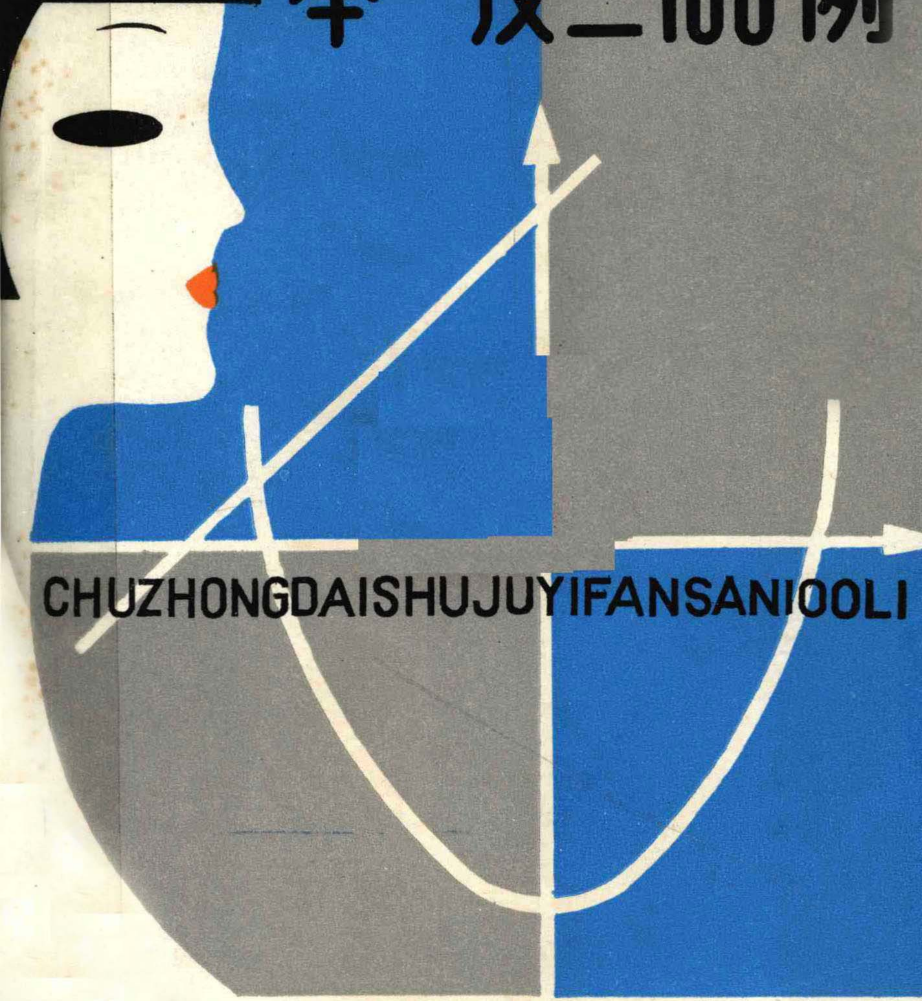
初中代数
举一反三100例



CHUZHONGDAISHUJUYIFANSAN100LI

新蕾出版社

“举一反三”丛书

初中代数举一反三100例

南人　北人　卫人

新蕾出版社

〔津〕新登字(90)004号

责任编辑：韩凤岐

举一反三丛书
初中代数举一反三100例
南人　北人　卫人
＊
新蕾出版社出版
天津新华印刷一厂印刷
新华书店天津发行所发行
开本787×1092毫米　1/32　印张8　字数160 000
1992年5月第1版　1992年5月第1次印刷
印数：1－15,000
ISBN 7-5307-0932-1/G·476（儿）
定价：2.80元

前　　言

数学是抽象灵活、千变万化的，仅仅指出下面一点就足以说明它：

只须少许的命题（公理、定理、公式等），即可得到无穷无尽的结论——其中大多数便成为习题。

要学好数学，当然要做习题，正因为此，不少人才觉得数学学习的艰辛。可面对浩瀚的题海，一个人往往不可能做完所有的练习；既便你有超人的智能和精力，哪怕你在毕生中去搜寻、演练。这样问题便提出来了：

人们如何通过部分习题的推演，去得到几乎与游弋题海同样的效果？这就需要数学教育工作者替青年创造条件，用自己的阅历（不管是成功的还是失败的），为青年们指出涉足数学奇境的经验——至少可使他们少走些弯路。

青年学生之所以觉得数学难以把握，大都是因为不会做习题而引起的，明明是一道似乎眼熟、又不很复杂的问题（只是稍稍改动某些习题的条件或结论）但却无从下手，症结在于他们学的过于死板，原因正是没能做到举一反三。

为了写好大楷，小学生们开始于描红，这对于书法学习是必要的一环，数学学习也应有此过程，当然数学学习又不同于书法习字，仅仅模仿是不够的，既要循序渐进，还要触类旁通、拓广创新（当然书法也须如此），此即为“举一反

三”。说得具体些：我们先分析一个例子，然后给几个练习，这些练习大都是可用例子的方法解决、或用例子中的公式去演算、或用例子中的结论去推证的，尽管看上去它们似乎并无干系——我们的工作也正是想道破它们之间的关联，这对学会如何去解数学问题无疑是重要的。

鉴于上面的想法，我们编写了这套书，当然，它仅仅是个尝试；我们也希望通过这套书，使读者能掌握数学的基本内容和方法。

效果若何？期待读者去品鉴了，

编　者

1990年秋

目　　录

一、数

内容概要

在初中阶段我们遇到的数包括：

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数（自然数）
      - 零
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数
      - 有限或无限循环小数
  - 无理数
    - 正无理数
    - 负无理数
    - 无限不循环小数
- 有限或无限循环小数、无限不循环小数：小数

求整数(式)和

求某些整数（式）和，往往带有一些技巧，即分组.它的分法妥当与否，关系着和的计算繁简，甚至能否算出结果.

例 求和 $1+2+3+4-5-6-7-8+9+10+11+12-\cdots-1989-1990-1991-1992$（每隔四个数变一次号）.

解 仔细观察后发现下面的分组法较简单：

$3+4-5-6-7-8+9+10=0$，

$11+12-13-14-15-16+17+18=0$,

……………………………………………

$1987+1988-1989-1990-1991-1992+1993+1994=0$.

在这些数和中与题设要计算的式子比较发现:

少1、2两项，多加了1993、1994两项．这样原数和为

$1+2-1993-1994=-3984$.

点析　本题关键在于从第3项起每8个数一组的分组法使其和为0，故可减少许多计算．别的分组法略繁(见习题)．直接求和显然不可取．

练　　习

1．按下面分组法计算例中的数和:

（1）从第一项起每八个数为一组;

（2）从第五项起每八个数为一组;

（3）从第三项起每四个数为一组;

你能否再给出其它的分组方法？并请比较一下优劣．

2．计算$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots+99^2-100^2$.

〔**提示**：从第一项或第二项起两两分组，且注意到$(a+1)^2-a^2=2a+1$．**答**：-5050〕

3．若$1+a+a^2=0$．求$a^{1980}+a^{1981}+a^{1982}+\cdots+a^{1999}+a^{2000}$.

〔**提示**：从第一项起每三项分为一组,注意提取公因式．**答**：0〕

4．在下面空格处（□处）填上适当的数（它们不大于10）使下面三个等式同时成立:

$1+6+\square+17+18+23=\square+3+11+13+21+22$； $1^2+6^2+\square^2+17^2+18^2+23^2=\square^2+3^2+11^2+13^2+21^2+22^2$；
$1^3+6^3+\square^3+17^3+18^3+23^3=\square^3+3^3+11^3+13^3+21^3+22^3$.

〔答：式左填 7，式右填 2〕

5.分别计算下面两组数：

1，6，7，23，24，30，38，47，54，55；

2，3，10，19，27，33，34，50，51，56.

的和、二次方和、三次方和、…、八次方和．你能发现什么结果？

〔答：它们的 1～8 次方和都相等，且分别为：285、11685、536085、26043813、1309753125、67334006805、3512261547765、185039471773893〕

6.完成下面的计算：

$$（1）\begin{cases} 123789+561945+642864 \\ 242868+323787+761943 \end{cases}$$

$$（2）\begin{cases} 123789^2+561945^2+642864^2 \\ 242868^2+323787^2+761943^2 \end{cases}$$

$$（3）\begin{cases} 23789+61945+42864 \\ 42868+23787+61943 \end{cases}$$

$$（4）\begin{cases} 23789^2+61945^2+42864^2 \\ 42868^2+23787^2+61943^2 \end{cases}$$

$$（5）\begin{cases} 3789+1945+2864 \\ 2868+3787+1943 \end{cases}$$

(6) $\begin{cases} 3789^2+1945^2+2864^2 \\ 2868^2+3787^2+1943^2 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 789+945+864 \\ 868+787+943 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} 789^2+945^2+864^2 \\ 868^2+787^2+943^2 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} 89+45+64 \\ 68+87+43 \end{cases}$

(10) $\begin{cases} 89^2+45^2+64^2 \\ 68^2+87^2+43^2 \end{cases}$

(11) $\begin{cases} 9+5+4 \\ 8+7+3 \end{cases}$

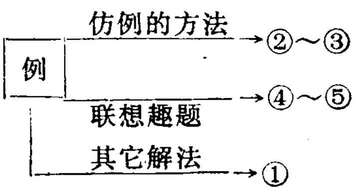
(12) $\begin{cases} 9^2+5^2+4^2 \\ 8^2+7^2+3^2 \end{cases}$

并总结你的发现。

〔答：①每组数和相等；②从第（3）组起，每组数均为上一组数中抹去左边最高位后余下数字组成的数。有趣的是：若从右边逐个抹去数字，也有上述结果〕

例与练习的关系

下面圆圈中数字表示练习题题号（后面不再一一说明）



求分数(式)和

例 求$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{19\times20}$的和。

解 由$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$，我们有

$$原式=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{20}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{19}+\frac{1}{19}-\frac{1}{20}$$

$$=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}.$$

点析 把“积”拆成“和”的目的，是能使相邻两项抵消掉,最终使计算变的简单。

当然，有时把“和”变成“积”也能简化运算，比如：

100减去它的$\frac{1}{2}$后，再减去它剩下数的$\frac{1}{3}$，再减去它剩下数的$\frac{1}{4}$；…当最后减去它剩下数的$\frac{1}{100}$后,剩下的数是几?

此题若用求差的方法不甚好算，但若化为积，易看出所求的数是

$$100\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{99}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)$$

$$= 100\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{98}{99}\times\frac{99}{100}$$

$$= 100\times\frac{1}{100}=1.$$

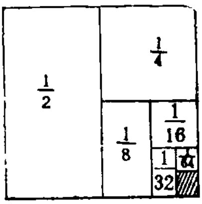
练　　习

1.求和$\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\frac{17}{16}+\frac{33}{32}+\frac{65}{64}$.

〔**提示**：把每个分数$\frac{m+1}{m}$拆成$1+\frac{1}{m}$.**答**：$6\frac{63}{64}$〕

注　等式$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$

有一个直观的几何解释如右图：其中大正方形边长为1，图中的数显然为该图形（正方形去掉阴影部分）之面积.上述和恰为1×1的正方形减去一个面积为$\frac{1}{64}$的小正方形后的面积.



2.求$\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\cdots+$

$$\frac{1}{(x+n-1)(x+n)}.$$

的和，这里n为自然数.

〔**提示**：$\frac{1}{(x+k-1)(x+k)}=\frac{1}{x+k-1}-\frac{1}{x+k}$.

答：$\dfrac{n-1}{(x+1)(x+n)}$〕

3.化简$\left(\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}+\dfrac{1}{x^2+7x+12}+\dfrac{1}{x^2+9x+20}\right)\cdot(x^2+6x+15)$．

〔**提示**：$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$等．**答**：4〕

4.计算$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}+\dfrac{1}{\sqrt{99}+10}$．

〔**提示**：$\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k}$．**答**：9〕

5.计算$\dfrac{1}{3-\sqrt{8}}-\dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$．

〔**提示**：仿习题4．**答**：5〕

6.若记$n!=1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n$，求$\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\dfrac{4}{5!}+\cdots+\dfrac{19}{20!}$的值．

〔**提示**：$\dfrac{n-1}{n!}=\dfrac{n}{n!}-\dfrac{1}{n!}=\dfrac{1}{(n-1)!}-\dfrac{1}{n!}$．

答：$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{20!}$〕

注　仿本习题解法可解答：

求　$1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+n\cdot n!$的和．