行的各种福利彩票、体育彩票，很多人都想试一下自己的运气。一张彩票可能中奖也可能不中奖，但一张彩票的中奖机会有多少呢？再如，人们在日常生活中经常会根据某些特征对所研究对象的类型进行判断：医生根据某些指标区分诊断对象是否患病，地质工作者根据岩石的成分判断地下有矿还是无矿，银行信贷员依据客户的各种指标划分信用等级并决定是否发放信用卡等等。这些判断可能正确也可能错误，但判断正确的可能性有多大呢？其实这些都是概率论与数理统计所研究的问题。正是由于概率论与数理统计具有极其广泛的应用，这门课程成为高等学校理科、工科和经管专业学生的一门重要的必修课。该课程不仅是学习后续课程及在各个学科领域中进行理论研究和实践工作的必要基础，而且对培养学生的综合能力，提高学生的数学素养，并为在未来的学习工作中提高科研能力和创新能力都具有重要作用。

目前，高等教育已经进入大众化阶段，为了适应高等教育的蓬勃发展，培养高素质的复合型、应用型人才，结合教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的工科类和经济管理类本科数学基础课程教学基本要求，我们编写了本书。

本书以应用为目标，希望读者在学习之后，能够知道现实生活中哪些是概率统计问题，并能够自己解决一些概率统计问题。知识固然重要，通过学习获得解决和处理问题的能力更重要。因此，本书在内容上删掉了一些过于繁琐的推理和完全可以用计算机代替的计算，注重理论与实际相结合，每章均由实际问题引入。章末有应用案例及分析，用已经学到的知识解决比较复杂的实际问题，并加以分析，提高认知水平。此外每一章在章末还给出了与该章内容相关的复习指导和计算机探究。复习指导要求读者思考该章的主要概念，然后用文字表达对这些概念的理解。计算机探究介绍了使用计算机解决问题的方法，为读者提供自己动手的机会，进一步加深对数学概念的理解，提高用计算机解决实际问题的能力。

本书内容分三个部分。第一部分概率论（第 1 ~ 5 章）作为基础知识，为读者提供了必要的理论基础。第二部分数理统计（第 6 ~ 10 章）主要讲述参数估计和假设检验，并介绍了方差分析和回归分析的基本内容。第三部分随机过程（第 11，12 章）介绍一些基本理论和几个常见的随机过程，并着重讨论马尔可夫链。数理统计与随机过程这两部分内容是独立的，可根据专业需要选用。

本书可作为高等学校对理论证明要求不高的理科(非数学专业)、工科和经管专业概率论与数理统计课程的教材,也可供工程技术人员参考。

本书被评为2009年江苏省高等学校立项精品教材,得到江苏省教育厅和南通大学教务处的大力支持。本书在编写过程中得到校内和兄弟院校同行们的鼓励、支持和帮助。本书的出版也得到了高等教育出版社李蕊编辑和李晓鹏编辑的帮助,在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平所限,书中错漏之处在所难免,敬请读者批评指正。

编　者

2010年7月

目　录

第 1 章　随机事件与概率

应用问题

1. 生日问题：在一个由互不相识的 50 人组成的新班级里，如果有一个人作出惊人的宣布："新班级里一定有人生日是相同的！"你相信吗？因为首先，他对大家的生日一无所知，其次，一年有 365 天，而班上只有 50 人，难道生日会重合吗？但是，这是极有可能的.

2. 可靠性问题：对于目前我国众多的生产制造企业而言，对产品百万分之一的次品率会感到十分满意. 一架大型客机上一般有 300 ~ 500 万个零部件，如果用可靠性（合格率）为 99.9999%（即次品率为百万分之一）的零部件去组装它，这样的客机你敢坐吗？事实上，由这样的零部件所组装的客机的整体可靠性不到 5%.

对上述问题的答案，大家可能会惊讶不已，也会感到难以置信吧！其实这些都是概率的应用问题. 解决上述问题所需的概率知识将在本章中介绍.

本章将介绍概率论的基本概念，如随机事件、样本空间、事件的概率及求事件概率的几个有力工具：条件概率公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式等.

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机事件的几个基本概念

在人类社会和自然界中，人们观察到的现象多种多样，从结果能否预测的角度来分，可分为两类. 一类是事前可以预知结果的，即在一定条件下，某一确定的现象必然会发生（或必然不会发生），我们称这一类现象为**确定性现象**（definite phenomenon）或**必然现象**（certain phenomenon）. 例如，太阳每天从东方升起，两个同性电荷必然互斥，函数在间断点处一定不可导，等等. 还有另一类现象，它在事前不能预知结果，即在一定条件下，某种现象既可能发生，也可能不发生，我们称这一类现象为**随机现象**（random phenomenon）. 随机现象在我们的生活中广泛存在，例如，抛一枚硬币，有可能正面朝上，也有可能反面朝上；在股票交易中，下一秒股票交易价格有可能上涨，也有可能下跌，等等.

随机现象有其偶然性的一面，也有其必然性的一面，这种必然性表现在大量重复试验或观察中呈现出的固有规律性，即随机现象的统计规律性. 随机现象的规律性与我们前面所学的高等数学和线性代数中所处理的确定性的规律有所不同. 对于确定性的规律来说，有了关于系统当前状态的足够信息，就能对系统在未来时刻的状态作出准确的预测. 例如，一初速度为 0 的物体从某一高度做自由落体运动，该物体在时间 t 内下落的距离为 $s=\frac{1}{2}gt^2$（其中 g 为重力加速度），这一点不待你做完这个试验就能预知.

"概率"就是描述随机现象发生可能性大小的数学术语. 概率论的任务就是研究随机现象的统计规律，以帮助人们透过表面的偶然性，找出其内在规律，并以数学的形式来描述这些规律，建立起随机现象与数学其他分支的桥梁，使得我们可以使用许多成熟的数学方法来研究随机现象.

数理统计侧重从观测数据出发来研究随机现象，概率论是数理统计的基础，数理统计是概率论的一种应用. 在实际应用中，数理统计是处理随机现象的重要的工具.

随机现象是通过随机试验来研究的.

在一定条件下，对某事物或现象所进行的观察或实验称为**试验**（experiment）. 一个试验若满足条件：

（1）试验可以在相同条件下重复进行；

（2）试验的所有结果是明确可知的，并且不止一个；

（3）进行试验之前无法预知会出现哪一种结果，

则称这样的试验为**随机试验**（random experiment），记为 E，为方便起见也简称为**试验**. 无特殊说明，本教材中以后所提到的试验都是指随机试验.

随机试验所有可能结果的集合，称为该试验的**样本空间**（sample space），记为 Ω，随机试验的每一种可能结果，即 Ω 中的每一个元素称为一个**样本点**（sample point），用 ω 表示.

例 1.1.1 E_1：在掷一颗均匀的骰子时，出现的点数可以构成样本空间 $\Omega_1=\{1,2,\cdots,6\}$ 或 $\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$；

E_2：记录某电话交换台在单位时间内收到的呼唤次数，则样本空间为 $\Omega_2=\{0,1,2,\cdots\}$；

E_3：观察某地一昼夜的最高温度与最低温度，若假设这一地区的温度一般不会小于 T_1，也不会大于 T_2，则样本空间为 $\Omega_3=\{(x,y)\mid T_1\leqslant x\leqslant y\leqslant T_2\}$，这里 x,y 分别表示这一地区一昼夜的最低温度与最高温度.

值得注意的是，样本空间的元素是由试验的目的所确定的，一般试验的目的不同，其样本空间也不一样. 例如，将一枚硬币抛掷两次，若观察正面出现的次

数，则样本空间为 $\Omega=\{0,1,2\}$；若观察其各面出现的情况，则样本空间为 $\Omega=\{HH,HT,TH,TT\}$，其中 H 表示硬币的正面，T 表示硬币的反面.

随机试验的若干个结果组成的集合称为**随机事件**(random event)，简称**事件**，常用大写字母 $A,B,\cdots$ 等表示. 只含一个试验结果的事件称为**基本事件**(elementary event). 即事件是样本空间 Ω 的子集，基本事件只含一个样本点.

随机事件在随机试验中可能发生，也可能不发生. 在每次试验中，当且仅当事件所包含的某个样本点出现时，称这一事件发生.

特别地，Ω 作为它自己的一个子集，也是一个特殊的事件，无论试验结果是什么，它一定会发生，所以我们称 Ω 为**必然事件**(certain event). 而它的“反面”是空集，即一个样本点都不包含的事件称为**不可能事件**(impossible event)，记为 $\varnothing$，因为无论出现什么试验结果，它都不会在空集中，也即不可能事件一定不会发生.

必然事件和不可能事件的发生与否，已经失去了“不确定性”，因而本质上它们不是随机事件，但为了方便起见，还是把它们视为随机事件，它们不过是随机事件的两个极端情形而已.

例 1.1.2 对于例 1.1.1 中的随机试验，

在 E_1 中，事件 A：“掷出奇数点”，则事件 A 可表示为 $A=\{1,3,5\}$；事件 B：“掷出素数点”，则事件 B 可表示为 $B=\{2,3,5\}$；

在 E_3 中，事件 C：“某地一昼夜的最高温度与最低温度相差 10℃”，则事件 C 可表示为 $C=\{(x,y)\mid y-x=10,T_1\leqslant x\leqslant y\leqslant T_2\}$.

1.1.2 事件的关系与运算

对于一个随机试验来说，有很多随机事件. 概率论的任务之一就是研究随机事件的规律，通过对较简单事件规律的研究去掌握更复杂事件的规律. 为此，需要研究事件之间的关系和运算. 由于事件可看作一个集合，因此，事件之间的关系和运算就自然可以按照集合之间的关系和运算来处理. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法，并根据“事件发生”的含义，给出它们在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 Ω. $A,B,C,A_k(k=1,2,\cdots)$ 都是事件，即 Ω 的子集.

1. 事件的包含

如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生，则称事件 B **包含**(inclusion)事件 A，或称事件 A **包含于**事件 B，记作 $A\subset B$. 显然对任何事件 A，有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

2. 事件的相等

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**(equal)，记为 $A=B$.

3. 事件的和(并)

事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件,称为事件 A 与 B 的**和(并)**(union),记作 $A\cup B$.

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生的事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和,记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少有一个发生的事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和,记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

4. 事件的积(交)

事件 A 与事件 B 同时发生的事件,称为事件 A 与 B 的**积(交)**(intersection),记作 $A\cap B$ 或 AB.

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生的事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积,记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生的事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积,记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

5. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生这一个事件,称为事件 A 与 B 的**差**(difference),记作 $A-B$.

6. 事件的互不相容(互斥)

若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,称事件 A 与 B **互不相容(互斥)**(mutually exclusive).

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容$\Leftrightarrow A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i;\ j=1,2,\cdots,n$.

$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互不相容$\Leftrightarrow A_iA_j=\varnothing,i\neq j;i,j=1,2,\cdots$.

显然基本事件是两两互不相容的.

7. 事件的对立

事件 A 不发生这一事件,称为 A 的**对立事件(或逆事件)**(complementary events),记作 $\overline{A}$. 由于 A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件,因此,称 A 与 $\overline{A}$ 为互相对立事件. 由定义知,两个互相对立事件一定是互不相容事件;反之,两个互不相容事件却不一定是互相对立事件. 显然有

$A\overline{A}=\varnothing,A\cup\overline{A}=\Omega,\overline{A}=\Omega-A,\overline{\overline{A}}=A$.

注意:“A 与 B 互相对立”与“A 与 B 互斥”是不同的概念.

事件的关系与运算可用图 1.1 的文氏图(Venn diagram)直观地表示,其中 $A\cup B,AB,A-B,\overline{A}$ 分别为图中的阴影部分.