最优控制

李传江　马广富　编著

科学出版社

哈尔滨工业大学“十二五”规划教材

最 优 控 制

李传江　马广富　编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书系统地阐述了最优化与最优控制的基础理论和基本方法，并配有丰富的有代表意义的例题和习题，便于读者理解书中所阐述的内容。

全书内容共分为 8 章：第 1 章对最优化问题和最优控制问题进行了概述；第 2 章介绍了各种静态最优化问题及其常用的求解方法，并讲解了静态优化问题中一个重要的理论——凸优化理论；第 3～7 章阐述了最优控制的基础理论，包括古典变分法、极小值原理、动态规划、线性二次型最优控制及输出调节器与输出跟踪；第 8 章介绍了奇异最优控制的概念和求解方法。

本书可作为高等院校控制科学与工程学科的研究生教材以及教师教学和科研的参考用书，也可作为其他相关学科的教学用书，以及从事研究优化设计和最优控制方面的工程技术与科研人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

最优控制/李传江，马广富编著．—北京：科学出版社，2011

ISBN 978-7-03-030327-1

Ⅰ.①最… Ⅱ.①李…②马… Ⅲ.①最佳控制-数学理论-高等学校-教材
Ⅳ.①O232

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 025102 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 3 月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2011 年 3 月第一次印刷 印张：22 3/4
印数：1—3 000 字数：446 000

定价：62.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

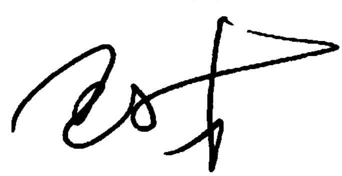
序

半个世纪以来，最优化理论在现实需求的推动下不断发展和完善。在解决静态最优化问题方面，形成了以原苏联康托罗维奇（Л. В. Канторович）和美国丹齐克（G. B. Dantzig）为代表的线性规划以及以美国库恩（H. W. Kuhn）和塔克（A. W. Tucker）为代表的非线性规划理论体系。在解决动态最优化问题方面，随着科学技术的发展，尤其是空间技术的推动，最优控制理论得到了长足的发展。最优控制理论是研究和解决从一切可能的控制方案中确定最优方案的一门基础科学，是20世纪60年代发展起来的以状态空间描述为基础的现代控制理论的重要组成部分。这一时期逐步建立的具有代表性的理论体系有：以美国学者贝尔曼（R. Bellman）为代表的动态规划；以原苏联庞特里亚金（Л. С. Понтрягин）为代表的极小（大）值原理；以美国卡尔曼（R. E. Kalman）为代表的线性二次型最优控制等。这些理论体系逐渐成为近现代非常活跃的学科，对促进控制论、系统工程、运筹学和管理科学等学科的发展起到了非常重要的作用。

迄今为止，最优化和最优控制理论依然在科学技术的诸多领域中有着非常广泛的应用和广阔的发展空间。该书既系统地阐述了国内外先进的前沿理论，又注重相关学科及工程技术的实践应用。在介绍解决静态最优化问题的若干典型方法（如最优梯度法、拉格朗日乘子法及惩罚函数法等方法）的基础上，又全面系统地阐述了古典变分理论、极小值原理、动态规划、线性二次型最优调节器及奇异最优控制等理论，这些方法和理论构成了最优控制理论的基础框架。此外，该书还对极小值原理的几种典型工程应用——时间最优控制、燃料最优控制及能量最优控制进行了详细而深入的论述。

全书理论联系实际，注重基础，循序渐进，深入浅出，基本概念和撰写思路清晰，重点、难点明确，理论分析和数学推导详简合适，可读性较强。此外，书中例题难度适中，易于理解，便于读者自学，课后习题利于读者深入理解并灵活应用最优控制理论。

中国工程院院士



前　　言

在科学研究和生产实践中，人们都希望通过某种方案或措施获取最佳的处理结果，这种设法获得最佳处理结果的问题称为最优化问题。最优化问题可分为静态最优化和动态最优化，其中动态最优化问题也称为最优控制问题。静态最优化与最优控制问题在国民经济的各个部门及科学研究和生产实践的各个领域中应用非常广泛。目前，静态最优化在生产过程、资源分配、物流管理、金融、贸易等方面，最优控制理论在国防与航空航天技术、系统工程、经济管理等方面都已得到了广泛的重视和卓有成效的应用。时至今日，最优化理论仍然是相当活跃的学科领域之一。

本书从理论和工程应用的角度出发，系统地介绍了静态最优化和最优控制理论的相关内容。全书共分 8 章。第 1 章为最优化概论；第 2 章介绍了静态最优化的各种典型实用方法；第 3 章介绍了古典变分理论及其如何用来解决最优控制问题；第 4 章和第 5 章针对连续系统和离散系统，分别重点介绍了现代变分理论中的两大重要内容——极小值原理和动态规划，并在极小值原理中详细介绍了几种典型的工程应用问题——时间最优控制、燃料最优控制及能量最优控制；第 6 章重点介绍了线性二次型最优状态调节器理论及其相关内容；第 7 章在第 6 章的基础上，给出了最优输出调节器及输出跟踪的设计方法；第 8 章简单介绍了奇异最优控制理论。

本书是作者在总结多年教学经验和科研实践的基础上，参阅众多国内外优秀教材和文献编著而成的。本书最大的特色在于深入浅出，通过一定量具有代表性的例题、习题和工程应用实例，使读者能自学并循序渐进地理解最优控制理论，便于相关工作技术人员日常学习和查阅。本书的绝大部分内容已向哈尔滨工业大学控制科学与工程学科研究生以及相关工程技术人员多次讲授过，并收到了良好效果。

在本书编著和出版过程中，得到了中国工程院王子才院士的悉心指导和其对全书做出的客观评价，得到了黑龙江省教育厅和哈尔滨工业大学研究生院的基金资助以及控制科学与工程学科广大师生的大力支持和关心。在此，对他们表示由衷的感谢！

在本书即将出版之际，衷心感谢胡庆雷副教授、郭延宁博士、黄静博士、黄海滨博士、姜野博士、刘刚博士、庄宇飞博士为本书编写和校对工作所付出的艰辛劳动；衷心感谢澳大利亚科廷大学 Kok Lay Teo 教授在最优化理论方面给予的指导和

关怀；衷心感谢中国航天科技集团公司侯建文研究员、周伟敏研究员、张伟研究员、刘付成研究员、王大铁研究员及中国科学院上海微小卫星工程中心张永合博士在工程应用方面提供的大力支持和帮助；对多年来在教学实践过程中提出诸多宝贵建议和意见的老师和学生表示诚挚的谢意。

本书由马广富教授和李传江副教授编著，李传江负责统稿和定稿。书中难免有遗漏或不妥之处，恳请广大读者提出宝贵的意见和建议。

作　者

2011 年 1 月

目　　录

第 1 章　最优化概论

1.1　引　　言

人们在处理日常生活、生产过程、资源分配和信息处理等实际问题时，都希望通过某种方案或措施获取最佳的处理结果。这种设法获得最佳处理结果的问题称为最优化问题。同时，使得处理结果为最佳的方案或措施称为最优化方法。

最优化问题种类繁多，从大的种类上可以分为静态最优化问题和动态最优化问题。静态最优化（static optimization）又称为参数优化（parameter optimization），动态最优化（dynamic optimization）又称为最优控制（optimal control）。本章分别在 1.2 节和 1.3 节中介绍了静态最优化和动态最优化问题的相关基础知识。在 1.2 节中，给出了静态最优化问题的基本要素、数学描述、分类及其求解方法等内容；在 1.3 节中，给出了最优控制问题的性能指标、数学描述及其分类等内容。

1.2　静态最优化问题

求解一个实际的最优化问题一般要分两步：第一步是将实际问题用数学模型来描述，包括选择优化变量、确定目标函数和给出约束条件；第二步是采用适当的最优化方法对数学模型进行求解。可见，优化变量、目标函数和约束条件构成了一个静态最优化问题的三个基本要素。

1.2.1　静态最优化问题基本要素

1. 优化变量

一个实际的优化方案可以用一组参数来描述，在这些参数中，有些根据要求在优化过程中始终保持不变，这类参数称为常量；而另一类参数的取值则需要在优化过程中进行不断调整变化，这类参数称为优化变量（或称决策变量）。优化变量必须是独立的参数。

优化变量的全体可以用向量来表示。包含 n 个优化变量的优化问题称为 n 维优化问题，这些变量可以表示成一个 n 维向量 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$，其中，$x_i$（$i=$

$1,2,\cdots,n$)表示第 i 个优化变量。当 x_i 的值全都确定之后，就产生了优化方案 $\boldsymbol{x}$。

优化变量的个数称为优化问题的维数，也称为自由度。优化变量的个数越多，自由度就越大，可供选择的方案就越多，优化的难度就越大，计算的程序也越复杂，计算量也就越大。一般认为自由度为 2～10 的优化问题是小型优化问题，而自由度大于 50 的优化问题是大型优化问题。另外，优化变量的取值可以是连续变化的，也可以是离散的；优化变量的取值范围可以是无限的，也可以是有限的。

2. 目标函数

目标函数是一个描述优化目标的数学表达式，采用优化变量来表示，是衡量优化目标优劣的依据。一个 n 维的静态最优化问题的目标函数通常可以描述为 $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

求解静态最优化问题的实质：改变优化变量 $\boldsymbol{x}$ 得到不同的目标函数值，通过比较目标函数值的大小来衡量优化目标的好坏，从而确定出最佳优化方案以及相应的优化变量。

目标函数的最优值可以是极大值，也可以是极小值。目标函数的极大值通常可以表示为 $\max f(\boldsymbol{x})$，极小值通常可以表示为 $\min f(\boldsymbol{x})$。考虑到目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的极大值通常等效为求取目标函数 $-f(\boldsymbol{x})$ 的极小值，本书后面章节如无特殊说明，将目标函数的极值统一表示为求取其极小值。

3. 约束条件

在静态最优化中，对优化变量的限制采用约束条件来描述。约束条件可以是等式约束，可以是不等式约束，也可以是混合约束。

一般情况下，等式约束可以表示为

$$g_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m)$$

或者用向量形式描述为

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

其中，m 为等式约束条件的个数。

不等式约束可以表示为

$$h_i(\boldsymbol{x}) \leqslant 0 \quad (i = 1,2,\cdots,l)$$

或者用向量形式描述为

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, \quad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$$

其中，l 为不等式约束条件的个数。

满足所有约束条件的优化变量的集合称为可行域，可行域可以是有限集、无限集，也可以是空集。可行域内的优化变量称为可行点，也叫内点；可行域外的优化变量称为不可行点，也叫外点；当优化变量位于某一不等式约束条件的边界上时，

称为边界点，边界点也是可行点，是对应的不等式约束条件所允许的极限点。

对不等式约束条件而言，还可细分为起作用约束和不起作用约束。若优化变量位于某个不等式约束的边界上，即使得 $h_i(\boldsymbol{x}) = 0$，则称该约束为起作用约束，否则为不起作用约束。从这个意义上来说，每个等式约束都是起作用约束。

1.2.2　静态最优化问题数学描述及分类

由优化变量、目标函数及约束条件组成的静态优化问题可以描述为：在满足一系列约束条件的可行域中，确定一组优化变量，使目标函数达到最优值（极大值或极小值）。在数学上可以表示为

$$\begin{aligned} &\min_{x\in S} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ &\text{s.t.} \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{g}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ &\qquad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, \quad \boldsymbol{h}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l \end{aligned} \tag{1-1}$$

其中，s. t. 为“subject to”的缩写，表示“受制于”、“受约束于”，S 为满足约束条件的可行域。显然，当 $m = 0$ 时，问题为不等式约束优化问题；当 $l = 0$ 时，问题为等式约束优化问题；当 m 和 l 均不为零时，问题为混合约束优化问题；当 $m = l = 0$ 时，问题退化为无约束优化问题。

可以看出，在静态最优化问题中，各优化变量都不随时间 t 变化，其特性采用代数方程来描述，本质上属于函数求极值的问题。

静态最优化问题的种类很多。以下给出一些常见的分类和几种特殊的优化问题。

(1) 按有无约束条件划分，可分为无约束优化（unconstrained optimization）和有约束优化（constrained optimization）。无约束最优化问题中优化变量的取值范围不受限制，而有约束最优化问题中优化变量的取值范围是受限制的。有约束优化问题的求解通常都要先转化为无约束优化问题，因此无约束优化问题是众多优化问题中的基础。

(2) 按优化变量的个数划分，可分为单变量优化（single variable optimization）和多变量优化（multi-variable optimization）。单变量函数的最优化问题中需要寻优的变量只有一个；多变量函数的最优化问题中需要寻优的变量多于一个。

(3) 按目标函数的个数划分，可分为单目标优化和多目标优化。

(4) 按优化变量的取值形式划分，可分为连续优化和离散优化。如果目标函数是优化变量的连续函数，且可行域由连续的约束函数来确定，则称该问题为连续优化问题；如果可行域中的优化变量只能取为离散点集，则称该问题为离散优化问题，该问题包含了很多著名的优化问题，如 0-1 规划问题、整数规划问题、旅行商问题及背包问题等。

(5) 按目标函数与约束条件的线性与否划分，可分为线性规划（linear pro-

gramming)和非线性规划(nonlinear programming)。线性规划指的是目标函数为优化变量的线性函数,并且约束条件也是优化变量的线性等式或不等式;非线性规划指的是目标函数或约束条件中至少有一个是优化变量的非线性函数。

(6) 二次规划(quadratic programming)问题是非线性规划问题中的一种,指的是目标函数为优化变量的二次函数,且约束条件均为优化变量的线性函数。

(7) 凸规划(convex programming)问题是非线性规划问题中的一种,指的是目标函数为凸函数,且由约束条件形成的可行域为凸集。凸规划问题的最突出特点就是,问题的任何一个局部最优解必定是其全局最优解,同时,若目标函数为严格凸函数,则凸规划问题存在唯一的全局最优解。

1.2.3 静态最优化问题求解方法

一般而言,静态最优化问题的求解方法可以分为以下几类。

1. 间接法

间接法,又称解析法。其基本做法是先根据函数取极值的必要条件用经典微分法求出其解析解,然后按充分条件或问题的实际物理意义间接地确定最优解。间接法适合求解目标函数具有简单而明确的数学表达式的非线性最优化问题。

2. 直接法

直接法,又称数值法。其基本做法是采用直接搜索的方法以一系列的迭代产生迭代序列,使之逐渐收敛到最优解。直接法适合求解目标函数较为复杂或无法用解析法求解的非线性最优化问题。直接法大致可以分为函数逼近法、区间消去法和爬山法。前两种方法对求解单变量无约束函数的最优化问题十分有效,后一种方法适合解决多变量无约束函数的最优化问题。函数逼近法又称曲线拟合法,该方法在若干点上估计出目标函数值,给出目标函数的近似曲线,再用区间消去法求解。而区间消去法的实质是在搜索过程中不断缩短最优解存在的区间,直至按照一定的精度收敛到最优解,这一方法主要包括 Fibonacci 法和黄金分割法(0.618法)。爬山法是根据已求得的目标函数值或利用已有的信息,通过空间点的移动和比较逐步改善目标函数,直至达到最优解,其搜索过程实质上就是由选定的搜索方向和在确定方向上爬山搜索两部分组成,按照所选取的搜索方向和不同的爬山前进方式,形成了不同的爬山法,比如步长加速法(模式搜索法)、变量轮换法、单纯形法、方向加速法和随机搜索法等。

3. 以间接法为基础的直接法

这种以间接法为基础的直接法,是一种将解析法与数值法相结合的方法,此类

方法主要用来解决多变量函数的最优化问题。

对于多变量无约束函数的最优化问题，适合的求解方法有：最速下降法、共轭方向法、共轭梯度法、牛顿法、拟牛顿法、变尺度法及牛顿-高斯最小二乘法等。

对于多变量有约束函数的最优化问题，适合的求解方法很多，大致可以分为三种类型：①变换算法或序列无约束极小化方法。这种方法将有约束最优化问题转化为一系列无约束最优化问题，然后采用无约束最优化方法来求解，典型的结果有拉格朗日乘子法和惩罚函数法等。②线性近似化法。这种方法采用一系列线性或二次规划问题的解来逼近原非线性约束问题的解，典型的结果有序列线性规划法、割平面法和序列二次规划法等，其中，序列二次规划法中又出现了 Lagrange-Newton 法和 Wilson-Han-Powell 法。③直接处理约束条件。研究在约束边界处如何搜索以获得使目标函数值逐步收敛到最优解的可行迭代点序列，典型的方法有可行方向法、梯度投影法和简约梯度法等。

4. *其他方法*

如网络最优化法，这是一种以网络图作为数学模型，用图论的方法进行搜索的寻优方法。具体方法可查阅相关文献。

1.3 最优控制问题

最优控制理论的发展是伴随着“最优化”概念的提出而开始的。在第二次世界大战期间及其之后的一段时间内，应战争和军事防御上的需要，以提高大炮发射命中率为主要目标的自动控制系统(通常叫做伺服系统)的技术日臻完善。但是，随着社会的发展，简单的反馈控制已经难以满足工程实践的要求，传统的系统设计方法也无法实现日渐提高的性能指标。在这种情况下，科学家通过大量的研究，于20世纪50年代初提出了最优化的概念，并试图对控制对象施加最优控制，但由于理论上尚不完善，未能真正实现。然而在这一时期，科学家从工程角度发表的最短时间控制问题的研究成果，尽管其最优性的证明多半是借助于几何图形，带有启发的性质，但是毕竟为发展现代控制理论提供了第一批实际模型。直到1960年前后，由于在控制理论中引入一系列新的研究方法和数学成果，推出了最优控制所必须满足的充分条件后，才使最优控制的应用逐渐普及，并成为20世纪60年代自动控制领域的热门课题。特别是空间技术的迅猛发展，引起了一大批数学家的注意，进一步推动了最优控制理论向前迈进。举例来说，为了使宇宙飞船登月舱能以最小的燃料在月球表面准确、平稳地实现“软着陆”，即落到月球表面时的速度恰好为零，以避免与月球表面发生碰撞而损坏舱内设备，必须选择合适的控制方式来改变火箭发动机的推力。这就是所谓的“月球软着陆”问题，也叫做“燃料最省控制

问题”。

最优控制问题就其本质来说，乃是一个变分学问题。然而，经典的变分理论所能解决的，只是其容许控制属于开集的一类最优控制问题，而实际上遇到更多的，却是其容许控制属于闭集的一类最优控制问题，这就要求人们开辟求解最优控制问题的新途径。在各种新方法中，有两种方法最富成效：一种是美国学者贝尔曼于1953～1957年研究提出的“动态规划”；另一种是苏联学者庞特里亚金于1956～1958年创立的“极小值原理”。这两种方法对最优控制理论的形成和发展起了重要的作用。“动态规划”思想依据最优性原理，发展了变分学中的哈密顿-雅可比理论，构成了“动态规划”，它是一种适用于计算机计算，处理问题更有效、范围更广的方法。“极小值原理”是庞特里亚金等人受力学中哈密顿原理的启发，首先作为一种推测给出，随后又提供了一种严格的证明方法，并于1958年在爱丁堡召开的国际数学会议上首次宣布而逐步形成的。“极小值原理”发展了经典变分原理，成为处理闭集性约束变分问题的强有力工具。

最优控制理论所研究的问题可以概括为：对一个受控的动力学系统或运动过程，从一类允许的控制方案中找出一个最优的控制方案，使系统的运动在由某个初始状态转移到指定的目标状态的同时，其性能指标值为最优。这类问题广泛存在于技术领域或社会问题中。为了解决最优控制问题，必须建立描述受控运动过程的运动方程，给出控制变量的允许取值范围，指定运动过程的初始状态和目标状态，并且规定一个评价运动过程品质优劣的性能指标。

因此，描述一个最优控制问题，也需要三个基本要素：被控对象/系统的数学模型(mathematical model)、物理约束条件(physical constraints)及性能指标(performance index)。下面通过一个具体实例加以分析和说明。

1.3.1　最优控制问题的基本要素

例 1-1　一个简单的汽车行驶问题。如图1-1所示。设汽车开始静止于O点，其行驶的距离用$d(t)$表示，如何开动汽车才能使其在最短的时间里到达并停止在E点？试建立该问题的数学描述。

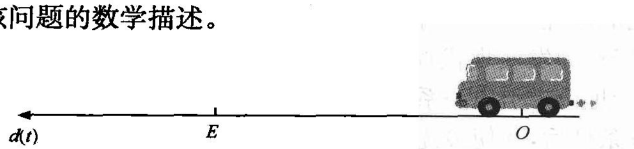


图1-1　简单的汽车行驶问题

1. 数学模型

为分析问题的方便，不妨把汽车看成是单位质量的质点，并忽略地面摩擦，则

汽车行驶的运动方程可以写为

$$\ddot{d}(t)=u_1(t)+u_2(t) \tag{1-2}$$

其中，$u_1(t)$，$u_2(t)$分别表示汽车的加速力和制动力。

取状态变量 $x_1(t)=d(t)$，$x_2(t)=\dot{d}(t)$，则运动方程(1-2)可以写为如下形式的状态方程：

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=u_1(t)+u_2(t)\end{cases} \tag{1-3}$$

这就得到了该系统的数学模型。

2. 物理约束条件

将 O 点作为行驶的起始点，E 点作为行驶的终止点，设 E 点到 O 点的距离为 e，O 点行驶到 E 点所用时间为 t_e，那么状态变量应该满足的边界条件为

$$\begin{cases}x_1(0)=0, & x_1(t_e)=e\\ x_2(0)=0, & x_2(t_e)=0\end{cases} \tag{1-4}$$

假设不考虑汽车倒退问题(即先驶过 E 点再退回 E 点)，那么状态变量在时间区间$[0, t_e]$内还应满足如下约束条件：

$$0\leqslant x_1(t)\leqslant e,\quad x_2(t)\geqslant 0,\quad \forall t\in[0,t_e] \tag{1-5}$$

另一方面，假设汽车加速力和制动力的最大容限分别为 $M_1(>0)$和 $M_2(>0)$，那么 $u_1(t)$和 $u_2(t)$应该满足的约束条件为

$$0\leqslant u_1(t)\leqslant M_1,\quad -M_2\leqslant u_2(t)\leqslant 0 \tag{1-6}$$

式(1-4)～式(1-6)组成了该问题的物理约束条件。

一般地，把在时间区间$[t_0, t_f]$内满足控制约束条件的控制量称为容许控制，记所有容许控制的集合为 U，那么可以用 $\boldsymbol{u}(t)\in U$ 来表示控制 $\boldsymbol{u}(t)$ 是可容许控制。

同理，把在时间区间$[t_0, t_f]$内满足状态约束条件的状态量称为容许状态，记所有容许状态的集合为 X，那么可以用 $\boldsymbol{x}(t)\in X$ 来表示状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 是可容许状态。一般情况下，对于一个 n 阶系统，在终端时刻 t_f 处，要求系统的终端状态 $\boldsymbol{x}(t_f)$位于 $n+1$ 维空间(状态-时间)中的指定区域 S 中，把 S 称为系统的目标集，若终端时刻和终端状态均固定，则目标集 S 退化为一个点。

“可容许”在最优控制问题中是个重要的概念，它限定了控制变量和状态变量的取值范围，而最优控制的目标就是在“可容许集”中确定最优控制使得指定性能指标最优。

3. 性能指标

为衡量或评价一个系统运行性能的好坏或优劣，通常要定义一个合理的性能