



普通高等教育“十二五”精品
规划研究生系列教材

系统辨识

李鹏波 胡德文 张纪阳 谢红卫 编著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

普通高等教育“十二五”精品规划研究生系列教材

系统辨识

李鹏波 胡德文 张纪阳 谢红卫 编著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

系统辨识是研究确定系统数学模型的一种理论和方法,它和状态估计、控制理论构成现代控制论三个互相渗透的领域。本书系统地介绍系统辨识和参数估计的基本原理、方法和应用。全书共分为 14 章,内容包括:绪论、传递函数的辨识、辨识的输入信号、相关辨识法、辨识的最小二乘法、极大似然法及其他辨识算法、系统阶次的辨识、闭环系统辨识、时间序列的建模分析、多变量系统辨识、非线性系统辨识、基于神经网络的系统辨识、小样本系统辨识以及系统辨识的应用。书中包含很多工程应用实例、Matlab 实例、例题和习题。

本书可作为自动化、机械、仪器仪表、认知科学、生物信息学等专业系统辨识、建模和参数估计课程的研究生教材,也可以供相关专业的高年级本科生、教师和科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

系统辨识 / 李鹏波等编著. — 北京:中国水利水电出版社, 2010. 12
普通高等教育“十二五”精品规划研究生系列教材
ISBN 978-7-5084-8161-6

I. ①系… II. ①李… III. ①系统辨识—研究生—教材 IV. ①N945. 14

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第243341号

书 名	普通高等教育“十二五”精品规划研究生系列教材 系统辨识
作 者	李鹏波 胡德文 张纪阳 谢红卫 编著
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (营销中心)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京零视点图文设计有限公司
印 刷	北京瑞斯通印务发展有限公司
规 格	184mm×260mm 16 开本 16.25 印张 406 千字
版 次	2010 年 12 月第 1 版 2010 年 12 月第 1 次印刷
印 数	0001—3000 册
定 价	32.00 元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

前 言

在自然科学和社会科学的许多领域中，人们越来越重视对系统进行定量的系统分析、系统综合、仿真、控制和预测。而将被研究对象模型化，是开展这些工作的前提和基础。一般说来，建立系统的数学模型有两种基本方法，即机理分析法和测试法。机理分析法即理论建模方法，它主要是通过分析系统的运动规律（物理的、化学的或社会学的规律），利用数学方法推导出模型的结构和参数。机理分析法只能用于较简单系统的建模，并且对系统的机理要有较清楚的了解。对于比较复杂的实际系统，在进行理论建模时，就必须提出合理的简化假定，否则会使问题过于复杂。这样建立模型有时是不够准确的，有时甚至是不可能的。测试法是通过分析未知系统的实验或运行数据（输入输出数据），来建立一个与所测系统等价的数学模型。因此，测试建模的方法就是系统辨识。

在自动控制领域，系统辨识就是早期控制系统动态特性测试的延续。动态特性的测试，即通过实验得到系统的过渡过程曲线或频率特性曲线，再推算出系统的脉冲过渡函数或传递函数。现代系统辨识则主要是由系统的输入输出直接求出动态方程式的结构和参数。辨识方法可以较好地解决系统噪声和测量噪声干扰的问题，可以处理多变量和非线性系统问题，而对于时变系统和分布参数问题，则可以在多级系统上作参数估计。

由动态特性测试方法直接得到的是非参数模型，而为了获得参数模型就必须探索应用更为普遍的参数估计方法。实际系统通过实验所获得的数据，都包含有测量噪声，而模型的假定和简化等过程所引起的误差也可以理解为噪声，从受到噪声干扰的观测值中寻求最接近被测值的估计值，这一过程称为参数估计。参数估计是系统辨识中的基础部分，在此，它解释为在系统结构已知的情况下从系统的观测数据中找出最接近观测值的估计值。

由于学科的发展，不同学科的重叠交叉成为学科发展中的普遍现象。系统辨识中普遍地采用了时间序列的概念和方法，这说明二者在方法上有许多共同之处。时间序列分析起步略早一些，20 世纪之初，许多数理学家开始注意到气象、天文现象的时序特性，从而将静态模型参数估计中的概率论和数理统计移到了离散时间序列的参数估计中。时间序列分析相当于估计具有白噪声输入的系统，其输入信号是不可测量的，使用的信息只有系统或过程的输出观测值。与时序分析相比，系统辨识的内容则更为广泛些，它除了利用输出信号外，还利用了测量的输入控制信号，要求辨识的结果尽可能不受观测噪声或过程噪声的影响。可以说，正是数理统计学家大量深入的理论研究工作，才为系统辨识奠定了扎实的理论基础。

计算机技术的不断发展和普及，为系统辨识的广泛应用提供了技术上的保证，这也是系统辨识发展的基础之一。可以说，研究系统辨识的算法，不必担心它在计算机上的可操作性问题。计算机具有强大的硬件支持、丰富的软件资源和高速的运算能力，可以在人工不干预的情况下，在线实时地完成系统的辨识，为控制策略的设计直接提供出数学模型。

系统辨识、状态估计和控制理论构成现代控制论三个互相渗透的领域。系统辨识是一门应用范围很广的学科，其实际应用已遍及许多领域，在工程控制、航空、航天、海洋工程、认知科学、医学、生物信息学、水文学及社会经济等方面的应用越来越广泛。

本书系统地讲述系统辨识的理论和各种辨识方法,分析各种方法的特点和内在联系,并介绍辨识技术的实际应用。本书的内容共分为14章。第1章至第4章为绪论、传递函数的辨识、辨识的输入信号、相关辨识法,主要介绍与系统辨识有关的基础知识,分析经典的辨识方法。第5章分析了辨识的最小二乘法,以及以最小二乘法为基础的辅助变量法、广义最小二乘法、增广最小二乘法、相关最小二乘法和多阶段最小二乘法等估计方法。第6章着重分析极大似然法、预报误差法、随机逼近法等参数估计方法以及各种递推算法。这些方法是系统辨识中常用的基本方法,是系统辨识的主要内容。第7章至第9章分别介绍系统阶次的辨识、闭环系统辨识、时间序列的建模分析。第10章至第13章分别介绍多变量系统辨识、非线性系统辨识、基于神经网络的系统辨识、小样本系统辨识。第14章介绍系统辨识技术在工程技术、生物医学和社会经济系统中的应用。本书讲述系统辨识的基本原理、方法,介绍了大量的工程应用实例、Matlab仿真实例、例题和习题,并附有Matlab系统辨识工具箱的介绍和上机实验说明。

阅读本书应具有自动控制原理、概率论和数理统计等方面的基础。

本书的编写过程受到了张金槐教授、邹逢兴教授、张湘平教授、吴美平教授、周宗潭教授、张明教授等的热情支持、关怀和指导。虞水俊副教授、宫二玲副教授、沈辉副教授、董国华副教授、刘亚东讲师、孙志强讲师、李明讲师的热情帮助、指导和对内容的完善。李龙、李晓龙、陈爽、王华、杜润乐、段中岳、李宝娟、吴昊、钟江等研究生也为本书提供了不少帮助。本书从系统性的角度出发,参考了国内外许多教材、专著和论文的研究成果和内容。在此,向他们一并表示诚挚的谢意。

由于水平有限,书中错误和不妥之处在所难免,敬请读者批评指正。

编 者

2010年12月于长沙

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 辨识的基本概念	1
1.2 系统辨识的研究目的	3
1.3 数学模型的分类	4
1.4 几种常见的数学模型的数学表示	5
1.5 辨识的步骤	10
思考题与习题	10
第 2 章 传递函数的辨识	12
2.1 传递函数辨识的时域法	12
2.2 传递函数辨识的频域法	20
思考题与习题	32
第 3 章 辨识的输入信号	34
3.1 白噪声及其产生方法	34
3.2 伪随机序列	38
3.3 连续型伪随机信号	48
思考题与习题	53
第 4 章 相关辨识法	54
4.1 连续时域相关分析法	54
4.2 利用 M 序列作输入信号的相关分析法	56
4.3 用脉冲响应求传递函数	62
思考题与习题	64
第 5 章 辨识的最小二乘法	66
5.1 最小二乘估计	66
5.2 最小二乘估计的统计性质	69
5.3 最小二乘递推算法	72
5.4 数据递推的饱和及解决办法	74
5.5 广义最小二乘法	77
5.6 增广最小二乘法	79
5.7 辅助变量法	82
5.8 相关最小二乘法	85
5.9 多阶段最小二乘法	89
5.10 最小二乘类辨识算法的比较	94
思考题与习题	95

第 6 章 极大似然法及其他辨识算法	97
6.1 极大似然法	97
6.2 预报误差法	105
6.3 随机逼近法	108
6.4 递推辨识算法的一般形式	112
6.5 测量数据含有异常值时的鲁棒辨识	113
6.6 递推参数估计算法的收敛性描述	115
6.7 辨识算法的比较	118
思考题与习题	119
第 7 章 系统阶次的辨识	121
7.1 根据 Hankel 矩阵判定模型的阶次	121
7.2 根据残差特性判定模型的阶次	122
7.3 确定阶的 AIC 准则	125
7.4 阶次增加时的参数递推估计算法	128
思考题与习题	129
第 8 章 闭环系统辨识	131
8.1 闭环系统的可辨识性条件	131
8.2 闭环系统的间接辨识法与可辨识性条件	133
8.3 闭环系统的直接辨识法	135
8.4 闭环系统切换调节器辨识	139
思考题与习题	141
第 9 章 时间序列的建模分析	143
9.1 时间序列模型的动态特性	143
9.2 时间序列建模	147
9.3 非平稳时序的处理方法	150
9.4 预报	152
思考题与习题	155
第 10 章 多变量系统辨识	157
10.1 多变量系统脉冲响应矩阵的辨识	157
10.2 多变量系统规范型及其转换	159
10.3 多变量系统子模型的辨识	161
10.4 多变量系统子模型辨识	165
10.5 状态空间子空间方法估计状态空间模型	165
思考题与习题	168
第 11 章 非线性系统辨识	169
11.1 非线性系统的表示	169
11.2 非线性稳态系统的参数估计	171
11.3 非线性动态系统辨识	173
11.4 Volterra 级数的辨识	174

11.5 Hammerstein 模型的辨识	175
思考题与习题	175
第 12 章 基于神经网络的系统辨识	176
12.1 人工神经网络基础	176
12.2 基于神经网络的线性系统辨识	186
12.3 基于神经网络非线性系统辨识	190
思考题与习题	196
第 13 章 小样本系统辨识	197
13.1 LKL 估计法	197
13.2 SSML 估计法	200
13.3 小样本系统的阶次估计	202
思考题与习题	207
第 14 章 系统辨识的应用	209
14.1 辨识在自适应控制中的应用	209
14.2 辨识在轧钢机械系统中的应用	212
14.3 辨识在机床切削自适应控制系统中的应用	215
14.4 辨识在化工系统中的应用	218
14.5 辨识在飞行器气动力参数辨识中的应用	222
14.6 建模分析方法在社会经济系统中的应用	225
14.7 辨识在生物医学工程中的应用	228
附录 A 系统辨识实验说明	233
实验 A1 利用相关分析法辨识脉冲响应函数	233
实验 A2 机床切削加工颤振模型的辨识	233
实验 A3 离散模型的参数与阶次的辨识	234
实验 A4 加热设备动态特性的辨识	236
实验 A5 PWM 驱动的电动机模型辨识	236
附录 B Matlab 系统辨识工具箱简介	239
参考文献	247

第1章 绪 论

系统辨识、状态估计和控制理论是现代控制论中相互渗透的三个领域。辨识和状态估计离不开控制理论的支持,控制理论的应用又几乎不能没有系统辨识和状态估计技术。随着控制对象复杂性的提高,控制理论的应用日益广泛,但它的实际应用不能脱离被控对象的数学模型。有些控制系统的数学模型可以用理论分析的方法推导出来,如导弹等飞行器运动的数学模型,一般可根据力学原理较准确地推导出来,但其模型参数在飞行过程中是变化的。为了实现自适应控制,在飞行器的飞行过程中,要不断地估计其模型参数。对化学生产过程、生物规律、药物反应或社会经济等问题进行定量分析时,也需要建立相应的数学模型。所谓系统辨识,就是研究如何确定系统的数学模型及其参数,它的理论正日趋成熟,其实际应用已遍及工程技术、认知科学、医学、生物信息学、社会学以及经济学等许多领域。

本章主要介绍辨识的一些基本概念,包括建模的方法、辨识的定义、模型的表达形式、辨识的内容和步骤等。

1.1 辨识的基本概念

1.1.1 模型的含义和表现形式

在自然科学和社会科学的许多领域中,人们越来越重视对系统进行定量的系统分析、系统综合、仿真、控制和预测。将被研究对象模型化,则是开展这些工作的前提和基础。所谓模型(model),就是把关于实际系统的本质的部分信息简缩成有用的描述形式。它可以用来描述系统的运动规律,是系统的一种客观写照或缩影,是分析系统和预报、控制系统行为特性的有力工具。

模型通常有如下的一些主要表现形式:

(1) 直觉模型。它是指系统的特性以非解析的形式直接储存在人脑中,靠人的直觉控制系统的变化。如司机靠直觉模型驾驶车辆,指挥员靠直觉模型指挥战斗等。

(2) 物理模型。它是根据相似原理把实际系统加以缩小的复制品,或者是实际系统的一种物理模拟。如沙盘、风洞、水力学模型、传热学模型、飞行转台、微波暗室,以及电力系统动态模拟等均是物理模型。

(3) 图表模型。它是用图形或表格形式来表现系统的特性。如阶跃响应、脉冲响应和频率响应等,也称为非参数模型。

(4) 数学模型。它用数学结构的形式来反映实际系统的行为特性。常用的有代数方程、微分方程、差分方程、状态方程,以及分布式参数方程等,又称为参数模型。

1.1.2 建立数学模型的基本方法

一般说来,建立系统的数学模型有两种基本方法。

1. 机理分析法

机理分析法即理论建模方法，它主要是通过分析系统的运动规律，运用一些已知的定律、定理和原理，如力学原理、能量守恒定律、传热学原理、化学动力学原理、生物学定律等，利用数学方法进行推导，建立系统的数学模型。

机理分析法只能用于较简单系统的建模，并且对系统的机理要有较清楚的了解。对于比较复杂的实际系统，这种建模方法有较大的局限性。这是因为在进行理论建模时，对所研究的对象必须提出合理的简化假定，否则会使问题过于复杂。但是，要使这些简化假设都符合实际情况往往是相当困难的。

2. 测试法

系统的输入输出信号一般总是可以测量的。由于系统的动态特性必然表现于这些输入输出数据中，故可以利用输入输出数据所提供的信息来建立系统的数学模型。所谓系统辨识，就是测试建模方法，即通过分析未知系统的实验或运行数据（输入输出数据），来建立一个与所测系统等价的数学模型。

与机理分析法相比，测试法的优点是不需深入了解系统的机理，不足之处是必须设计一个合理的实验以获取所需的最大信息量，而设计合理的实验往往是困难的。因此在具体建模时，常常将机理分析法和测试法这两种方法结合起来使用，机理已知的部分采用机理分析法，机理未知的部分采用测试法。

另外，建立数学模型时，一般需要遵循以下一些基本原则：

- (1) 建模的目的要明确，因为不同的建模目的可能采用不同的建模方法。
- (2) 模型的物理概念要明确。
- (3) 系统具有可辨识性，即模型结构合理，输入信号持续激励，数据量充足。
- (4) 符合节省原理，即被辨识模型参数的个数要尽量少。

1.1.3 系统辨识的定义

从以下不同时期不同学者对辨识的定义，可看出系统辨识技术的发展过程。

Zadeh (1962) 曾给辨识作如下定义：“辨识就是在输入和输出数据的基础上，从一组给定的模型中，确定一个与所测系统等价的模型。”这个定义明确了辨识的三大要素，即输入输出数据、模型类和等价原则。其中，数据是辨识的基础，准则是辨识的优化目标，模型类是寻找模型的范围。当然，按照 Zadeh 的定义，寻找一个与实际过程完全等价的模型无疑是非常困难的。从实用观点出发，对模型的要求并非如此苛刻。

P. Eykhoff (1974) 所作的定义：“辨识问题可以归结为用一个模型来表示客观系统（或将要构造的系统）本质特征的一种演算，并用这个模型把对客观系统的理解表示成有用的形式。”

V. Strejc (1974) 对该定义作了如下的解释：“这个辨识定义强调了一个非常重要的概念，最终模型只应表示动态系统的本质特征，并且把它表示成适当的形式。这就意味着，并不期望获得一个物理上实际的确切的数学描述，所要的只是一个适合于应用的模型。”

L. Ljung (1978) 所作的定义则更加实用：“辨识有三个要素，即数据、模型类和准则。辨识就是按照一个准则在一组模型类中选择一个与数据拟合得最好的模型。”L. Ljung 的定义为大家普遍接受，认为是对于系统辨识最确切的定义。

系统辨识是控制论的一个分支，系统辨识、状态估计、控制理论构成了现代控制论的三

大支柱。系统辨识的理论基础是数理统计学。

系统辨识的应用范围越来越广泛，这是由于各门科学的定量化所引起的，不仅是航空、航天、电力、化工、海洋工程等工程技术领域，还延伸到认知科学、生物信息学、医学工程、经济、社会、生态环境、水文、地质等各个学科。

1.2 系统辨识的研究目的

前面介绍了什么是模型，本节讨论为什么要建立被研究对象的数学模型。明确了建模的目的，对模型的要求、建立怎样形式的模型以及建立模型的方法等都会起着决定性的作用。模型化是进行系统分析、仿真、设计、预测、控制和决策的前提和基础。具体地说，建立被研究的系统的数学模型有以下几个方面的目的。

(1) 系统仿真。为了研究不同输入下系统的输出情况，最直接的方法是对系统本身进行实验。但实际上这往往是难以实现的，原因有多方面。例如，利用实际系统进行实验的费用太大；实验过程中系统可能会不稳定，从而实验过程带有一定的危险性；系统的时间常数值会相当大，以致实验周期太长。为此，需要建立系统的数学模型，利用模型模仿真实系统的特性或行为，从而间接地对系统进行仿真研究。

(2) 系统预测。不论在自然科学还是在社会科学领域，往往需要研究系统未来发展演变的规律和趋势。掌握了系统的演变规律和趋势，才可能预先作出决策，采取措施，控制系统中有关的变量。例如，启动或停闭某些机组，或者当预测到可能超越安全极限时采取紧急保护措施等。科学的定量预测大多采用模型法，首先建立所预测系统的数学模型，根据模型对系统中某些变量的未来状态进行预测。

(3) 系统设计和控制。在工程设计中，必须掌握系统中所包括的所有部件的特性或者子系统的特性。一项完善的设计，必须使系统各部件的特性与系统总体设计要求（如产量指标、误差、稳定性、安全性和可靠性等）相适应。为此，在设计中必须分析、考察系统各部分的特性以及各部分之间的相互作用和它们对总体系统特性的影响。显然，只有掌握了各部件和子系统的主要特征，建立了相应的数学模型，才能为系统的分析和设计提供基础，才可能根据系统特性设计控制器，按一定目标进行优化控制和系统决策。

(4) 系统分析。建立数学模型就是通过机理的分析或者通过实验、观测，将所研究的系统的主要特征及其主要变化规律表达出来，将所研究的系统中主要变量之间的关系比较集中地揭示出来，从而为分析该系统提供线索和依据。

(5) 故障诊断。许多复杂的系统，如导弹、飞机、核反应堆、大型化工和动力装置以及大型转动机械等，需要经常监视和检测可能出现的故障，以便及时排除故障。这表明必须不断地收集系统运行过程中的信息，推断过程动态特性的变化情况。然后，根据过程特性的变化情况判断故障是否已经发生、何时发生、故障大小以及故障的位置等。

(6) 验证机理模型。根据实验数据建立起系统的数学模型之后，将非常有利于理解所获得的实验数据，可以探索和分析不同的输入条件对该系统输出变量的影响，以检验所提出的理论，从而更全面地理解系统的动态行为。

从模型的应用目的可以看出，系统模型的最终用途对于建模的要求（模型的类型、模型的精度以及建模的速度等）有着决定性的影响。例如，用于系统分析和设计（如参数监测、故

障检测)的系统模型要比用于预报或控制的模型精度要高一些;用于最优控制的系统模型要比经典控制用的模型要求高得多。在建模速度上,用于分析、设计或预测的系统模型,不需要对建模速度提出特别的要求,可以进行离线的辨识,但对于在线控制的系统模型,尤其是在线自适应控制,要求有较高的建模速度。

1.3 数学模型的分类

数学模型的分类方法很多,常见的是按连续与离散、线性与非线性、定常与时变、集中参数与分布参数来分类,在自动控制原理等课程中已有详细介绍。还可按动态与静态、确定性与随机性、离线或在线等进行区分。

(1) 按提供的实验信息分:黑箱(black box)、灰箱(grey box)、白箱(white box)。

在系统的客观规律不清楚的情况下,称之为“黑箱”,只能从系统的实验中测量系统的外作用和响应数据,应用辨识方法建立系统的数学模型。如果已知系统满足某些基本定律,但又有些机理还不清楚,则称之为“灰箱”。如果系统的结构、组成和运动规律是已知的,适合于通过机理分析进行建模,则系统可以称为“白箱”。

(2) 从概率角度分:确定性的(deterministic)、随机性的(stochastic)。

由确定性模型所描述的系统,当状态确定之后,其输出响应是惟一确定的。而由随机性模型所描述的系统,当状态确定之后,其输出响应仍然是不确定的。

(3) 按模型与时间的关系分:静态的(static)、动态的(dynamic)。

静态模型用来描述系统处于稳态时(各状态变量的各阶导数为零)的各状态变量之间的关系,一般不是时间的函数。动态模型用来描述系统处于过渡过程时的各状态变量之间的关系,一般为时间的函数。

(4) 按时间刻度分:连续的(continuous)、离散的(discrete)。

用来描述连续系统的模型有微分方程、传递函数等。用来描述离散系统的模型有差分方程、状态方程等。

(5) 按参数与时间的关系分:定常的(time-invariant)、时变的(time-variant)。

定常系统的模型参数不随时间的变化而改变,而时变系统是指模型的参数随着时间的变化而改变的系統。

(6) 按参数与输入输出关系分:线性的(linear)、非线性的(non-linear)。

线性模型用来描述线性系统,其显著特点是满足叠加原理和均匀性。非线性模型用来描述非线性系统,一般不满足叠加原理。

(7) 按模型的表达形式分:参数的(parametric)、非参数的(non-parametric)。

采用推理的方法所建立的模型则总是一个参数模型,它可以由非参数模型转化而来,例如状态方程和差分方程。非参数模型是指从一个实际系统的实验过程中,直接地或间接地所获得的响应,是确定性的模型。例如阶跃响应、脉冲响应、频率响应都属于反映该系统动态特性的非参数模型。

(8) 按参数性质分:分布参数的(distributed parametric)、集中参数的(lumped parametric)。

当系统的状态参数是时间和空间的函数时,描述系统特性的状态方程为偏微分方程组,则系统称为分布参数系统。当系统的状态参数仅是时间的函数时,描述系统特性的状态方程组

为常微分方程组，系统称为集中参数系统。

(9) 按输入输出的个数分：单输入单输出 (SI/SO)、多输入多输出 (MI/MO)。

(10) 按模型的使用形式分：离线的 (off-line)、在线的 (on-line)、实时的 (time-update)、成批的 (group data process model, GDPM)。

对系统进行实验，获取全部记录数据之后，运用辨识算法对数据进行集中处理，以得到模型参数的估计值，这种方法称为离线辨识。而在线辨识时，需要事先知道模型的结构和阶次，当获得新的输入输出记录数据之后，就用递推辨识算法对原来的参数估计值进行修正，得到新的参数估计值。

1.4 几种常见的数学模型的数学表示

系统的数学模型可根据需要用不同的方式来描述，主要区分为连续系统和离散系统。根据研究方法的不同，还可区分为输入输出模型和状态空间模型。输入输出模型只刻画系统的外在特性而不深入到其内部，是一种广泛应用的描述方式。状态空间模型则深入研究系统的内部情况，因此它包含更多的信息，建模过程也要复杂些。

1. 脉冲响应函数

SI/SO 系统的离散脉冲响应函数是指当初始条件为零时，线性系统对于单位脉冲序列产生的输出响应。记为 $\{g(k)\}$, $k=0,1,2,\dots$ 。则在任意输入 $u(k)$ 的作用下，系统的输出表示为

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^k g(k-i)u(i) \quad (1.1)$$

引入时延因子 z ，即 $z^{-1}u(k) = u(k-1)$ ， z 也称为移位算子。则有

$$y(k) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} g(i)z^{-i} \right) u(k) \quad (1.2)$$

对于稳态系统

$$y(k) = \left(\sum_{i=0}^{N_s} g(i)z^{-i} \right) u(k) \quad (1.3)$$

上式称为滑动平均 (Moving Average) 模型，简称为 MA 模型，记

$$B(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{N_s} g(i)z^{-i} \quad (1.4)$$

对于随机系统，考虑噪声项的影响，则

$$y(k) = B(z^{-1})u(k) + e(k) \quad (1.5)$$

其中 $e(k)$ 为噪声项。

对于连续系统，脉冲响应函数是指当初始条件为零时，线性系统对于单位脉冲输入 Dirac- δ 函数产生的输出响应。

$$\int_{0-}^{0+} \delta(t)dt = 1 \quad (1.6)$$

则在任意输入 $u(t)$ 的作用下，系统的输出为脉冲响应函数 $g(t)$ 和 $u(t)$ 的卷积，即

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (1.7)$$

2. 线性差分方程

微分方程是连续系统最基本的一种模型，对应地，差分方程与离散系统也有同样的关系。动态的离散系统输入、输出采样值序列 $u(k)$ 和 $y(k)$ 之间的关系可以表示成如下的 n 阶线性差分方程

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_n u(k-n) \quad (1.8)$$

称为自回归滑动平均 (Auto-Regressive Moving Average) 模型，简称为 ARMA 模型。

对上式进行 z 变换，在零初始条件下输出变量的 z 变换与输入变量 z 变换之比，就是该离散系统的脉冲传递函数

$$G(z) = \frac{Z\{y(k)\}}{Z\{u(k)\}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \quad (1.9)$$

记

$$\begin{cases} A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n} \\ B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n} \end{cases}$$

则式 (1.8) 可写为

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) \quad (1.10)$$

对于随机系统，考虑噪声的影响，则有

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + e(k) \quad (1.11)$$

其中 $e(k)$ 为噪声项，可分为以下几种情况。

(1) MA 模型。

$$e(k) = C(z^{-1})\varepsilon(k) \quad (1.12)$$

其中 $C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_q z^{-q}$ ， $\varepsilon(k)$ 为白噪声。

(2) AR 模型。

$$D(z^{-1})e(k) = \varepsilon(k) \quad (1.13)$$

其中 $D(z^{-1}) = 1 + d_1 z^{-1} + \cdots + d_p z^{-p}$ 。

(3) ARMA 模型。

$$D(z^{-1})e(k) = C(z^{-1})\varepsilon(k) \quad (1.14)$$

控制系统随机差分模型主要有

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})\varepsilon(k) \quad (1.15)$$

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + \frac{1}{D(z^{-1})}\varepsilon(k) \quad (1.16)$$

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}\varepsilon(k) \quad (1.17)$$

式 (1.15)、式 (1.16) 和式 (1.17) 总称为 ARMAX 模型，也称为 CARMA (带控制量的 ARMA) 模型。

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}\varepsilon(k) \quad (1.18)$$

式 (1.18) 称为 Box-Jenkins 模型。

3. 状态空间模型

线性时不变连续系统的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.19)$$

其中 $x(t) \in R^{n \times 1}$ 是系统的状态变量; $y(t)$, $u(t)$ 分别表示输出量和输入量, A, B 和 C 是具有适当维数的矩阵, 分别称为系统矩阵、输入矩阵和输出矩阵。

系统式 (1.19) 的传递函数为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (1.20)$$

离散系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (1.21)$$

式中: $x(k) \in R^n$, $y(k) \in R^r$, $u(k) \in R^m$, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{r \times n}$; 系数矩阵 A, B, C 的参数个数分别为 $n \times n$, $n \times m$, $r \times n$ 。

式 (1.21) 对应的脉冲传递函数、单位脉冲响应和单位阶跃响应分别为

$$G(z^{-1}) = C(zI - A)^{-1}B \quad (1.22)$$

$$g(k) = CA^{k-1}B \quad (1.23)$$

$$h(k) = C \left[\sum_{j=0}^{k-1} A^j \right] B \quad (1.24)$$

系统的输入输出模型可以由状态空间模型惟一地确定, 但反过来则不然。系统的输入输出模型 (微分方程或传递函数) 可以变换成状态空间模型, 但其具体表达式并不惟一, 取决于状态向量的选择。一般要通过将状态方程转化为规范型, 使得状态方程的维数为最小实现。这时, 系统的参数个数最少, 更有利于系统辨识。如果系统是可控的和可观的, 只要选择适当变换矩阵, 就可将状态方程转化为规范型。辨识过程中为了确定惟一的模型, 应用规范型的状态空间模型。

(1) 变换矩阵。式 (1.21) 的系统完全可控的充分必要条件是系统的可控阵 T_c 满秩, 即 $\text{rank } T_c = n$, T_c 为

$$T_c = [B : AB : \cdots : A^{n-1}B] \quad (1.25)$$

系统完全可观的充分必要条件是系统的可观阵 T_o 满秩, 即 $\text{rank } T_o = n$, T_o 为

$$T_o = [C : A^T C : \cdots : (A^T)^{n-1} C]^T \quad (1.26)$$

系统的状态向量 x 经过上述的变换矩阵变换之后, 就可形成新的规范型状态方程。记 $\bar{x} = Tx$ 为新的状态向量, 其中 T 为变换矩阵, 它必须是非奇异的。则新的规范型状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} u \\ y = \bar{C} \bar{x} \end{cases} \quad (1.27)$$

$$\begin{cases} \bar{A} = TAT^{-1} \\ \bar{B} = TB \\ \bar{C} = CT^{-1} \end{cases} \quad (1.28)$$

变换矩阵选择不同的形式, 就可形成不同的规范型。

(2) 可控规范 I 型。变换矩阵取 $T = T_c L$, 其中 T_c 为上述的可控阵, L 阵为

$$L = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (1.29)$$

经过这样变换后的可控规范 I 型状态方程的系统矩阵 $\bar{A}_{c1}$ 、输入矩阵 $\bar{B}_{c1}$ 和观测矩阵 $\bar{C}_{c1}$ 分别为

$$\begin{cases} \bar{A}_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \\ \bar{B}_{c1} = [0 \ 0 \ \cdots \ 1]^T = T_c LB \\ \bar{C}_{c1} = [\bar{c}_{11} \ \bar{c}_{21} \ \cdots \ \bar{c}_{n1}] = CL^{-1}T_c^{-1} \end{cases} \quad (1.30)$$

式中: 下标 $c1$ 表示可控规范 I 型。

(3) 可控规范 II 型。变换矩阵取 $T = T_c$, 则经过变换后的可控规范 II 型状态方程的系统矩阵 $\bar{A}_{c2}$ 、输入矩阵 $\bar{B}_{c2}$ 和观测矩阵 $\bar{C}_{c2}$ 分别为

$$\begin{cases} \bar{A}_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & -a_n \\ 1 & & -a_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \\ \bar{B}_{c2} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T = T_c B \\ \bar{C}_{c2} = [\bar{c}_{12} \ \bar{c}_{22} \ \cdots \ \bar{c}_{n2}] = CT_c^{-1} \end{cases} \quad (1.31)$$

式中: 下标 $c2$ 表示可控规范 II 型。

(4) 可观规范 I 型。变换矩阵取 $T = T_o$, 其中 T_o 为上述的可观阵, 则经过变换后的可观规范 I 型状态方程的系统矩阵 $\bar{A}_{o1}$ 、输入矩阵 $\bar{B}_{o1}$ 和观测矩阵 $\bar{C}_{o1}$ 分别为

$$\begin{cases} \bar{A}_{o1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \\ \bar{B}_{o1} = [\bar{b}_{11} \ \bar{b}_{21} \ \cdots \ \bar{b}_{n1}]^T = T_o B \\ \bar{C}_{o1} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] = CT_o^{-1} \end{cases} \quad (1.32)$$

式中：下标 $o1$ 表示可观规范 I 型。

(5) 可观规范 II 型。变换矩阵取 $T = LT_o$ ，其中 L 为式 (1.29) 所示的矩阵，则经过变换后的可观规范 II 型状态方程的系统矩阵 $\bar{A}_{o2}$ 、输入矩阵 $\bar{B}_{o2}$ 和观测矩阵 $\bar{C}_{o2}$ 分别为

$$\begin{cases} \bar{A}_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & -a_n \\ 1 & & -a_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \\ \bar{B}_{o2} = [\bar{b}_{12} \quad \bar{b}_{22} \quad \cdots \quad \bar{b}_{n2}]^T = LT_o B \\ \bar{C}_{o2} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1] = CT_o^{-1} L^{-1} \end{cases} \quad (1.33)$$

式中：下标 $o2$ 表示可观规范 II 型。

以上各规范状态方程系数矩阵中的元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 均为原状态方程系统矩阵 A 的特征多项式的系数，即

$$\det(sI - A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \quad (1.34)$$

可以看到，规范状态方程所含的参数个数远少于非规范状态方程。对于单输入单输出系统来说，非规范状态方程的参数可达 $n^2 + 2n$ 个，而规范状态方程的参数仅为 $2n$ 个。

4. 数学模型之间的等价变换

在涉及系统的数学模型时，常常需要进行一些等价变换，以便以需要的方式来描述系统。不同的模型结构也对应于不同的系统辨识方法，所以，有时通过辨识得到的模型也需要进行转换。常常应用到的有同属于连续系统参数模型的微分方程、传递函数与频率响应特性、状态微分方程之间的转换关系，同属于离散系统参数模型的差分方程、脉冲传递函数与状态差分方程之间的转换关系。此外，还有参数模型与非参数模型之间的转换关系。这里仅简要介绍最常用的传递函数、状态微分方程和状态差分方程之间的转换关系。

(1) 传递函数转换为状态方程。设系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (1.35)$$

其相应的微分方程为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y + a_n y = b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} u + b_n u \quad (1.36)$$

将它转换为可控规范 I 型状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} u \\ y = \bar{C} \bar{x} \end{cases} \quad (1.37)$$

式中： $\bar{A}$ 、 $\bar{B}$ 、 $\bar{C}$ 为式 (1.30) 中 $\bar{A}_{cl}$ 、 $\bar{B}_{cl}$ 、 $\bar{C}_{cl}$ 的形式。

(2) 将状态方程离散化。设采样时间为 T_0 ，当采样时间很小时，可认为在一个采样周期内 $u(t)$ 保持不变，即

$$u(t) = u(kT_0), \quad kT_0 \leq t < (k+1)T_0 \quad (1.38)$$

离散化后的模型为

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (1.39)$$