线性代数
解题方法与技巧

上海交通大学数学系 王纪林等 编

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

线性代数解题方法与技巧

上海交通大学数学系

上海交通大学出版社

内　容　提　要

本书共选编了线性代数习题314题，其中"例题选讲"171题都给出了详解，对于一些偏难的典型例题，还给出了多种解法，并做了分析和点评；其余"自测与提高"题目143题均给出了答案或提示。

本书可作为高等院校理、工、农、医、经济管理和财经各类专业本科、专科生学习与教学用书，也可供数学爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数解题方法与技巧/王纪林等编. 一上海：上海交通大学出版社，2011

ISBN 978-7-313-06524-7

Ⅰ. 线...　Ⅱ. 王...　Ⅲ. 线性代数—高等学校—解题　Ⅳ. 0151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第097833号

线性代数解题方法与技巧

王纪林 等　编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路951号　邮政编码200030)

电话：64071208　出版人：韩建民

常熟市大宏印刷有限公司 印刷　全国新华书店经销

开本：787mm×960mm 1/16　印张：15.5　字数：291千字

2011年1月第1版　2011年1月第1次印刷

印数：1～4030

ISBN 978-7-313-06524-7/O　定价：28.00元

前　　言

上海交通大学是我国“211 工程”和“985 工程”重点投资建设的重点大学。上海交通大学数学系是全国工科数学教学基地之一，其数学教学一贯坚持“起点高、基础厚、要求严、重实践、求创新”的传统，使理、工、农、生、医、管理等各科学生都具有扎实的数学基础。历年来，上海交大的学生在国内外高校的数学竞赛中屡屡获奖。在历届全国硕士研究生和工程硕士研究生的入学考试中，上海交大的学生的数学平均成绩，总是名列榜首。这些成绩的取得，是因为上海交大数学系有一个行之有效的教学及考核体系，有一套先进且成熟的优秀教材和辅导材料，有一支充满活力的教学梯队。特别是有一个教学核心，几十年来，始终坚持在教学第一线，不断地总结教学经验，搜集教学资料。今天的成绩，是长期积累的成果，是历史的沉淀和升华。

学好一门基础理论课程要求掌握课程的总体概貌，不但要掌握这门课程的基本概念、基本内容以及基本方法，还要了解它们的来龙去脉，知道所学的内容何处来，用在何处，如何应用。另外，学好一门基础理论课程还需要做大量的习题，掌握基本的解题方法和解题技巧。本书的编写，就是希望在这方面对读者有所帮助。

本书收集了线性代数课程的大量经典习题，对收集的习题给出了详细的解答和有针对性的提示，有些还给出了多种解法。其中的例题可以启发读者的解题思路和进一步理解线性代数的基本知识，使之巩固所学的内容。收集的概念自测题，可供读者检验对所学内容的掌握程度，有些还超出课堂教学的要求，可用于拓宽知识面和检验读者的自学能力及理解能力。

本书还收集了上海交大编写的线性代数教材（科学出版社、第二版）的习题之中较难的习题，特别是一些证明题，并给出了较详细的解答和证明。

本书可以作为高等院校线性代数课程学生的教学辅导用书，也可以作为教师

的教学参考用书。书中“行列式与矩阵”部分由蒋启芬执笔,“向量与线性方程组”部分由王纪林执笔,“相似矩阵与二次型”部分由辛玉梅执笔,“线性空间与线性变换”部分由崔振执笔,最后由王纪林统稿完成。陈克俭副编审指导了本书的结构及编排工作。本书的编写和出版得到了上海交大数学系和上海交大出版社的大力支持和帮助,编者在此一并表示感谢。

由于时间紧迫,又囿于编者的水平,对书中错误或不妥之处希望读者提出宝贵意见。

编　者

2010 年 6 月于上海交通大学

目　　录

第一章　行列式与矩阵

一、知识要点

1. 行列式

1）行列式的定义

n 阶($n\geqslant 2$)行列式的定义为

$$D=|a_{ij}|_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\cdots\cdot a_{nj_n},$$

其中 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 是 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

2）行列式的性质

(1) 行列式的行和列互换,其值不变,即若

$$D=|a_{ij}|_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=|a_{ji}|_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D^{\mathrm{T}}=D$,称 D^{T} 为 D 的**转置行列式.**

据此知,以下关于行列式的行所述的性质,对于行列式的列同样成立.

(2) 行列式中某行的各元素有公因子 λ,则 λ 可提取到行列式的符号之外,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(3) 若行列式中某行的各元素均为两元素之和，则该行列式可表为两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(4) 行列式中交换任意两行中对应元素的位置，行列式的绝对值不变，仅改变正负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(5) 行列式中某行的各元素同乘一个数 λ，然后加到行列式中另一行对应的元素上，则行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+\lambda a_{i1} & a_{j2}+\lambda a_{i2} & \cdots & a_{jn}+\lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (i \neq j).$$

(6) 行列式等于其某行元素与对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D = |a_{ij}|_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik},$$

其中 A_{ij} 是 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

由性质(6)，不难得到

$$\sum_{k=1}^{11} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

性质(6)的推广即**拉普拉斯定理**，即

$$D=\sum_{i=1}^{t}N_k^{(i)}A_k^{(i)}=N_k^{(1)}A_k^{(1)}+N_k^{(2)}A_k^{(2)}+\cdots+N_k^{(t)}A_k^{(t)},$$

其中 $N_k^{(t)}$ 是位于 D 中任意 k 行的所有 k 阶子式，$A_k^{(t)}$ 是 $N_k^{(t)}$ 的代数余子式，$t=C_n^k$.

由拉普拉斯定理，可得行列式的**乘积公式**，即

① $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-22} & \cdots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{m-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

② 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

③ 反(副)对角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{(nn-1\cdots1)}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1n}a_{2n-1}\cdots$$

a_{n1}，其正负号与 n 的取值有关.

$$|a_{ij}|_n|b_{ij}|_n=|c_{ij}|_n,$$

其中 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$.

3) 常见的 n 阶行列式

(1) 上(下)三角形列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{m} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 对称行列式(行和列相等)

$$\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a & a \\ a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x & a \\ a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

(3) 箭形行列式($c_i \neq 0$)

$$\begin{vmatrix} c_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & c_n \end{vmatrix} = \left(c_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{c_i}\right) \prod_{j=1}^{n} c_j.$$

(4) 三对角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & \beta_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{vmatrix}$$

D_n 有递推关系式

$$D_n = \alpha_n D_{n-1} - \beta_{n-1} \gamma_{n-1} D_{n-2}.$$

(5) 范德蒙行列式

$$D = |x_j^{i-1}|_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

4) 克莱姆法则

克莱姆法则又称**克莱姆定理**,它可表述为:若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D=|a_{ij}|_n\neq 0$,则有唯一解,且其解可表示为

$$x_j=\frac{D_j}{D}\quad (j=1,2,\cdots,n),$$

其中 D_j 为行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由克莱姆法则易知,齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

有非零解,则其系数行列式 $D=|a_{ij}|_n=0$.

2. 矩阵

1) 矩阵

由 mn 个元素构成的 m 行 n 列的数表称为 $m\times n$ **矩阵**,即

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

当元素 a_{ij} 为实数时,$\boldsymbol{A}$ 称为**实矩阵**.

若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,则当 $a_{ij}=b_{ij}$ 时,称 $\boldsymbol{A}$ 等于 $\boldsymbol{B}$,记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

常见的矩阵有:

(1) 零阵　元素全为零的矩阵称为**零矩阵**,即 $\boldsymbol{0}=(0)_{m\times n}$.

(2) 阶梯阵　当 $i>j$ 时,元素 a_{ij} 全为零,且当第 i,j 行为非零($i>j$)时,第 i 行左边第一个非零元素的列下标大于第 j 行左边第一个非零元素的列下标,则此矩阵称为**阶梯型矩阵**. 如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

都是阶梯阵. 特别是非零行左边第一个元素为 1,而此列其余元素都为零的阶梯阵称为**规范阶梯阵**. 如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&2&0&1\\0&1&1&0&3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

(3) 方阵　行数与列数相等的矩阵称为**方阵**,即

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}.$$

(4) 上三角矩阵　$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,若 $a_{ij}=0(i>j)$,称此方阵为**上三角矩阵**. 如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&1\\0&0&-2\end{bmatrix},$$

特别地,若 $a_{ij}=0(i\geqslant j)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为严格上三角矩阵.

(5) 下三角矩阵　$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,若 $a_{ij}=0(i<j)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**下三角矩阵**. 如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\2&3&0\\4&-1&5\end{bmatrix},$$

特别地,若 $a_{ij}=0(i\leqslant j)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为严格下三角矩阵.

(6) 对角矩阵　$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,若 $a_{ij}=0(i\neq j)$. 称此为**对角矩阵**. 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&&&\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}\end{bmatrix},$$

记为 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{m})$.

(7) 单位矩阵　$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1)$,称此为**单位矩阵**. 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{bmatrix}.$$

(8) 数量矩阵　$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a,a,\cdots,a)$,称此为**数量矩阵**. 即

$$A=\begin{bmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{bmatrix},$$

简记为 $a\boldsymbol{E}$.

行列式

$$|a_{ij}|_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式,记作 $|\boldsymbol{A}|=|a_{ij}|_n$.

特别地,当元素 $a_{ij}=a_{ji}$ 时,方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 称为**对称矩阵**;当元素 $a_{ij}=-a_{ji}$ 时,方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为**反对称矩阵**.

2) 矩阵的加法和数乘

若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的加法为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$k$ 为数,则 k 与 $\boldsymbol{A}$ 的数乘为

$$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}.$$

3) 矩阵的乘法

若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times l}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{l\times n}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积

$$\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n},$$

其中 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}$.

利用矩阵的乘法,线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

可表示为

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},$$

其中矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}.$$

称 A 为此方程组的**系数矩阵**,又称矩阵

$$\bar{A}=(A,b)=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{bmatrix}$$

为此方程组的**增广矩阵**.

关于矩阵的乘法,要注意:

① 消去律一般不成立,即

$$AB=AC \nRightarrow B=C.$$

② 非零阵的乘积可能为零阵,故

$$AB=0 \nRightarrow A=0 \text{ 或 } B=0.$$

③ 交换律一般不成立,即一般

$$AB\neq BA.$$

故常用的平方和(差),立方和(差),二项式等公式一般不成立,在使用时应特别小心.

矩阵的乘法常用性质:

① $A(BC)=(AB)C$.

② $A(B+C)=AB+AC,(B+C)A=BA+CA$.

③ $k(AB)=(kA)B=A(kB)$.

④ 若 A 和 B 为 n 阶方阵,则

$$|AB|=|A|\,|B|.$$

4) 矩阵的转置

若矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,则 A 的转置矩阵

$$A^{\mathrm{T}}=(a_{ij})_{n\times m}.$$

关于矩阵的转置,有:

(1) $(kA+lB)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}+lB^{\mathrm{T}}$.

(2) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

(3) 若 A 为 n 阶方阵,则 A 为**对称矩阵的充要条件**为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A},$$

$\boldsymbol{A}$ **为反对称矩阵的充要条件为**

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}.$$

5）逆矩阵

若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，又称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记作

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

关于逆矩阵有以下结论：

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则其逆阵唯一.

(2) $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为可逆矩阵的充要条件为 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*,$$

其中 $\boldsymbol{A}^*=(A_{ji})_{n\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，A_{ji} 是 a_{ji} 的代数余子式.

(3) 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$ 为可逆阵，且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

逆矩阵的常用性质：

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $k\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件为 $k\neq 0$，且

$$(k\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都可逆，则

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}.$$

(3) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆，且

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

(4) $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，则

$$|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}, \quad |\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}.$$

6）分块矩阵

以小矩阵为元素的矩阵常称为**分块矩阵**. 如

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 2 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B},$$

其中

$$A_{11}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix},\quad A_{12}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad A_{21}=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix},\quad A_{22}=\begin{bmatrix}-1&4&1\\3&1&2\end{bmatrix},$$

称 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{2\times2}$为 $\boldsymbol{A}$ 的**分块矩阵**.

关于分块矩阵,有:

(1) 若 $\boldsymbol{A}_{m\times l},\boldsymbol{B}_{l\times n}$,记 $\boldsymbol{B}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$,其中 β_j 为 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列,记 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\cdots,\alpha_m^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$,其中 α_i 是$\boldsymbol{A}$ 的第 i 行,则

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\boldsymbol{A}\beta_1,\boldsymbol{A}\beta_2,\cdots,\boldsymbol{A}\beta_n),$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_m\end{bmatrix}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\alpha_1\boldsymbol{B}\\\alpha_2\boldsymbol{B}\\\vdots\\\alpha_m\boldsymbol{B}\end{bmatrix}.$$

(2) 若方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_2\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 也是方阵,则 $\boldsymbol{A}$ 为**准对角阵**,有

(A) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|$.

(B) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_2^{-1}\end{bmatrix}$.

(C) $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}^*=\begin{bmatrix}|\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{A}_1^*&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&|\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{A}_2^*\end{bmatrix}$.

(3) 若 $\boldsymbol{A}_1$ 是 n_1 阶方阵,$\boldsymbol{A}_2$ 为 n_2 阶方阵,$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$,则

① $|\boldsymbol{A}|=(-1)^{n_1n_2}|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|$.

② $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_2^{-1}\\\boldsymbol{A}_1^{-1}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$.

③ $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}^*=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&|\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{A}_2^*\\|\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{A}_1^*&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$.

④ 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆阵,$\boldsymbol{D}$ 为 m 阶方阵,则

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}|,$$

特别当 $m=n$,且 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$,则

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}=|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}|.$$

7）矩阵的秩

若矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$中有$r$阶行列式（称为$\boldsymbol{A}$的$r$阶子式）不为零，而所有阶数大于$r$的行列式全为零，则称$\boldsymbol{A}$的秩为$r$，记作$r(\boldsymbol{A})=r$.

显然有：

(1) $r(0)=0$.

(2) 若$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，则$r(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}$.

(3) $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A})$.

(4) $\boldsymbol{A}$为n阶方阵，则$\boldsymbol{A}$可逆的充要条件为$r(\boldsymbol{A})=n$，且若$\boldsymbol{A}$可逆，则$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$，$r(\boldsymbol{CA})=r(\boldsymbol{C})$.

(5) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\geqslant r(\boldsymbol{A})$.

(6) $\boldsymbol{A}$为阶梯形矩阵，则$r(\boldsymbol{A})$等于$\boldsymbol{A}$中非零行的行数.

关于矩阵的秩，常用的结论有：

(1) $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

(2) 若$k\neq0$，则$r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$.

(3) $r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.

(4) 若$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{AB}=0$，则

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n.$$

(5) $\boldsymbol{A}$为$m\times n$实矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}).$$

(6) $\boldsymbol{A}$为n阶方阵，则

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n & (r(\boldsymbol{A})=n),\\1 & (r(\boldsymbol{A})=n-1),\\0 & (r(\boldsymbol{A})<n-1).\end{cases}$$

(7) 若$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，则

$$r(\boldsymbol{AB})\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n.$$

(8) 若$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{bmatrix},$$

则当$\boldsymbol{A}\neq0$时，有$r(\boldsymbol{A})=1$. 反之，若n阶方阵$\boldsymbol{A}$有$r(\boldsymbol{A})=1$，则$\boldsymbol{A}$可表为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，其中$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$为非零$n\times1$矩阵.