

21 世纪 高 职 高 专 数 学 系 列 教 材

微积分

霍曙光 陈美珍 主编

W E I J I F E N

华中科技大学出版社

21 世纪高职高专数学系列教材

微 积 分

| | | |
|-----|-----|-----|
| 主 编 | 霍曙光 | 陈美珍 |
| 副主编 | 周 凡 | 刘 娟 |
| 主 审 | 周晓慧 | 李国裕 |

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分/霍曙光 陈美珍 主编

武汉:华中科技大学出版社,2005年8月

ISBN 7-5609-3409-9

I. 微…

II. ①霍… ②陈…

III. 微积分-高等学校-教材

IV. O172

微积分

霍曙光 陈美珍 主编

策划编辑:徐正达

责任编辑:徐正达 叶见欣

责任校对:陈 骏

封面设计:刘 卉

责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司

印 刷:武汉市新华印刷有限责任公司

开本:850×1168 1/32 印张:8.625 字数:210 000

版次:2005年8月第1版 印次:2005年8月第1次印刷 定价:15.00元

ISBN 7-5609-3409-9/O·353

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 提 要

本书是“21世纪高职高专系列教材”之一,全书分为8章,内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数与微分的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、多元微积分等,带“*”的部分供选用.每章附有难度不等的习题,并在书末提供了参考答案.附录中提供了常用的数学公式.

本书适合作为高职高专各专业的教材,也可供自学者使用.

为方便师生学习和使用本书,还有专用配套辅导教材《微积分学习辅导》.

前 言

为了适应高职高专教学改革的新形势,落实教育部关于高职高专高等数学课程教学的基本要求,根据“必需、够用”的原则,我们编写了这本《微积分》及配套的辅导教材《微积分学习辅导》。

本教材是 21 世纪高职高专数学系列教材之一,内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数与微分的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、多元微积分等 8 章。

本书遵循数学教学的基本规律,简略了不必要的理论推导,重点放在实际应用、综合训练方面;在叙述中力求简明易懂,深入浅出;所选例题和习题突出基础知识、基本技能、基本方法的运用,题号前有符号“*”的题目,表示有一定难度或是属于选学内容;解答注重思想方法、思路分析、思维训练的提高,以期为学生以后的继续学习打下坚实的基础。

本教材由霍曙光、陈美珍担任主编,周凡、刘娟担任副主编,周晓慧、李国裕担任主审,全书由霍曙光统稿。

本教材的出版得到湖北省高职高专数学研究会的充分肯定。在编写过程中,湖北城市建设职业技术学院的领导和教务处给予了热情的关心,数学教研室的全体同志都给予了大力支持,在此一并表示衷心的感谢。

限于编者水平,书中差错在所难免,欢迎读者批评指正。

编 者

2005 年 5 月

目 录

| | |
|--------------------------|--------|
| 第 1 章 函数 | (1) |
| 1.1 函数及其性质 | (1) |
| 1.1.1 函数的概念 | (1) |
| 1.1.2 函数的几种特性 | (4) |
| 1.1.3 反函数 | (5) |
| 习题 1-1 | (5) |
| 1.2 初等函数 | (6) |
| 1.2.1 基本初等函数 | (6) |
| 1.2.2 复合函数 | (7) |
| 1.2.3 初等函数 | (7) |
| 习题 1-2 | (8) |
| 第 2 章 极限与连续 | (9) |
| 2.1 极限的定义 | (9) |
| 2.1.1 函数的极限 | (9) |
| 2.1.2 数列的极限 | (12) |
| 2.1.3 极限的性质 | (14) |
| 2.1.4 无穷小 | (15) |
| 2.1.5 无穷大 | (17) |
| 习题 2-1 | (19) |
| 2.2 极限的运算 | (19) |
| 2.2.1 极限运算法则 | (19) |
| 2.2.2 两个重要极限 | (22) |
| 2.2.3 无穷小的比较 | (24) |
| 习题 2-2 | (26) |
| 2.3 函数的连续性 | (27) |
| 2.3.1 函数的连续性定义 | (27) |
| 2.3.2 初等函数的连续性 | (29) |
| 2.3.3 闭区间上连续函数的性质 | (30) |

| | | |
|--------------|-----------------------|-------------|
| | 习题 2-3 | (32) |
| 第 3 章 | 导数与微分 | (33) |
| 3.1 | 导数的概念..... | (33) |
| 3.1.1 | 两个实例 | (33) |
| 3.1.2 | 导数的定义 | (35) |
| 3.1.3 | 导数的几何意义 | (38) |
| 3.1.4 | 函数的可导性与连续性的关系 | (39) |
| | 习题 3-1 | (40) |
| 3.2 | 初等函数的求导问题 | (40) |
| 3.2.1 | 基本初等函数的导数公式 | (41) |
| 3.2.2 | 导数的四则运算法则 | (44) |
| 3.2.3 | 复合函数的求导法则 | (46) |
| 3.2.4 | 反函数的求导法则 | (49) |
| 3.2.5 | 隐函数求导法 | (51) |
| 3.2.6 | 参数方程确定的函数的求导法 | (53) |
| | 习题 3-2 | (54) |
| 3.3 | 高阶导数 | (56) |
| 3.3.1 | 高阶导数的定义 | (56) |
| 3.3.2 | n 阶导数公式 | (58) |
| | 习题 3-3 | (60) |
| 3.4 | 函数的微分..... | (60) |
| 3.4.1 | 微分的定义 | (60) |
| 3.4.2 | 微分的几何意义 | (62) |
| 3.4.3 | 微分的计算 | (63) |
| | 习题 3-4 | (65) |
| 第 4 章 | 导数与微分的应用 | (67) |
| 4.1 | 微分中值定理 | (67) |
| 4.1.1 | 罗尔定理 | (67) |
| 4.1.2 | 拉格朗日中值定理 | (68) |
| 4.1.3 | 柯西中值定理 | (70) |
| | 习题 4-1 | (70) |

| | | |
|-------|------------------------------|-------|
| 4.2 | 洛必达法则 | (71) |
| 4.2.1 | $\frac{0}{0}$ 型未定式 | (71) |
| 4.2.2 | $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 | (72) |
| 4.2.3 | 其他未定式 | (73) |
| | 习题 4-2 | (75) |
| 4.3 | 函数单调性的判别 | (75) |
| | 习题 4-3 | (78) |
| 4.4 | 函数的极值及其求法 | (79) |
| | 习题 4-4 | (83) |
| 4.5 | 函数的最大值与最小值 | (83) |
| | 习题 4-5 | (86) |
| 4.6 | 曲线的凹凸与拐点 | (87) |
| 4.6.1 | 曲线的凹凸定义和判定法 | (88) |
| 4.6.2 | 拐点的定义和求法 | (89) |
| | 习题 4-6 | (91) |
| 4.7 | 函数图像的描绘 | (91) |
| 4.7.1 | 曲线的水平渐近线和垂直渐近线 | (92) |
| 4.7.2 | 函数图像的描绘 | (93) |
| | 习题 4-7 | (97) |
| * 4.8 | 曲线的曲率 | (97) |
| 4.8.1 | 弧微分 | (98) |
| 4.8.2 | 曲率的概念 | (99) |
| 4.8.3 | 曲率的计算公式 | (101) |
| 4.8.4 | 曲率圆与曲率半径 | (103) |
| | 习题 4-8 | (104) |
| 4.9 | 微分在近似计算及误差估计中的应用 | (104) |
| 4.9.1 | 近似计算 | (104) |
| 4.9.2 | 误差估计 | (106) |
| | 习题 4-9 | (108) |
| 4.10 | 微分在经济学中的应用 | (108) |

| | | |
|--------------|--------------------------|-------|
| | 4.10.1 经济学中常见的几个函数 | (108) |
| | 4.10.2 边际概念 | (113) |
| | 4.10.3 函数的弹性 | (114) |
| | 4.10.4 极值应用问题 | (117) |
| | 习题 4-10 | (123) |
| 第 5 章 | 不定积分 | (125) |
| 5.1 | 不定积分的定义与性质 | (125) |
| 5.1.1 | 原函数 | (125) |
| 5.1.2 | 不定积分的定义 | (127) |
| 5.1.3 | 不定积分的几何意义 | (128) |
| 5.1.4 | 不定积分的性质 | (129) |
| | 习题 5-1 | (130) |
| 5.2 | 不定积分的计算方法 | (131) |
| 5.2.1 | 直接积分法 | (131) |
| | 习题 5-2(一) | (133) |
| 5.2.2 | 换元积分法 | (134) |
| | 习题 5-2(二) | (147) |
| 5.2.3 | 分部积分法 | (149) |
| | 习题 5-2(三) | (154) |
| * 5.3 | 几种特殊类型函数的积分 | (155) |
| 5.3.1 | 有理函数的积分 | (155) |
| 5.3.2 | 三角函数有理式的积分 | (161) |
| 5.3.3 | 简单无理函数的积分 | (163) |
| | 习题 5-3 | (164) |
| 5.4 | 积分表的使用 | (165) |
| | 习题 5-4 | (167) |
| 第 6 章 | 定积分 | (168) |
| 6.1 | 定积分的概念 | (168) |
| 6.1.1 | 引例 | (168) |
| 6.1.2 | 定积分的概念 | (170) |
| 6.1.3 | 定积分的几何意义 | (171) |

| | | |
|--------------|-----------------------|--------------|
| 6.1.4 | 定积分的性质 | (172) |
| | 习题 6-1 | (173) |
| 6.2 | 微积分基本公式 | (173) |
| 6.2.1 | 变上限的定积分 | (173) |
| 6.2.2 | 微积分的基本公式 | (175) |
| | 习题 6-2 | (176) |
| 6.3 | 定积分的积分方法 | (176) |
| 6.3.1 | 定积分的换元法 | (177) |
| 6.3.2 | 定积分的分部法 | (179) |
| | 习题 6-3 | (180) |
| * 6.4 | 广义积分 | (180) |
| 6.4.1 | 无穷区间上的广义积分 | (180) |
| 6.4.2 | 被积函数有无穷间断点的广义积分 | (182) |
| | 习题 6-4 | (183) |
| 第 7 章 | 定积分的应用 | (185) |
| 7.1 | 定积分的几何应用 | (185) |
| 7.1.1 | 定积分应用的微元法 | (185) |
| 7.1.2 | 定积分在几何上的应用 | (187) |
| | 习题 7-1 | (193) |
| 7.2 | 定积分的物理应用 | (193) |
| 7.2.1 | 功 | (193) |
| 7.2.2 | 液体内部的压力 | (195) |
| 7.2.3 | 转动惯量 | (196) |
| | 习题 7-2 | (197) |
| * 7.3 | 定积分在经济学中的应用 | (197) |
| | 习题 7-3 | (199) |
| 第 8 章 | 多元微积分 | (200) |
| 8.1 | 多元函数的基本概念 | (200) |
| 8.1.1 | 空间直角坐标系 | (200) |
| 8.1.2 | 多元函数的概念 | (202) |
| 8.1.3 | 二元函数的极限及连续性 | (203) |

| | | |
|------|------------------------------|-------|
| | 习题 8-1 | (205) |
| 8.2 | 偏导数与全微分 | (205) |
| | 8.2.1 偏导数 | (205) |
| | 8.2.2 全微分 | (207) |
| | 习题 8-2 | (210) |
| 8.3 | 二元复合函数与隐函数的微分法 | (211) |
| | 8.3.1 复合函数的微分法 | (211) |
| | 8.3.2 隐函数的微分法 | (213) |
| | 习题 8-3 | (214) |
| 8.4 | 二元函数的极值 | (215) |
| | 8.4.1 二元函数的极值 | (215) |
| | 8.4.2 二元函数的最大值与最小值 | (217) |
| | 8.4.3 条件极值问题 | (219) |
| | 习题 8-4 | (221) |
| 8.5 | 重积分 | (221) |
| | 8.5.1 二重积分的概念 | (221) |
| | 8.5.2 二重积分的性质 | (223) |
| | 8.5.3 二重积分算法 | (224) |
| | 习题 8-5 | (228) |
| 8.6 | 重积分的应用 | (229) |
| | 8.6.1 重积分的几何应用 | (229) |
| | 8.6.2 重积分的力学应用——求薄片的重心 | (232) |
| | 习题 8-6 | (233) |
| 附录 A | 常用数学公式 | (234) |
| 附录 B | 基本初等函数导数与微分公式表 | (241) |
| 附录 C | 基本积分公式 | (242) |
| 附录 D | 简易积分表 | (244) |
| | 习题参考答案 | (256) |

第 1 章 函 数

大千世界无不处在运动、变化和发展中. 由于社会生产力发展的需要, 运动变化就成为自然科学研究的主题之一. 在各种变化过程中对变量间依赖关系的研究产生了函数概念. 函数是描述运动变化中变量间相依关系的数学模型, 其基本思想是通过某一事实的信息去推知另一信息.

1.1 函数及其性质

1.1.1 函数的概念

在17世纪之前, 函数一直都是用公式表示的. 直到1873年才由德国数学家狄利克雷(1805—1859)抽象出直至今日仍为人们易于接受并且较为合理的函数概念.

1. 函数的定义

定义1 设有两个变量 x 和 y , 若当变量 x 在实数的某一范围 D 内, 任意取定一个数值时, 变量 y 按照一定的规律 f , 有惟一确定的值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作

$$y=f(x) \quad (x \in D).$$

其中变量 x 称为自变量, 变量 y 称为函数(或因变量). 自变量的取值范围 D 称为函数的定义域.

若对于确定的 $x_0 \in D$, 通过对应规律 f , 函数 y 有惟一确定的值 y_0 与之对应, 则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值, 记作

$$y=f(x)|_{x=x_0}=f(x_0).$$

所有函数值的集合称为函数的值域, 记作 M .

若函数在某个区间上的每一点都有定义,则称这个函数在该区间上有定义.

2. 函数的两个要素

函数的对应规律和定义域是函数的两个要素.

(1) 对应规律

例1 设函数 $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, 求其对应规律.

解 $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ 是一个特定的函数, f 确定的对应规律为

$$f(\quad) = 2(\quad)^2 + 3(\quad) - 1.$$

例2 设 $y = f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$, 求 $f\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

解 $y|_{x=2/\pi} = f\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

例3 设 $f(x+1) = x^2 - 3x$, 求 $f(x)$.

解 令 $x+1=t$, 则 $x=t-1$, 所以

$$f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) = t^2 - 5t + 4,$$

故

$$f(x) = x^2 - 5x + 4.$$

(2) 定义域

使函数有定义的自变量的取值范围称为函数的定义域.

例4 求函数 $y = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin \frac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解 这是两个函数之和的定义域, 先分别求出每个函数的定义域, 然后求其公共部分即可. $\sqrt{x^2 - x - 6}$ 的定义域必须满足 $x^2 - x - 6 \geq 0$, 即

$$(x-3)(x+2) \geq 0,$$

解得

$$x \geq 3 \quad \text{或} \quad x \leq -2.$$

而 $\arcsin \frac{2x-1}{7}$ 的定义域是 $\left| \frac{2x-1}{7} \right| \leq 1$, 即

$$-7 \leq 2x-1 \leq 7,$$

解得

$$-3 \leq x \leq 4.$$

这两个函数的定义域的公共部分是

$$-3 \leq x \leq -2, \quad 3 \leq x \leq 4,$$

于是, 所求函数的定义域是

$$-3 \leq x \leq -2, \quad 3 \leq x \leq 4,$$

即

$$[-3, -2], \quad [3, 4].$$

例5 比较函数 $y = \ln x^2$ 与 $y = 2 \ln x$, $w = \sqrt{u}$ 与 $y = \sqrt{x}$ 是否为相同函数.

解 由函数的要素知, $y = \ln x^2$ 与 $y = 2 \ln x$ 不是相同的函数, 而 $w = \sqrt{u}$ 与 $y = \sqrt{x}$ 则是相同的函数.

(3) 函数的记号

设 y 是 x 的函数, 则可以记作 $y = f(x)$, 也可以记作 $y = \varphi(x)$ 或 $y = F(x)$ 等, 但同一函数在讨论中应取定一种记法, 同一问题中涉及多个函数时, 则应取不同的记号分别表示它们各自的对应规律.

(4) 函数的表示法

函数可以用至少三种不同的方法来表示: 表格法、图形法和解析法.

例6 据统计, 某地9月19日至29日每天的最高气温如表1-1所示.

表 1-1

| | | | | | | | | | | | |
|--------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 日期(9月) | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 最高气温/ $^{\circ}\text{C}$ | 28 | 28 | 27 | 25 | 24 | 26 | 27 | 25 | 23 | 22 | 21 |

表1-1确实表达了温度是日期的函数, 这里不存在任何计算温度的公式(否则就不需要气象局了), 但是每一天都会产生出一个惟一的最高气温. 对于每个日期, 都有一个与之对应的惟一最高气温.

例7 王先生到郊外去观景, 他匀速前进, 离家不久, 他发现一骑车人的自行车坏了, 他帮助这个人把自行车修好, 随后又上路了. 请把王先生离家的距离(s)关于时间(t)的函数用图形描述出来.

解 王先生离家的距离关于时间的函数图形如图 1-1 所示.

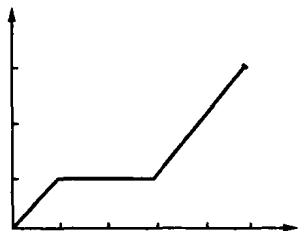


图 1-1

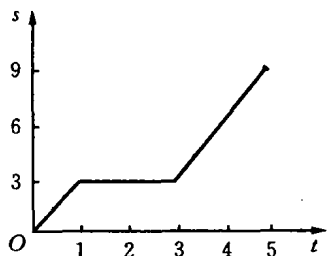


图 1-2

如果给图 1-1 标明具体的量和数值(见图 1-2), 则可由解析表达式表示为

$$s(t) = \begin{cases} 3t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 3, & 1 < t \leq 3, \\ 3t-6, & 3 < t \leq 5. \end{cases}$$

该函数 $s(t)$ 的定义域为 $D=[0, 5]$, 但它在定义域内不同的区间上是用不同的解析式来表示的, 这样的函数称为分段函数. 分段函数是定义域上的一个函数, 不要理解为多个函数, 分段函数需要分段求值.

1.1.2 函数的几种特性

设函数 $f(x)$ 在某区间 I 有定义.

1. 有界性

若存在正数 M , 使得在区间 I 上 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界.

例 8 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 因为 $|\sin x| \leq 1$. 而 $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界.

2. 单调性

对于区间 I 内任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 若 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加, 区间 I 称为单调增加区间; 若 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少, 区间 I 称为单调减少区间.

3. 奇偶性

设区间 I 为关于原点对称的区间, 对于任意 $x \in I$, 若 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 若有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

4. 周期性

若存在不为零的数 T , 使得对于任意 $x \in I$, 有 $x+T \in I$, 且 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

1.1.3 反函数

定义 2 设 y 是 x 的函数, 给定 $y = f(x)$, 如果把 y 当作自变量, x 当作函数, 则由关系式 $y = f(x)$ 所确定的函数 $x = \varphi(y)$ 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 而 $y = f(x)$ 称为直接函数.

习惯上总是用 x 来表示自变量, 而用 y 来表示函数, 因此, 往往把 $x = \varphi(y)$ 改写成 $y = \varphi(x)$, 称为 $x = f(y)$ 的矫形反函数, 记作

$$y = f^{-1}(x).$$

所以, 我们常称函数 $y = f(x)$ 的反函数 $x = \varphi(y)$ 为直接反函数.

习 题 1-1

1. 设自变量 $x \in \{1, 2, 3, 4\}$, 判断下列数学结构哪些是函数, 哪些不是函数. 为什么?

$$(1) \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ f: & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \varphi: & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

| | |
|--|--|
| (3) 1 2 3 4 1 y: ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ 2 3 0 1 4 | (4) 1 2 3 h: ↓ ↓ ↓ 1 2 3 |
|--|--|

2. 一位旅客住在旅馆里,图 1-3 描述了他的一次行动,请你根据图形给纵坐标赋予某一个物理量后,再叙述他的这次行动.你能给图 1-3 标上具体的数值,精确描述这位旅客的这次行动并且用一个函数解析式表达出来吗?

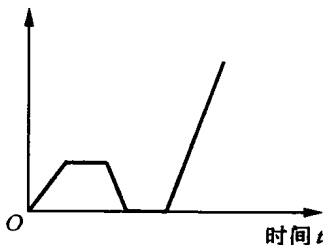


图 1-3

1.2 初等函数

微积分研究的对象主要为初等函数,而初等函数是由基本初等函数组成的.

1.2.1 基本初等函数

常数函数 $y=C$ (C 为常数),

幂函数 $y=x^\mu$ (μ 为常数),

指数函数 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1, a$ 为常数),

对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1, a$ 为常数),

三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x,$
 $y=\sec x, y=\csc x,$

反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x,$
 $y=\text{arccot} x.$