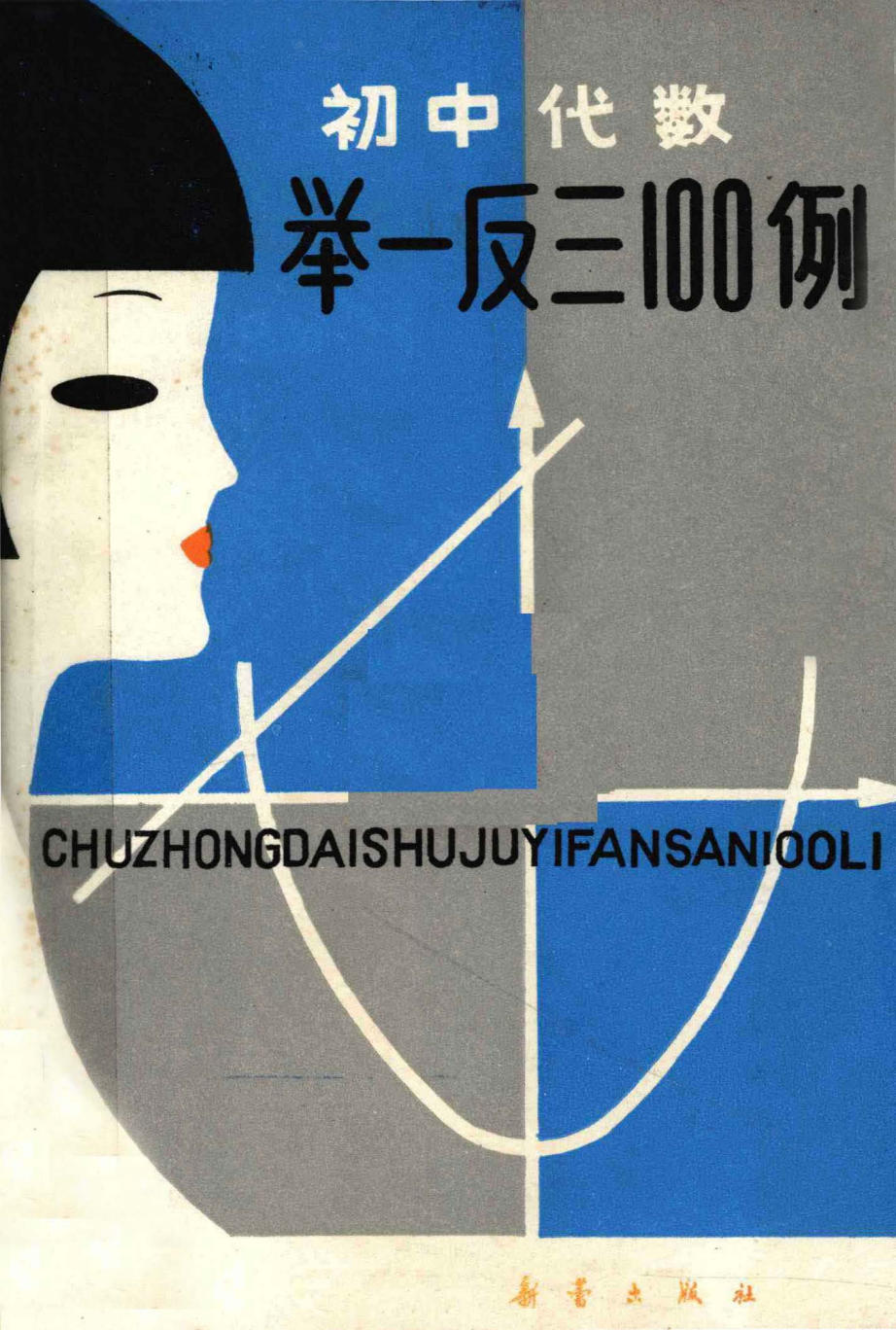




初中代数 举一反三100例

CHUZHONGDAISHUJUYIFANSANIOOLI

“举一反三”丛书

初中代数举一反三100例

南 人 北 人 卫 人

新 出 版 社

〔津〕新登字(90)004号

责任编辑：韩凤岐

举一反三丛书

初中代数举一反三100例

南 人 北 人 卫 人

*

新华书店出版

天津新华印刷一厂印刷

新华书店天津发行所发行

开本787×1092毫米 1/32 印张8 字数160 000

1992年5月第1版 1992年5月第1次印刷

印数：1—15,000

ISBN 7-5307-0932-1/G·476 (儿)

定 价：2.80元

前 言

数学是抽象灵活、千变万化的，仅仅指出下面一点就足以说明它：

只须少许的命题（公理、定理、公式等），即可得到无穷无尽的结论——其中大多数便成为习题。

要学好数学，当然要做习题，正因为此，不少人才觉得数学学习的艰辛。可面对浩瀚的题海，一个人往往不可能做完所有的练习；即便你有超人的智能和精力，哪怕你在毕生中去搜寻、演练。这样问题便提出来了：

人们如何通过部分习题的推演，去得到几乎与游弋题海同样的效果？这就需要数学教育工作者替青年创造条件，用自己的阅历（不管是成功的还是失败的），为青年们指出涉足数学奇境的经验——至少可使他们少走些弯路。

青年学生之所以觉得数学难以把握，大都是因为不会做习题而引起的，明明是一道似乎眼熟、又不很复杂的问题（只是稍稍改动某些习题的条件或结论）但却无从下手，症结在于他们学的过于死板，原因正是没能做到举一反三。

为了写好大楷，小学生们开始于描红，这对于书法学习是必要的一环，数学学习也应有此过程，当然数学学习又不同于书法习字，仅仅模仿是不够的，既要循序渐进，还要触类旁通，拓广创新（当然书法也须如此），此即为“举一反三”。

三”。说得具体些：我们先分析一个例子，然后给几个练习，这些练习大都是可用例子的方法解决、或用例子中的公式去演算、或用例子中的结论去推证的，尽管看上去它们似乎并无干系——我们的工作也正是想道破它们之间的关联，这对学会如何去解数学问题无疑是重要的。

鉴于上面的想法，我们编写了这套书，当然，它仅仅是个尝试；我们也希望通过这套书，使读者能掌握数学的基本内容和方法。

效果若何？期待读者去品鉴了。

编 者

1990年秋

目 录

一、数	1
求整数（式）和	1
求分数（式）和	5
求积	8
有理数四则运算（一）	10
有理数四则运算（二）	12
有理数四则运算（三）	14
二、代数式	16
整式的加减	16
整式的乘法（一）	18
整式的乘法（二）	19
整式的除法	20
分离系数法做加减	22
分离系数法做乘法	23
分离系数法做除法	26
平方和	27
立方和	28
巧用公式求值（一）	30
巧用公式求值（二）	33
绝对值计算	35

非负数 (一)	37
非负数 (二)	40
因式分解	41
(1) 提取公因式法	42
(2) 公式法	44
(3) 二次三项式的因式分解法	46
(4) 分组分解法	48
(5) 拆项法 (一)	50
(6) 拆项法 (二)	52
(7) 待定系数法	53
(8) 余数定理法	55
因式分解的应用	57
(1) 在数运算上的应用	57
(2) 求多项式值	60
(3) 分式化简	62
(4) 分式求值	64
比例的性质	67
待定系数法 (一)	69
待定系数法 (二)	71
三、方程与方程组	75
一元一次方程	75
分式方程	77
一元二次方程	79
可化为一元二次方程的方程	81
方程组	85
方程 (组) 的应用	89

(1) 工程问题	89
(2) 行程问题	93
(3) 百分率问题	99
(4) 数字问题	102
(5) 几何问题	103
判别式应用	105
(1) 判断方程的根	105
(2) 三角形问题	107
(3) 分解因式	109
(4) 解不等式	110
韦达定理应用	112
(1) 方程与根	112
(2) 求根的代数式	114
(3) 三角形问题	117
四、幂与根式	121
幂的运算	121
指数运算求值	123
指数的运算性质	124
指数比较大小	126
幂的和与积	127
实数的计算	129
同类项、同类根式	131
根式化简 (一)	133
根式化简 (二)	135
根式化简 (三)	137
根式化简 (四)	141

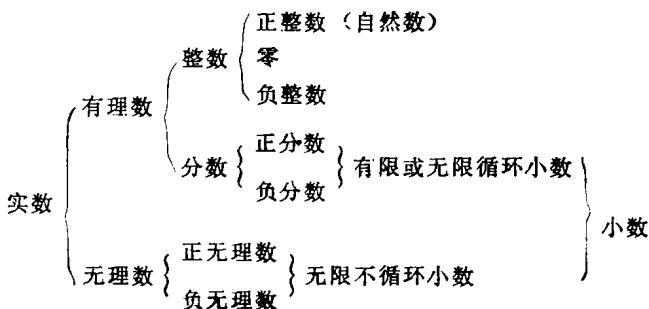
五、对数	143
对数的计算 (一)	143
对数换底	146
对数的计算 (二)	147
(1) 对数证明问题	149
(2) 常用对数	150
六、函数与图象	153
平面直角坐标系	153
定比分点公式	155
函数表达式	157
函数定义域	158
函数的奇偶性	160
一元一次函数图象	162
一元二次函数图象	165
反比例函数及图象	170
函数极值问题解法	171
(1) 利用不等式	171
(2) 利用几何、三角知识	174
(3) 利用二次函数性质	176
七、不等式	181
一元一次不等式	181
绝对值不等式	183
一元二次不等式	184
不等式组及分式不等式	188
比较大小	191
八、三角函数与解三角形	195

化简与求值	196
$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ 的应用	198
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 的应用	199
求三角函数值	201
解直角三角形	204
解斜三角形	205
正、余弦定理的应用	209
解三角形的应用	212
(1) 航海问题	212
(2) 测量问题	215
九、统计初步	218
平均数、方差	218
附录	
一、数学解题步骤	222
二、选举题的解法	223
(1) 直接法 (常规法)	223
(2) 筛选法 (排除法)	228
(3) 特例法	232
(4) 验证法	237
(5) 图象 (解) 法	241
附记	244

一、数

内容概要

在初中阶段我们遇到的数包括：



求整数(式)和

求某些整数(式)和, 往往带有一些技巧, 即分组. 它的分法妥当与否, 关系着和的计算繁简, 甚至能否算出结果.

例 求和 $1 + 2 + 3 + 4 - 5 - 6 - 7 - 8 + 9 + 10 + 11 + 12 - \cdots - 1989 - 1990 - 1991 - 1992$ (每隔四个数变一次号)。

解 仔细观察后发现下面的分组法较简单:

$$3 + 4 - 5 - 6 - 7 - 8 + 9 + 10 = 0,$$

$$11 + 12 - 13 - 14 - 15 - 16 + 17 + 18 = 0,$$

.....

$$1987 + 1988 - 1989 - 1990 - 1991 - 1992 + 1993 + 1994 = 0.$$

在这些数和中与题设要计算的式子比较发现:

少 1、2 两项, 多加了 1993、1994 两项. 这样原数和为
 $1 + 2 - 1993 - 1994 = -3984.$

点析 本题关键在于从第 3 项起每 8 个数一组的分组法使其和为 0, 故可减少许多计算. 别的分组法略繁(见习题). 直接求和显然不可取.

练 习

1. 按下面分组法计算例中的数和:

(1) 从第一项起每八个数为—组,

(2) 从第五项起每八个数为—组,

(3) 从第三项起每四个数为—组,

你能否再给出其它的分組方法? 井請比较—下优劣.

2. 计算 $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \cdots + 99^2 - 100^2$.

[提示: 从第一项或第二项起两两分组, 且注意到 $(a+1)^2 - a^2 = 2a+1$. 答: -5050]

3. 若 $1 + a + a^2 = 0$. 求 $a^{1980} + a^{1981} + a^{1982} + \cdots + a^{1999} + a^{2000}$.

[提示: 从第一项起每三项分为—组, 注意提取公因式.
 答: 0]

4. 在下面空格处(□处)填上适当的数(它们不大于 10)使下面三个等式同时成立:

$$1 + 6 + \square + 17 + 18 + 23 = \square + 3 + 11 + 13 + 21 + 22; \quad 1^2 + 6^2 + \square^2 + 17^2 + 18^2 + 23^2 = \square^2 + 3^2 + 11^2 + 13^2 + 21^2 + 22^2;$$

$$1^3 + 6^3 + \square^3 + 17^3 + 18^3 + 23^3 = \square^3 + 3^3 + 11^3 + 13^3 + 21^3 + 22^3.$$

〔答：式左填 7，式右填 2〕

5. 分别计算下面两组数：

1, 6, 7, 23, 24, 30, 38, 47, 54, 55;

2, 3, 10, 19, 27, 33, 34, 50, 51, 56.

的和、二次方和、三次方和、…、八次方和，你能发现什么结果？

〔答：它们的 1 ~ 8 次方和都相等，且分别为：285、11685、536085、26043813、1309753125、67334006805、3512261547765、185039471773893〕

6. 完成下面的计算：

$$(1) \begin{cases} 123789 + 561945 + 642864 \\ 242868 + 323787 + 761943 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 123789^2 + 561945^2 + 642864^2 \\ 242868^2 + 323787^2 + 761943^2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 23789 + 61945 + 42864 \\ 42868 + 23787 + 61943 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 23789^2 + 61945^2 + 42864^2 \\ 42868^2 + 23787^2 + 61943^2 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} 3789 + 1945 + 2864 \\ 2868 + 3787 + 1943 \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} 3789^2 + 1945^2 + 2864^2 \\ 2868^2 + 3787^2 + 1943^2 \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} 789 + 945 + 864 \\ 868 + 787 + 943 \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} 789^2 + 945^2 + 864^2 \\ 868^2 + 787^2 + 943^2 \end{cases}$$

$$(9) \begin{cases} 89 + 45 + 64 \\ 68 + 87 + 43 \end{cases}$$

$$(10) \begin{cases} 89^2 + 45^2 + 64^2 \\ 68^2 + 87^2 + 43^2 \end{cases}$$

$$(11) \begin{cases} 9 + 5 + 4 \\ 8 + 7 + 3 \end{cases}$$

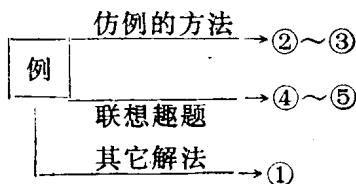
$$(12) \begin{cases} 9^2 + 5^2 + 4^2 \\ 8^2 + 7^2 + 3^2 \end{cases}$$

并总结你的发现。

〔答：①每组数和相等；②从第（3）组起，每组数均为上一组数中抹去左边最高位后余下数字组成的数。有趣的是：若从右边逐个抹去数字，也有上述结果〕

例与练习的关系

下面圆圈中数字表示练习题题号（后面不再一一说明）



求分数(式)和

例 求 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{19 \times 20}$ 的和。

解 由 $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, 我们有

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \\ &= 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}.\end{aligned}$$

点析 把“积”拆成“和”的目的, 是能使相邻两项抵消, 最终使计算变的简单。

当然, 有时把“和”变成“积”也能简化运算, 比如:

100 减去 它的 $\frac{1}{2}$ 后, 再减去它剩下数的 $\frac{1}{3}$, 再减去它剩下数的 $\frac{1}{4}$, $\cdots$ 当最后减去它剩下数的 $\frac{1}{100}$ 后, 剩下的数是几?

此题若用求差的方法不甚好算, 但若化为积, 易看出所求的数是

$$\begin{aligned}&100 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \cdots \times \\ &\left(1 - \frac{1}{99}\right) \left(1 - \frac{1}{100}\right)\end{aligned}$$

$$= 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{98}{99} \times \frac{99}{100}$$

$$= 100 \times \frac{1}{100} = 1.$$

练 习

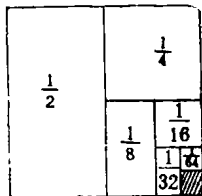
1. 求和 $\frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \frac{17}{16} + \frac{33}{32} + \frac{65}{64}$.

〔提示：把每个分数 $\frac{m+1}{m}$ 拆成 $1 + \frac{1}{m}$. 答： $6\frac{63}{64}$ 〕

注 等式 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

有一个直观的几何解释如右图：

其中大正方形边长为 1，图中的数显然为该图形（正方形去掉阴影部分）之面积。上述和恰为 1×1 的正方形减去一个面积为 $\frac{1}{64}$ 的小正方形后的面积。



2. 求 $\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \cdots +$

$$\frac{1}{(x+n-1)(x+n)}.$$

的和，这里 n 为自然数。

〔提示： $\frac{1}{(x+k-1)(x+k)} = \frac{1}{x+k-1} - \frac{1}{x+k}$. 〕

答: $\frac{n-1}{(x+1)(x+n)}$

3. 化简 $\left(\frac{1}{x^3+3x+2} + \frac{1}{x^3+5x+6} + \frac{1}{x^3+7x+12} + \frac{1}{x^3+9x+20} \right) \cdot (x^2+3x+15)$.

[提示: $x^3+3x+2=(x+1)(x+2)$ 等. 答: 4]

4. 计算 $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+10}$.

[提示: $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k}$. 答: 9]

5. 计算 $\frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$.

[提示: 仿习题4. 答: 5]

6. 若记 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$, 求 $\frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \cdots + \frac{19}{20!}$ 的值.

[提示: $\frac{n-1}{n!} = \frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$.

答: $\frac{1}{2} - \frac{1}{20!}$]

注 仿本习题解法可解答:

求 $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n!$ 的和.