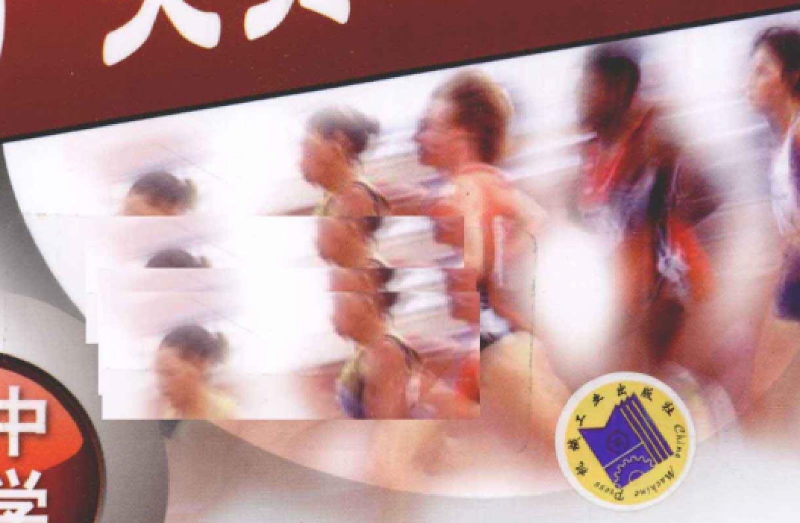
各版本适用

立足高考大纲 探究知识内涵
解读奥赛真题 揭示思维规律
点击高考难题 登上名校殿堂

第6版

高考·奥赛对接辅导

高中数学 3



主编 蔡晔

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

中考·竞赛对接辅导　初中数学1、2、3
中考·竞赛对接训练　初中数学1、2、3
中考·竞赛对接辅导　初中物理1、2
中考·竞赛对接训练　初中物理1、2
中考·竞赛对接辅导　初中化学
中考·竞赛对接训练　初中化学
中考·竞赛对接　初中英语1（知识篇）
中考·竞赛对接　初中英语2（技能篇）
高考·奥赛对接辅导　高中数学1、2、3
高考·奥赛对接训练　高中数学1、2、3
高考·奥赛对接辅导　高中物理1、2、3
高考·奥赛对接训练　高中物理1、2、3
高考·奥赛对接辅导　高中化学1、2、3
高考·奥赛对接训练　高中化学1、2、3
高考·奥赛对接　高中英语1（知识篇）
高考·奥赛对接　高中英语2（技能篇）
高考·奥赛对接辅导　高中生物
高考·奥赛对接训练　高中生物

ISBN 978-7-111-33619-8
封面设计：鞠杨
定价：19.50元

地址：北京市百万庄大街22号　邮政编码：100037
电话服务
社服务中心：(010)88361066
销售一部：(010)68326294
销售二部：(010)88379649
读者购书热线：(010)88379203
网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版

ISBN 978-7-111-33619-8
9 787111 336198 >

高考·奥赛对接辅导

高中数学 3

第 6 版

主　编　蔡　晔

副主编　刘宗宝

编　者　刘　林　杨传彬　赵振红　王青仁　王海奇　薛志虎　李学镇　卢建涛　刘跃先　解玉红　牛本富　李成国　宋　曼　李国丽　汪　莉　李丽丽

机械工业出版社

本系列书以新课标人教版教材知识体系为主线，兼顾其他版本教材的知识体系，将整个高中阶段的内容按知识模块进行编排。每一章节中，既有对高中阶段所应掌握的重点知识的讲解归纳，又有对与内容相关的近几年各地具有代表性的高考真题、竞赛题的归类整理和解析；同时还针对以后高考的趋势和方向，设计用于学生自练自评的练习题。本书既可用于学生同步巩固复习与训练，也适用于高考的第一轮复习。

图书在版编目（CIP）数据

高考·奥赛对接辅导．高中数学 3/蔡晔主编．—6 版．—北京：机械工业出版社，2011.3（2011.5 重印）

ISBN 978-7-111-33619-8

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①蔡…　Ⅲ．①中学数学课－高中－升学参考资料　Ⅳ．①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 033554 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：马文涛　马小涵　胡　明
责任编辑：马文涛　臧程程　陈崇昱　责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷（三河市志杨庄国丰装订厂装订）
2011 年 5 月第 6 版第 2 次印刷
148mm×210mm·11.625 印张·354 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-33619-8
定价：19.50 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：（010）88361066
销售一部：（010）68326294
销售二部：（010）88379649
读者购书热线：（010）88379203

网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

前　言

编写定位

编者精心编写的“高考·奥赛对接辅导”系列书立足教材、着眼高考、面向竞赛，融高考和竞赛于一体，期望为同学们提供最全面、最实用、最完备的高考常考知识点和竞赛解题方法。

本系列书内容的难度定位在中等偏上，以新课标、高考大纲中的重、难点及竞赛中的常考知识拓展点为基础，结合近年来经典的高考难题和典型的竞赛题，介绍解较难题目的方法，培养解决问题的能力，并通过练习题及时巩固，引导创新。

编写特点

1. 导向性　本书全面反映了近几年高考和竞赛的题型，详细介绍了的所有知识点以及解题技巧，体现出学科内不同知识板块间的综合联系，侧重考查学生的能力、素质，从而将未来高考和竞赛的趋势全面展现出来。

2. 新颖性　本书所选的例题是精心筛选的近几年的高考题和国际、国内竞赛题，内容新、题型新。大多数例题虽具一定难度，但难而不偏，具有代表性，且解题方法灵活。

本系列书自面世以来，得到了读者朋友的一致认可。本着与时俱进的原则和精益求精的态度，同时也为了答谢读者的厚爱，我们组织了一批有经验的专家和勇于创新的一线优秀青年教师，分析研究近年来全国各地、各类竞赛和高考的新变化，对原书内容进行了必要的修订和优化，期望能为同学们迎接升学考试和竞赛复习助一臂之力。

由于编写时间较紧，可能存在一些缺漏，敬请广大读者批评指正。

编　者

目　　录

第 4 部分:专题

第1部分:选修2—2

第1章　导数及其应用

1.1　导数及其运算

考点对接

一、导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 有定义,自变量 x 的改变量是 $\Delta x(\Delta x=x-x_0)$,相应的函数改变量是 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在,称 $f(x)$ 在 x_0 处可导,此时极限称为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数;若极限不存在,称 $f(x)$ 在 x_0 处不可导.

二、初等函数导数公式表

1. $(c)'=0$(c 是常数)

2. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$($\alpha$ 是常数),$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$,$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$,$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

4. $(a^x)'=a^x\ln a$,$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$

5. $(\sin x)'=\cos x$,$(\cos x)'=-\sin x$,$(\tan x)'=\sec^2 x$,$(\cot x)'=-\csc^2 x$,$(\sec x)'=\sec x\tan x$,$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

6. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

三、求导法则

1. $(u\pm v)'=u'\pm v'$，$(uv)'=u'v+v'u$，$(cu)'=cu'$（c 是常数）

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$，$\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$

2. $\{f[g(x)]\}'=[f(u)]'g'(x)=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

特别提示：运用复合函数的求导法则 $y'(x)=y'(u)\cdot u'(x)$，应注意以下几点.

(1)利用复合函数求导法则求导后，要把中间变量换成自变量的函数，层层求导；

(2)要分清每一步的求导是哪个变量对哪个变量求导，不能混淆，一直计算到最后，常见错误如 $(\cos 2x)'=-\sin 2x$，实际上应是 $-2\sin 2x$；

(3)求复合函数的导数，关键在于分清楚函数的复合关系，选好中间变量，如 $y=\dfrac{1}{(1-3x)^4}$ 选成 $y=\dfrac{1}{u}$，$u=v^4$，$v=1-w$，$w=3x$ 计算起来就复杂了.

思维对接

考点1 导数定义的理解

例1 已知函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，且 $x_0\in(a,b)$，则

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$ （　　）

A. $f'(x_0)$　　B. $2f'(x_0)$　　C. $-2f'(x_0)$　　D. 0

【分析】
$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]-[f(x_0-h)-f(x_0)]}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h}-\lim_{-h\to 0}\frac{[f(x_0-h)-f(x_0)]}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h}+\lim_{-h\to 0}\frac{[f(x_0-h)-f(x_0)]}{-h}\\&=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0).\end{aligned}$$

【答案】 B

考点2 导数的几何意义

例②(2009·江西)设函数 $f(x)=g(x)+x^2$，曲线 $y=g(x)$ 在点 $(1,g(1))$ 处的切线方程为 $y=2x+1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处切线的斜率为 ( )

A. 4　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. 2　　D. $-\frac{1}{2}$

【分析】 由已知 $g'(1)=2$，而 $f'(x)=g'(x)+2x$，所以 $f'(1)=g'(1)+2\times1=4$，故选 A.

【答案】 A

例③(2009·全国)曲线 $y=\frac{x}{2x-1}$ 在点(1,1)处的切线方程为 ( )

A. $x-y-2=0$　　B. $x+y-2=0$

C. $x+4y-5=0$　　D. $x-4y-5=0$

【分析】 $y'\Big|_{x=1}=\frac{2x-1-2x}{(2x-1)^2}\Big|_{x=1}=\left[-\frac{1}{(2x-1)^2}\right]\Big|_{x=1}=-1$，

故切线方程为 $y-1=-(x-1)$，即 $x+y-2=0$，故选 B.

【答案】 B

例④(2009·陕西)设曲线 $y=x^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$ 在点(1,1)处的切线与 x 轴的交点的横坐标为 x_n，令 $a_n=\lg x_n$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_{99}$ 的值为________.

【分析】 点(1,1)在函数 $y=x^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的图像上，故 (1,1)为切点.

$y=x^{n+1}$ 的导函数为 $y'=(n+1)x^n\Rightarrow y'|_{x=1}=(n+1)$

$\Rightarrow$切线是：$y-1=(n+1)(x-1)$.

令 $y=0$ 得切点的横坐标：$x_n=\frac{n}{n+1}$.

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_{99}=\lg(x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_{99})$

$$=\lg\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{98}{99}\times\frac{99}{100}\right)=\lg\frac{1}{100}=-2.$$

【答案】 -2

例⑤(2010·全国模拟)曲线 $f(x)=x^3-3x$，过点 $A(0,16)$ 作曲线 $f(x)$ 的切线，求曲线的切线方程.

【解】 设切点为 (x_0,y_0)，可得 $y_0=x_0^3-3x_0$. ①

$\because f'(x)=3x^2-3$，

$\therefore$ 切线的斜率为 $k=3x_0^2-3$，所以切线方程为 $y-y_0=(3x_0^2-3)(x-$

x_0).

由点 $A(0,16)$ 在切线上，得 $16-y_0=(3x_0^2-3)(0-x_0)$， ②

由①②组成方程组，解得 $x_0=-2, y_0=-2$.

所以，所求曲线的切线方程为 $9x-y+16=0$.

方法总结

求切线方程时，首先要考查已知点是否在曲线上.

考点 3 | 导数的运算法则

例 6 (2007·扬州)已知 $y=\frac{1}{2}\sin 2x+\sin x$，那么 y' 是 ( )

A. 仅有最小值的奇函数　　B. 既有最大值又有最小值的偶函数

C. 仅有最大值的偶函数　　D. 非奇非偶函数

【分析】 用普通的三角变换的方法解决本题比较困难，本题宜用导数方法.

【解】 设原函数为 $f(x)$，则

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'+(\sin x)'=\frac{1}{2}(\cos 2x)(2x)'+(\sin x)'=\cos 2x+\cos x.$$

由于 $f'(-x)=\cos(-2x)+\cos(-x)=\cos 2x+\cos x=f'(x)$，

所以 $f'(x)$ 为偶函数.

又由于 $y'=2\cos^2 x-1+\cos x=2\cos^2 x+\cos x-1$

令 $t=\cos x$，所以 $y'=2t^2+t-1, -1\leqslant t\leqslant 1$

所以 $y'_{\max}=2, y'_{\min}=-\frac{9}{8}$，故选 B.

【答案】 B

例 7 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(0)=$________.

【分析】 设 $g(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f(x)=xg(x)$.

于是 $f'(x)=g(x)+xg'(x), f'(0)=g(0)+0\cdot g'(0)=g(0)=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n=n!$.

【答案】 $n!$

例 8 求下列函数的导数：

(1) $y=\frac{1-x}{(1+x^2)\cos x}$；(2) $y=(ax-b\sin^2\omega x)^3$；(3) $y=f(\sqrt{x^2+1})$.

【解】(1)$y'=\dfrac{(1-x)'(1+x^2)\cos x-(1-x)[(1+x^2)\cos x]'}{(1+x^2)^2\cos^2 x}$

$=\dfrac{-(1+x^2)\cos x-(1-x)[(1+x^2)'\cos x+(1+x^2)(\cos x)']}{(1+x^2)^2\cos^2 x}$

$=\dfrac{-(1+x^2)\cos x-(1-x)[2x\cos x-(1+x^2)\sin x]}{(1+x^2)^2\cos^2 x}$

$=\dfrac{(x^2-2x-1)\cos x+(1-x)(1+x^2)\sin x}{(1+x^2)^2\cos^2 x}$;

(2)令 $y=\mu^3$，$\mu=ax-b\sin^2\omega x$，$\mu=av-b\gamma$，$v=x$，$\gamma=\sin^2\omega x$，则

$y'=(\mu^3)'=3\mu^2\cdot\mu'=3\mu^2(av-b\gamma)'$

$=3\mu^2(av'-b\gamma')$

$=3(ax-b\sin^2\omega x)^2(a-b\omega\sin 2\omega x)$;

(3)(解法一)　设 $y=f(\mu)$，$\mu=\sqrt{v}$，$v=x^2+1$，则

$y'(x)=y'(\mu)\cdot\mu'(v)\cdot v'(x)=f'(\mu)\cdot\dfrac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x$

$=f'(\sqrt{x^2+1})\cdot\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x$

$=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}f'(\sqrt{x^2+1})$;

(解法二)　$y'=[f(\sqrt{x^2+1})]'=f'(\sqrt{x^2+1})\cdot(\sqrt{x^2+1})'$

$=f'(\sqrt{x^2+1})\cdot\dfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+1)'$

$=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}f'(\sqrt{x^2+1})$.

方法总结

先分析函数式结构，找准复合函数的式子特征，挖掘量的隐含条件，将问题转化为求基本函数的导数，再按照求导法则进行求导.

奥赛对接

例1 已知 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，其图像交 x 轴于 A，B，C 三点，若点 B 的坐标为 $(2,0)$，且 $f(x)$ 在区间 $[-1,0]$ 和 $[4,5]$ 上有相同的单调性，在区间 $[0,2]$ 和 $[4,5]$ 上有相反的单调性.

(1)求 c 的值;

(2)在函数 $f(x)$ 的图像上是否存在一点 $M(x_0,y_0)$,使得 $f(x)$ 在点 M 处的切线斜率为 $3b$? 若存在,求出点 M 的坐标;若不存在,说明理由.

【分析】 $f(x)$ 在区间 $[-1,0]$ 和 $[0,2]$ 上有相反单调性,说明 $x=0$ 是 $f(x)$ 的一个极值点.

【解】 (1) 由 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 和 $[0,2]$ 上有相反单调性,知

$x=0$ 是 $f(x)$ 的一个极值点,故 $f'(x)=0$,即

$3ax^2+2bx+c=0$ 有一个解为 $x=0$,解得 $c=0$.

(2) 由 $f(x)$ 交 x 轴于点 $B(2,0)$,得

$8a+4b+d=0$,即 $d=-4(b+2a)$.

令 $f'(x)=0$,则 $3ax^2+2bx=0$,解得 $x_1=0, x_2=-\dfrac{2b}{3a}$.

因为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 和 $[4,5]$ 上有相反的单调性,所以

$2\leqslant-\dfrac{2b}{3a}\leqslant4$, 即 $-6\leqslant\dfrac{b}{a}\leqslant-3$.

假设存在点 $M(x_0,y_0)$,使得 $f(x)$ 在点 M 处的切线斜率为 $3b$,则 $f'(x_0)=3b$,即

$3ax_0^2+2bx_0-3b=0$.

因 $\Delta=(2b)^2-4\cdot3a\cdot(-3b)=4b^2+36ab=4ab\left(\dfrac{b}{a}+9\right)$,

又因为 $-6\leqslant\dfrac{b}{a}\leqslant-3$, 得 $\Delta<0$.

所以,不存在点 $M(x_0,y_0)$,使得 $f(x)$ 在点 M 处的切线斜率为 $3b$.

例2 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x^2,x+1)$, $\boldsymbol{b}=(1-x,t)$,若函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 在区间 $(-1,1)$ 上是增函数,求 t 的取值范围.

【分析】 增函数在其定义域内的导数大于或等于零.

【解】 依定义 $f(x)=x^2(1-x)+t(x+1)=-x^3+x^2+tx+t$,则

$$f'(x)=-3x^2+2x+t.$$

若 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数,则在 $(-1,1)$ 上 $f'(x)\geqslant0$.

$f'(x)\geqslant0\Leftrightarrow t\geqslant3x^2-2x$ 在区间 $(-1,1)$ 上恒成立,考虑函数 $g(x)=3x^2-2x$,故要使 $t\geqslant3x^2-2x$ 在区间 $(-1,1)$ 上恒成立 $\Leftrightarrow t\geqslant g(-1)$,即 $t\geqslant5$.

例3 (2010·重庆)已知函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+a}+\ln(x+1)$,其中实数 $a\neq-1$.

(1)若 $a=2$,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(2)若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值,试讨论 $f(x)$ 的单调性.

【解】 (1) $f'(x)=\frac{x+a-(x-1)}{(x+a)^2}+\frac{1}{x+1}=\frac{a+1}{(x+a)^2}+\frac{1}{x+1}$,

当 $a=2$ 时, $f'(0)=\frac{2+1}{(0+2)^2}+\frac{1}{0+1}=\frac{7}{4}$,而 $f(0)=-\frac{1}{2}$,

因此曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为

$y-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}(x-0)$,即 $7x-4y-2=0$.

(2) $a\neq-1$,由(1)知, $f'(1)=\frac{a+1}{(1+a)^2}+\frac{1}{1+1}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2}$.

又因 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值,所以 $f'(1)=0$,即 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2}=0$,解得 $a=-3$.

此时 $f(x)=\frac{x-1}{x-3}+\ln(x+1)$,其定义域为 $(-1,3)\cup(3,+\infty)$,

$f'(x)=\frac{-2}{(x-3)^2}+\frac{1}{x+1}=\frac{(x-1)(x-7)}{(x-3)^2(x+1)}$,由 $f'(x)=0$ 得 $x_1=1$, $x_2=7$.

当 $-1<x<1$ 或 $x>7$ 时, $f'(x)>0$;当 $1<x<7$ 且 $x\neq3$ 时, $f'(x)<0$.

由以上讨论知, $f(x)$ 在区间 $(-1,1]\cup[7,+\infty)$ 上是增函数,在区间 $[1,3)\cup(3,7]$ 上是减函数.

小试牛刀

一、选择题

1. 设 $f(x)$ 在 x 处可导, a,b 为非零常数,则 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+a\Delta x)-f(x-b\Delta x)}{\Delta x}=$ (　　)

A. $f'(x)$　　B. $(a+b)f'(x)$　　C. $(a-b)f'(x)$　　D. $f'(x)$

2. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的导数为 $f'(x)$, $f'(0)>0$. 对于任意实数 x,有 $f(x)\geqslant0$,则 $\frac{f(1)}{f'(0)}$ 的最小值为 (　　)

A. 3　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{3}{2}$

3. 函数 $y=\frac{x^2+a^2}{x}$ $(a>0)$ 的导数为0,那么 x 等于 (　　)

A. a　　B. $\pm a$　　C. $-a$　　D. a^2

4. 函数 $y=\cos 2x+\sin\sqrt{x}$的导数为 ( )

A. $-2\sin 2x+\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ B. $2\sin 2x+\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

C. $-2\sin 2x+\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ D. $2\sin 2x-\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

二、填空题

5. $y=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$的导数为________.

6. 函数 $y=2^{3x+2}$,那么 $y'=$________.

三、解答题

7. $y=e^{2x}(a\sin nx-n\cos nx)$,求 $y'(0)$.

8. 已知 $x\neq 0$,求证:$e^x>1+x$.

9. 用长为 90 cm,宽为 48 cm 的长方形铁皮做一个无盖的容器,先在四角分别截去一个小正方形,然后把四边翻转 90°角,再焊接而成,问该容器的高为多少时,容器的容积最大?最大容积是多少?

1.2 导数的应用与优化问题举例

考点对接

1. 函数的导数与函数的单调性的关系:设函数 $y=f(x)$ 在某个区间内有导数,如果在这个区间内 $y'>0$,那么函数 $y=f(x)$ 为这个区间内的增函数;如果在这个区间内 $y'<0$,那么函数 $y=f(x)$ 为这个区间内的减函数.

2. 用导数求函数单调区间的步骤:①求函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$;②令 $f'(x)>0$ 解不等式,所得 x 的范围就是递增区间;③令 $f'(x)<0$ 解不等式,所得 x 的范围就是递减区间.

3. 极值

(1)极大值:一般地,设函数 $f(x)$在点 x_0 附近有定义,如果对 x_0 附近的所有的点,都有 $f(x)<f(x_0)$,就说 $f(x_0)$是函数 $f(x)$的一个极大值,记作 $y_{极大值}=f(x_0)$,x_0 是极大值点.

(2)极小值:一般地,设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义,如果对 x_0 附近的所有的点,都有 $f(x)>f(x_0)$,就说 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值,记作 $y_{极小值}=f(x_0)$,x_0 是极小值点.

(3)极大值与极小值统称为极值.

(4)判别 $f(x_0)$ 是极大、极小值的方法:若 x_0 满足 $f'(x_0)=0$,且在 x_0 的两侧 $f(x)$ 的导数异号,则 x_0 是 $f(x)$ 的极值点,$f(x_0)$ 是极值,并且如果 $f'(x)$ 在 x_0 两侧满足"左正右负",则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点,$f(x_0)$ 是极大值;如果 $f'(x)$ 在 x_0 两侧满足"左负右正",则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点,$f(x_0)$ 是极小值.

4. 函数的最大值和最小值:在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值与最小值. ①在开区间 (a,b) 内连续的函数 $f(x)$ 不一定有最大值与最小值. ②函数的最值是比较整个定义域内的函数值得出的;函数的极值是比较极值点附近函数值得出的. ③函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续是 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有最大值与最小值的充分条件而非必要条件. ④函数在其定义区间上的最大值、最小值最多各有一个,而函数的极值可能不止一个,也可能一个也没有.

特别提示:极大(小)值与最大(小)值的区别与联系

极值是局部性概念,最大(小)值可以看做整体性概念,因而在一般情况下,两者是有区别的.极大(小)值不一定是最大(小)值,最大(小)值也不一定是极大(小)值,但如果连续函数在区间 (a,b) 内只有一个极值,那么极大值就是最大值,极小值就是最小值.

5. 求函数 $f(x)$ 的极值的步骤:

(1)确定函数的定义区间,求导数 $f'(x)$.

(2)求方程 $f'(x)=0$ 的根.

(3)用函数的导数为0的点,顺次将函数的定义区间分成若干小开区间,并列成表格.检查 $f'(x)$ 在方程根左、右的值的符号,如果左正右负,那么 $f(x)$ 在这个根处取得极大值;如果左负右正,那么 $f(x)$ 在这个根处取得极小值;如果左、右不改变符号即都为正或都为负,则 $f(x)$ 在这个根处无极值.

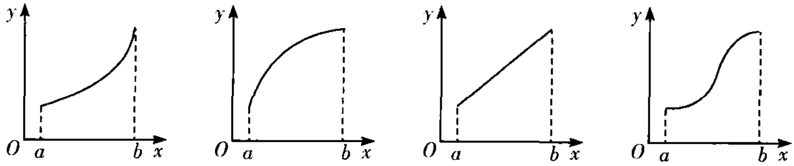
6. 利用导数求函数的最值步骤:①求 $f(x)$ 在 (a,b) 内的极值;②将 $f(x)$ 的各极值与 $f(a)$,$f(b)$ 比较得出函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最值.

思维对接

考点1　函数的单调性与导数

例1 (2009·湖南)若函数 $y=f(x)$ 的导函数在区间 $[a,b]$ 上是增函数,

则函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图像可能是 （　　）



A　　B　　C　　D

【分析】 因为函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是增函数，即在区间 $[a,b]$ 上各点处的斜率 k 是递增的，由图易知选 A. 注意 C 中 $y'=k$ 为常数.

【答案】 A

例2（2007·天津）已知函数 $f(x)=\dfrac{2ax-a^2+1}{x^2+1}(x\in\mathbf{R})$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1)当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程；

(2)当 $a\neq 0$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值.

【解】 (1)当 $a=1$ 时，$f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$，$f(2)=\dfrac{4}{5}$.

又 $f'(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$，$f'(2)=-\dfrac{6}{25}$.

所以，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为

$$y-\frac{4}{5}=-\frac{6}{25}(x-2)$$

即

$$6x+25y-32=0.$$

(2) $f'(x)=\dfrac{2a(x^2+1)-2x(2ax-a^2+1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2(x-a)(ax+1)}{(x^2+1)^2}$

由于 $a\neq 0$，以下分两种情况讨论：

①当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得到 $x_1=-\dfrac{1}{a}$，$x_2=a$. 当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表所示.

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{a}\right)$	$-\frac{1}{a}$	$\left(-\frac{1}{a},a\right)$	a	$(a,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值 $-a^2$	↗	极大值 1	↘