教育部规划 中等职业学校文化课教材

数学 3

工科类●第三册

全国中等专业学校数学课程组 组编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内 容 提 要

本书是与全国中等专业学校数学课程组根据教育部2000年颁布的《中等职业学校数学教学大纲(试行)》组织编写的工科类中等职业学校数学教材 与本教材配套的教学参考书和习题册同时出版

本教材内容包括:排列与组合,概率初步,统计初步,极限与导数,导数的应用,积分及其应用

本书除可作为中等职业学校数学课程的教材外,也可作为自学者的参考书

图书在版编目(CIP)数据

数学.工科类.第3册/全国中等专业学校数学课程组组编.
—北京:高等教育出版社,2001(2004年重印)

ISBN 7-04-009764-8

Ⅰ 数… Ⅱ.全… Ⅲ 数学-专业学校-教材
Ⅳ.01

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第10483号

总体策划 张又昌 **责任编辑** 邵 勇 **封面设计** 刘晓翔
责任绘图 黄建英 **版式设计** 马静如 **责任印刷** 蔡敏燕

数学(工科类)第三册
全国中等专业学校数学课程组 组编

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网 址**	http://www hep edu cn
总 机	010-82028899		http://www.hep com cn
经 销	新华书店上海发行所		
排 版	南京理工排版校对公司		
印 刷	上海师范大学印刷厂		
开 本	787×1092 1/16	**版 次**	2001年7月第1版
印 张	14	**印 次**	2004年9月第7次印刷
字 数	259 000	**定 价**	15.10元

前　　言

面向21世纪,中国的职业技术教育改革迈出了重要的一步.教育部于2000年审定并通过了《中等职业学校数学教学大纲(试行)》.这一大纲的颁布与实施,为中等职业学校数学课程的教学改革指明了方向.为了配合此新教学大纲的颁布与实施,全国中等专业学校数学课程组组织数学教材编写组,根据新大纲,并参考普通高中的数学教学基本要求,编写了这套《数学》教材.为适应各种不同类别的中等职业学校的需要,本教材按照模块式编排,共有七个模块,其中必学部分有四个模块(一、函数;二、向量、复数;三、几何;四、概率与统计初步).选学部分有三个模块(五、微积分初步;六、统计;七、拓宽和提高).全套教材共分四册出版,第一册:函数;第二册:向量,复数,几何;第三册:概率与统计初步,微积分初步;第四册:统计,拓宽与提高.

本教材按照《中等职业学校数学教学大纲(试行)》的要求,贯彻"加强基础,注重能力培养,突出应用,增加弹性,适度更新,兼顾体系"的原则,在教学内容、体例安排、教材结构、练习设置等方面,力求体现中等职业教育专业广、工种多的特点,将现代生活及各类专业学习中均有着广泛应用的基础知识作为必学内容,着重培养学生分析问题和解决问题的能力,以保证高中阶段的基本数学水准.教材通过模块式的编排,让有不同要求的专业及学有余力的学生选择不同的内容,使教材具有了一定的弹性,从而适用面更为广泛.同时,为方便教学,与教材相配套的教学参考书和习题册同步发行.在教材中,练习题附在每节内容之后,供课堂练习使用,复习题附在每章内容之后,供复习本章知识使用;在教学参考书中,给出了教材中练习、复习题及习题册中习题的全部参考答案与提示;习题册供课内或课外作业使用.

参加本教材编写的有上海科技管理学校丁百平,九江职业技术学院胡胜生,芜湖机械学校夏国斌,上海航空工业学校潘碚.全书由丁百平主编.第一册由丁百平统稿,第二册由胡胜生统稿,第三册由夏国斌统稿,第四册由潘碚统稿.参加审稿的有广东省水利电力职业技术学院沈彩华(主审第一册),渤海船舶工业学校杜吉佩(主审第二册),四川省机械工业学校李以渝(主审第三册),上海环境学校周建和(主审第四册),安徽银行学校余志祖,承德工业学校陈祖泽,北京二轻工业学校张进军,全套教材由上海航空工业学校张又昌总体策划并主审.

本书在编写过程中,得到了教育部职业教育与成人教育司、全国职业教育教学指

导委员会、中等职业教育文化基础课程教学指导委员会以及高等教育出版社有关领导和编辑的热情关心和指导，得到了北京、上海、江苏、安徽、江西、四川、广东、辽宁、河北、天津等省市教育部门和部分中等职业学校的大力支持，在此谨表示深切的感谢！

限于编写水平，不妥之处在所难免，衷心欢迎广大从事职业教育的教师、专家提出批评指正.

全国中等专业学校数学课程组

2000 年 12 月

目　　录

第 12 章

排列与组合

随着计算机技术的迅猛发展，排列组合知识的应用日趋广泛.本章将首先介绍两个基本计数原理，然后讨论排列、组合的概念和性质，最后运用计数方法推导出二项式定理.

§12-1 两个基本原理

一、分类计数原理(加法原理)

先看一个例子.

某学校的阅览室中有科普类的杂志 30 种，文艺类的杂志 50 种.现从中任选一种杂志，有多少种不同的选法？

从阅览室中任选一种杂志的方法可以分成两类：一类是从科普类的杂志中任选一种，另一类是从文艺类的杂志中任选一种.由于科普类的杂志有 30 种，因此从中任选一种杂志有 30 种不同选法.同理，从文艺类的杂志中任选一种有 50 种不同选法.从这两类杂志中任选一种的方法共有

$$30 + 50 = 80(\text{种}).$$

一般地，有如下**分类计数原理.**

完成一件事，有 k 类方法，第 1 类有 m_1 种不同方法，第 2 类有 m_2 种不同方法，……，第 k 类有 m_k 种不同方法.任选一种方法，此事即能完成，那么，完成这件事不同的方法种数为

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_k. \tag{12-1}$$

这种计数方法因为要把各类方法的数目相加，所以也称为**加法原理.**

例 1 一个袋子里装有 36 个苹果，另一个袋子里装有 52 个桔子.现从中任取一个水果，有多少种不同的取法？

解 任取一个水果的方法可以分成两类：一类是从装苹果的袋子里任取一个，另

一类是从装桔子的袋子里任取一个. 由于有 36 个苹果，因此，从装苹果的袋子里任取一个的方法有 36 种. 同理，从装桔子的袋子里任取一个的方法有 52 种. 根据分类计数原理，不同的取法一共有

$$N = 36 + 52 = 88(\text{种}).$$

例 2 从甲地到乙地，有三类交通工具可供选择，其中火车每日三班，汽车每日四班，轮船每日两班. 在一天中从甲地去乙地，共有多少种不同的走法？

解 从甲地去乙地的走法种数按交通工具选择的不同可以分成三类：第一类，乘火车有 3 种走法；第二类，乘汽车有 4 种走法；第三类，乘轮船有 2 种走法. 根据分类计数原理，一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有不同的走法

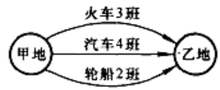

图 12-1

$$N = 3 + 4 + 2 = 9(\text{种}).$$

二、分步计数原理(乘法原理)

某学校的阅览室中有科普类的杂志 30 种，文艺类的杂志 50 种，现从中任选一种科普类的杂志和一种文艺类的杂志，有多少种不同的选法？

从阅览室中任选一种科普类的杂志和一种文艺类的杂志可以分两步来完成：第一步，从 30 种科普类杂志中任选一种，有 30 种不同的选法；第二步，从 50 种文艺类杂志中任选一种，有 50 种不同的选法，即，第一步每选出一种科普类的杂志后，第二步再选一种文艺类杂志都有 50 种不同的选择. 所以，总的选法种数为

$$30 \times 50 = 150(\text{种}).$$

这个例子给出了另一个计数原理，即**分步计数原理**.

完成一件事，有 k 个步骤，完成第 1 步有 n_1 种方法，完成第 2 步有 n_2 种方法，……，完成第 k 步有 n_k 种方法，依次完成这 k 个步骤，此事才能完成，那么，完成这件事不同的方法种数为：

$$N = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k. \qquad (12\text{-}2)$$

这种计数方法因为要把各步计数的结果相乘，所以也称为**乘法原理**.

例 3 某学校二年级机械制造与控制专业有两个班，1 班有 38 名同学，2 班有 40 名同学，现从每个班级中各选一名同学参加计算机竞赛，有多少种不同的选法？

解 从每个班级中各选一名同学参加计算机竞赛，可以分两步完成：第一步从机

械制造 1 班中挑选一名同学，有 38 种方法；第二步从机械制造 2 班中挑选一名同学，有 40 种方法. 根据分步计数原理，不同的选法种数为

$$N = 38 \times 40 = 1\,520(\text{种}).$$

例 4 从甲地去丙地，中间必须经过乙地，已知从甲地到乙地有 3 条路径，从乙地到丙地有 2 条路径(如图 12-2)，问从甲地到丙地共有多少种不同的走法？

解 从甲地去丙地必须分成两步，第一步：从甲地到乙地，有 3 种不同的走法；第二步：从乙地到丙地有 2 种不同的走法. 根据分步计数原理，不同的走法共有

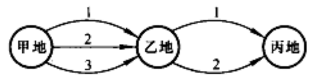

图 12-2

$$N = 3 \times 2 = 6(\text{种}).$$

例 5 一批产品中有 42 件为合格品，8 件为次品.

(1) 从中任取 1 件来检验，有多少种不同的取法？

(2) 从中任取 2 件来检验，恰有一件是合格品的取法种数是多少？

解 (1) 取一件产品的方法可以分成两类：一类是从 42 件合格品中任取一件，有 42 种取法；另一类是从 8 件产品中任取一件，有 8 种取法. 根据分类计数原理，不同的取法共有

$$N = 42 + 8 = 50(\text{种}).$$

(2) 任取 2 件产品恰有一件是合格品可以分两步来完成：第一步从 42 件合格品中任取一件，有 42 种取法；第二步从 8 件次品中任取一件，有 8 种取法. 根据分步计数原理，恰有一件是合格品的取法共有

$$N = 42 \times 8 = 336(\text{种}).$$

如何确定计数的对象是需要分类还是需要分步来完成，这是正确使用两个基本原理的关键.

例 6 某城市的电话号码由七位数字组成，如果号码的第一个数字不能为 0、1，其余数字可从 0，1，2，3，…，9 这 10 个自然数中任意选取，允许数字重复，问该城市最多可装电话多少门？

解 组成七位数的电话号码，可以分七步完成，第一步确定首位号码，由于第一个数字不能选 0、1 两个数字，所以，首位号码只能从 2，3，4，…，9 这 8 个数字中任取 1 个，有 8 种取法；第二步确定第二位号码，因为电话号码允许重复，不论首位号码是什么，第二位号码均可以从 0，1，2，…，9 这 10 个数字中任取 1 个，有 10 种取法；

第三步到第七步，分别确定第三到第七位号码，与第二步相同，均有 10 种取法，根据分步计数原理，所有可能的取法共有

$$N = 8 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 8 \times 10^6 (\text{个}),$$

即该城市最多可装电话 800 万门.

练习 12-1

1. 加工某零件有三种方法，会第一种方法的有 3 人，会第二种方法的有 5 人，会第三种方法的有 6 人，现在要选出一人完成该零件的加工任务，有多少种选法？

2. 加工某零件需经过三道工序才能完成，做第一道工序的有 3 人，做第二道工序的有 5 人，做第三道工序的有 6 人，如果每道工序各选出一人来完成该零件的加工任务，有多少种选法？

3. 书架上有 6 本数学书，5 本物理书，4 本语文书，并且各类书均无复本.

(1) 从书架上任取 1 本书，共有多少种取法？

(2) 三类书每类各取一本，共有多少种取法？

4. 在 10 件产品中，有 7 件合格品，3 件次品，从中抽取 2 件来检查，问恰有一件是次品的抽取方法种数是多少？

5. 某城市的电话号码由七位数字组成，其中首位数只能用 3 或 5. 问该城市最多可装电话多少门？

§12-2 排列与组合

一、排　列

1. 排列的定义

例 1　在北京、上海、深圳三个民航站之间的直达航线上，需要准备多少种不同的飞机票？

由于每一个起点站到一个终点站都需要准备一种飞机票，所以，可以把“一张飞机票”看成是“按照起点站排在前，终点站排在后的顺序的一种排法”，这样，所需准备的飞机票种数就是从北京、上海、深圳这三个站中，每次取出两个站，按起点站在前，终点站在后的顺序的所有排法种数.

起点站	终点站	飞机票
北京	上海	北京 $\longrightarrow$ 上海
	深圳	北京 $\longrightarrow$ 深圳

上海	→北京	上海 → 北京
	→深圳	上海 → 深圳
深圳	→北京	深圳 → 北京
	→上海	深圳 → 上海

完成上述排法可分为两个步骤：第一步从三个站中任选一个站为起点站，有 3 种方法；第二步从余下的两个站中任选一个站为终点站，有 2 种方法，根据分步计数原理，共有 $3 \times 2 = 6$ 种不同的排法. 这表明，需要准备 6 种不同的飞机票.

例 2　用数字 1、2、3 可以组成多少个没有重复数字的两位数？

组成两位数的个数，就是从 1、2、3 三个数中每次取出两个，按照十位在前，个位在后的顺序的所有排法种数. 完成上述排法可分为两个步骤：第一步从三个数中任取一个排在十位，有 3 种方法；第二步从余下的两个数中任取一个排在个位，有 2 种方法. 根据分步计数原理，共有 $3 \times 2 = 6$ 种不同的排法. 这表明，可以组成 6 个没有重复数字的两位数.

十位	个位	两位数
1	→2	12
	→3	13
2	→1	21
	→3	23
3	→1	31
	→2	32

上面两个例子所考察的对象与研究的问题是不同的，但是，如果抽去它们的实际意义，把所考察的对象称为元素，那么，它们都可以概括为从 3 个不同元素中，每次取出 2 个元素，按照一定的顺序排成一列，共有几种不同的排法的问题. 对于此类问题，一般地，有如下定义.

定义　从 n 个不同的元素中，任取 m 个 $(m \leqslant n)$ 不同元素，按照一定的顺序排成一列，称为从 n 个不同的元素中每次取出 m 个元素的一个**排列**. 当 $m < n$ 时，称为**选排列**；当 $m = n$ 时，称为**全排列**.

由定义可知，两个排列相同，不仅元素完全相同，而且元素排列的顺序也要完全相同. 例如，例 2 中 12 和 21 组成的元素相同，但由于元素排列的顺序不同，所以是不

同的排列.

2. 排列数的计算公式

从 n 个不同元素中每次取出 m 个 ($m \leqslant n$) 不同元素的所有排列的个数,称为从 n 个不同元素中每次取出 m 个不同元素的**排列数**,记作 P_n^m. 当 $m = n$ 时,P_n^n 称为**全排列数**,P_n^n 常简记为 P_n.

例如,例 1、例 2 中的结果就是从 3 个不同元素中,每次取出 2 个不同元素的排列数,即 $P_3^2 = 3 \times 2 = 6$. 下面,我们用上例中的方法来推导排列数 P_n^m 的计算公式.

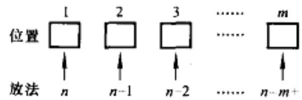

图 12-3

从 n 个不同元素中取出 m 个 ($m \leqslant n$) 不同元素的一个排列,可分成 m 步来完成:第一步从 n 个元素中任取 1 个放在第 1 个位置上,有 n 种方法;第二步从剩下的 $n-1$ 个元素中任取 1 个放在第 2 个位置上,有 $n-1$ 种方法;依次类推,第 m 步只能从剩下的 $n-(m-1)$ 个元素中任取 1 个放在第 m 个位置上,有 $n-(m-1)$ 种方法(参见图 12-3). 根据分步计数原理,从 n 个不同元素中每次取出 m 个不同元素的所有的排列数为

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).$$

所以,排列数的计算公式为

$$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1), \ (m \leqslant n). \tag{12-3}$$

这就是说,从 n 个不同的元素中每次取出 m 个元素的排列数 P_n^m,等于从 n 开始的递减的 m 个连续自然数的乘积.

当 $m = n$ 时,有全排列数的计算公式:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

这表明,n 个不同元素的全排列数 P_n 等于自然数 1 到 n 的连乘积.

自然数 1 到 n 的连乘积称为 n 的阶乘,记作 $n!$,即

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!. \tag{12-4}$$

当 $m < n$ 时,利用公式(12-4)可以得到

$$\begin{aligned} P_n^m &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)(n-m)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-m)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!},$$

即
$$\mathrm{P}_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{P}_{n-m}}. \tag{12-5}$$

为了使公式(12-5)在 $m = n$ 时也成立，规定 $0! = 1$.

例 3 利用计算器计算：

(1) P_7； (2) P_7^4； (3) $\mathrm{P}_8^4 - 2\mathrm{P}_6^3$.

解 计算器的操作过程及显示结果如下(此处使用的计算器型号为 CASIOfx-82LP)：

(1) $\boxed{7}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{n!}$ $\longrightarrow$ $\boxed{5040}$,

所以，$\mathrm{P}_7 = 7! = 5\,040$.

(2) $\boxed{7}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{n!}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{n!}$ $\boxed{=}$ $\longrightarrow$ $\boxed{840}$,

所以，$\mathrm{P}_7^4 = \mathrm{P}_7 \div \mathrm{P}_3 = 840$.

(3) $\boxed{8}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{n!}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{n!}$ $\boxed{-}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{6}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{n!}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{n!}$ $\boxed{=}$ $\longrightarrow$ $\boxed{1440}$,

所以，$\mathrm{P}_8^4 - 2\mathrm{P}_6^3 = \mathrm{P}_8 \div \mathrm{P}_4 - 2 \times \mathrm{P}_6 \div \mathrm{P}_3 = 1\,440$.

例 4 某班级有 40 名同学，从中选出班长、学习委员、生活委员、宣传委员、体育委员各 1 人，组成班委会，问共有多少种选法？

解 从 40 名同学中选出 5 人组成班委的各个成员，每一种选法就是从 40 人中选出 5 人的一个排列，排列数为

$$\mathrm{P}_{40}^5 = 40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36 = 78\,960\,960,$$

所以共有 78 960 960 种选法.

例 5 用 1、2、3、4、5 五个数字，可以分别组成

(1) 多少个没有重复数字的三位数；

(2) 多少个没有重复数字的五位数；

(3) 多少个允许重复数字的两位数.

解 (1) 这是一个选排列问题，由公式 12-3 可得没有重复数字的三位数的个数为

$$\mathrm{P}_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60(\text{个})；$$

(2) 这是一个全排列问题，由公式(12-4)可得没有重复数字的五位数的个数为

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120(\text{个});$$

(3) 组成允许重复数字的两位数可以分两步完成：第一步从 1、2、3、4、5 中任取一个数字作为十位数，有 5 种取法；第二步由于数字允许重复，所以个位数仍是从 1、2、3、4、5 中任取一个，还是 5 种取法. 根据分步计数原理，允许重复数字的两位数的个数为

$$5 \times 5 = 25(\text{个}).$$

练习 12-2(1)

1. 利用计算器计算：

(1) P_8；

(2) $\dfrac{P_{15}^9}{P_9^7}$；

(3) $\dfrac{P_8^5 + P_8^4}{P_9^5 - P_9^4}$.

2. 写出从四个元素 a、b、c、d 中每次取出两个不同元素的所有排列以及前三个元素的全排列.

3. 某段铁路沿线共有 16 个车站，需要准备多少种普通客票？

4. 八个人排成一排，有多少种不同的排法？

5. 用 1、2、3、4 四个数字可以组成

(1) 多少个没有重复数字的三位数；

(2) 多少个没有重复数字的两位数；

(3) 多少个允许重复数字的两位数.

二、组　合

1. 组合的定义

例 6　在北京、上海、深圳三个民航站之间的直达航线上，有多少种不同的票价？

这个问题与例 1 中求飞机票种数的问题不同，飞机票的种数与起点、终点的顺序有关，而在这个问题中票价只与起点、终点两地间的距离有关，与起点、终点顺序无关，即，从北京到上海与从上海到北京的票价是一样的，因此，票价种数只有机票种数的一半，即有3 种不同的票价.

例 7　从数字 1、2、3 中任取两个数相加，可以得到多少个不同的和数？

这个问题与例 2 中求没有重复数字的两位数的个数不同，和数只与取出的数字的大小有关，而与它们的顺序无关. 因此，和数的个数只有两位数个数的一半，即有 3 种不同的和数.

虽然上述两个例子所考察的对象与研究的问题不同，但是它们都可以概括为从三个不同元素中每次取出两个不同元素，不管其顺序并成一组，共有几种不同的组数问题，对于此类问题，一般地，有如下定义.

定义 从 n 个不同的元素中，任取 m 个 $(m \leqslant n)$ 不同元素，不管顺序并成一组，称为从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的一个**组合**.

由排列与组合的定义可知，排列和组合的根本区别在于所取出的 m 个元素是否与顺序有关. 排列与元素的顺序有关，组合与元素的顺序无关. 例如 a、b 与 b、a 是不同的排列，却是相同的组合.

2. 组合数的计算公式

从 n 个不同元素中，每次取出 m 个 $(m \leqslant n)$ 不同元素的所有组合的个数，称为从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的**组合数**，记作 C_n^m.

我们可以从组合数 C_n^m 与排列数 P_n^m 之间的联系来推导组合数 C_n^m 的计算公式.

从 n 个不同元素中取出 m 个 $(m \leqslant n)$ 不同元素的一个排列，可以分两步来完成：第一步从 n 个元素中任取 m 个元素并成一组，有 C_n^m 种方法；第二步把取出的 m 个元素按不同的顺序排成一列，有 P_m 种方法. 根据分步计数原理，从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的所有排列的个数为

$$P_n^m = C_n^m \cdot P_m. \tag{12-6}$$

由此得出

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\ (m \leqslant n). \tag{12-7}$$

由公式(12-5)可得

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{12-8}$$

例 8 利用计算器计算：

(1) C_{20}^3； (2) C_{16}^4； (3) $C_{17}^4 - C_{16}^3$.

解 (1) 由公式(12-7)可知 $C_{20}^3 = \dfrac{20 \times 19 \times 18}{3!}$，所以计算器操作过程及显示结果如下：

$$\boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{9}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{8}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{n!}\ \boxed{=} \longrightarrow \boxed{1140},$$

所以，$C_{20}^{3}=1\ 140$.

(2) 因为 $C_{16}^{4}=\dfrac{16!}{4!12!}$，所以

$\boxed{1}\ \boxed{6}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{n!}\ \boxed{\div}\ \boxed{4}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{n!}\ \boxed{\div}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{n!}\ \boxed{=}$
$\longrightarrow \boxed{1820}$.

所以，$C_{16}^{4}=1\ 820$.

(3) 因为 $C_{17}^{4}-C_{16}^{3}=\dfrac{17!}{4!13!}-\dfrac{16!}{3!13!}$，所以

$\boxed{1}\ \boxed{7}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{n!}\ \boxed{\div}\ \boxed{4}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{n!}\ \boxed{\div}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{n!}\ \boxed{-}$
$\boxed{6}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{n!}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{n!}\ \boxed{\div}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{n!}\ \boxed{=}\longrightarrow$
$\boxed{1820}$,

所以，$C_{17}^{4}-C_{16}^{3}=1\ 820$.

例 9 从 20 名足球运动员中，选出 10 名上场比赛(守门员已另行选出)，问有多少种选法.

解 这是从 20 个不同元素中取出 10 个元素的组合问题，因此，选法的总数等于组合数

$$C_{20}^{10}=\frac{20!}{10!10!}=184\ 756,$$

即，共有 184 756 种选法.

例 10 平面内有八个点，其中没有三点在一条直线上，过每两个点作一条直线，一共可以作多少条直线？

解 因为没有三点在一条直线上，所以，任意两个点确定的直线的条数，就是从八个不同元素中取出两个元素的组合数

$$C_{8}^{2}=\frac{8\times 7}{2\times 1}=28.$$

即可以作 28 条直线.

练习 12-2(2)

1. 利用计算器计算：

(1) C_{12}^{4}；

(2) $C_{11}^{4}+C_{11}^{3}$；

(3) $C_{30}^{28}-C_{30}^{2}$.

2. 写出从 a、b、c、d 这四个元素中，分别取出 2 个和 3 个不同元素的所有组合.

3. 从全班 40 名同学中，选出 5 名同学参加公益劳动，共有多少种不同的选法？

4. 平面内有 9 个点，其中任意 3 点都不在同一条直线上，以任意 3 点为顶点画三角形，一共可以画多少个三角形？

§12-3 排列、组合的简单应用

一、组合数的两个性质

性质 1 $C_n^m=C_n^{n-m}$. (12-9)

证 根据公式(12-8)，

$$C_n^{n-m}=\frac{n!}{(n-m)![n-(n-m)]!}=\frac{n!}{(n-m)!m!}=C_n^m.$$

一般，当 $m>\frac{n}{2}$ 时，利用性质 1，通过计算 C_n^{n-m} 可以比较方便地得出 C_n^m 的值. 为了使性质 1 在 $m=n$ 时也成立，我们规定 $C_n^0=1$.

性质 2 $C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$. (12-10)

证
$$\begin{aligned}C_n^m+C_n^{m-1}&=\frac{n!}{m!(n-m)!}+\frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!}\\&=\frac{n![(n-m+1)+m]}{(m-1)!(n-m+1)!}\\&=\frac{(n+1)!}{(m-1)![(n+1)-m]!}\\&=C_{n+1}^m.\end{aligned}$$

例 1 计算：(1) C_{50}^{48}； (2) $C_{100}^{98}+C_{100}^{97}$.

解 (1) 由性质 1 得

$$C_{50}^{48}=C_{50}^{50-48}=C_{50}^{2}=\frac{50\times 49}{2\times 1}=1\ 225.$$

(2) 由性质 2、性质 1 得

$$C_{100}^{98}+C_{100}^{97}=C_{101}^{98}=C_{101}^{3}=\frac{101\times100\times99}{3\times2\times1}=166\ 650.$$

例 2　证明：$C_6^6+C_7^6+C_8^6=C_9^2$.

证　由性质 1 得

$$C_6^6+C_7^6+C_8^6=C_7^7+C_7^6+C_8^6=C_8^7+C_8^6=C_9^7=C_9^2.$$

二、排列、组合简单应用举例

在实际应用中常常要综合运用分类计数原理、分步计数原理以及排列、组合的计算公式、性质才能解决问题.

例 3　从四面不同颜色的旗子中任取一面、两面或三面，按不同次序挂在旗杆上表示信号，一共可以表示多少种信号？

解　表示一种信号可以挂一面旗子、两面旗子或者三面旗子. 挂一面旗子有 P_4^1 种信号；挂两面旗子有 P_4^2 种信号；挂三面旗子有 P_4^3 种信号. 根据分类计数原理，所求信号种数是

$$P_4^1+P_4^2+P_4^3=4+4\times3+4\times3\times2=40(\text{种}).$$

例 4　有 6 本不同的书，分给甲、乙、丙三个同学，在下列三种不同情况下，各有多少种不同的分法？

(1) 甲得 1 本，乙得 2 本，丙得 3 本；

(2) 一人得 1 本，一人得 2 本，一人得 3 本；

(3) 每人各得 2 本.

解　(1) 因为各人分得的书与书的顺序无关，所以分书是组合问题，先从 6 本书中任取 1 本给甲，有 C_6^1 种取法，再从余下的 5 本书中任取 2 本给乙，有 C_5^2 种取法，最后把剩下的 3 本书给丙，有 C_3^3 种取法. 根据分步计数原理，甲得 1 本，乙得 2 本，丙得 3 本的分法共有

$$C_6^1\cdot C_5^2\cdot C_3^3=6\times10\times1=60(\text{种});$$

(2) 由于没有指定谁得 1 本、2 本、3 本，所以可以先分书，将 6 本书分成三堆，一堆 1 本，一堆 2 本，一堆 3 本，共有 $C_6^1\cdot C_5^2\cdot C_3^3$ 种分法. 再将三堆书分给甲、乙、丙三人，此时，分法与顺序有关，是排列问题，共有 P_3 种分法. 根据分步计数原理，分法种数为

$$C_6^1\cdot C_5^2\cdot C_3^3\cdot P_3=60\times6=360(\text{种});$$