# 自然科学

# 基础学科

# 教学与研究

TEACHING AND RESEARCH OF THE BASIC SUBJECTS IN NATURAL SCIENCE

总策划：戴剑平 王焰安 主编：周贺志 戴修法

成都科技大学出版社

# 自然科学基础学科
# 教学与研究



成都科技大学出版社
一九九五年十二月

(川)新登字 015 号
责任编辑:姜　涛
封面设计:李　林

# 自然科学基础学科教学与研究

策划:戴剑平　王焰安　　主编:周贺志　戴修法

成都科技大学出版社出版发行
*
思佳照排部电脑照排　　新文化印刷责任有限公司印刷
开本:787×1092　　1/16　　印张:43.5
1995年12月第1版　　1995年12月第1次印刷
印数:1—1000　　字数:135万字
ISBN7—5616—3033—6/N·9

定价:90.00元

# 自然科学基础学科教学与研究

总　策　划：戴剑平　　王焰安

主　　　编：周贺志　　戴修法

副　主　编：张德然　　陈　蕴

编　　　委：（按姓氏笔划为序）

马军海　王焰安　王念胜　王安斌

冯祥树　丘基祥　刘慧英　齐界民

朱岳高　李念章　陈　蕴　沈　友

张德然　苏仲阳　林铭其　周玉清

周之夫　周贺志　周传忠　杨显文

孟现磊　孟京华　罗　元　郑恒武

赵　和　秦正龙　黄宗本　盛平兴

戴美学　潘晓东　戴修法　戴剑平

# 中　卷

- 数学理论与研究
- 物理理论与研究
- 化学理论与研究
- 生物理论与研究
- 计算机理论与研究
- 地理学理论与研究
- 应用科学技术理论与研究

# 目 录

## ●数学基础理论教学与研究

# ●物理学基础理论教学与研究

## ●化学基础理论教学与研究

## ●生物学基础理论教学与研究



## ●计算机科学基础理论教学与研究

## ●地理学基础理论教学与研究



## ●应用科学技术研究

# 有限维伽罗华扩张的平行相似关系

天津师范大学　苏仲阳　副教授

如果域 F 为域 K 的正规扩张，则用 $F \mid K$ 表示。F 的所有不变 K 中任何元素的自同构构成的群，称为 F 在 K 上的伽罗华群，记作 $G(F \mid K)$。当 $G(F \mid K)$ 的固定域为 K 时，称 F 是 K 的伽罗华扩张。我们给出如下定义：

设 $F_1 \mid K_1$ 与 $F_2 \mid K_2$ 为有限维伽罗华扩张，如果它们的伽罗华群 $G(F_1 \mid K_1)$ 与 $G(F_2 \mid K_2)$ 同构，则称 $F_1 \mid K_1$ 与 $F_2 \mid K_2$ 平行相似，记作 $(F_1 \mid K_1) \mathrel{/\!\!/} (F_2 \mid K_2)$。

显然，平行相似是有限维伽罗华扩张之间的一个等价关系，因此平行相似关系决定同一域 K 的全部有限维伽罗华扩张的一个分类。

由下面命题知，具有平行相似关系的有限维伽罗华扩张是存在的。

**命题 1**　设多项式 $f(x) \in K[x]$，$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_r(x)$，其中 $p_i(x)(i=1,2,\cdots,r)$ 为互不相同的可分多项式，则 $f(x)$ 在 K 上的任何分裂域是平行相似的。

**证明**　设 $f(x)$ 在 K 上的一个分裂域为 $F=K(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$，其中 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 为 $f(x)$ 的全部根，则 F 为可分多项式集合 $S=\{p_1(x),p_2(x),\cdots,p_r(x)\}$ 在 K 上的分裂域，且维数 $[F:K]$ 有限，因此 F 为 K 的有限维伽罗华扩张。

设 E，F 为 $f(x)$ 在 K 上的任意两个分裂域，则它们是 K—同构的，令此同构映射为 $\varphi$，规定映射

$\Psi: G(F \mid K) \to G(E \mid K)$，$\sigma \mapsto \tau$，对 $\forall\ \alpha \in F-K$，$\varphi(\sigma(a)) = \tau(\varphi(a))$。$\sigma_1,\sigma_2 \in G(F \mid K)$，$\Psi(\sigma_i)=\tau_i$，$i=1,2$。若 $\sigma_1 \neq \sigma_2$，即存在 $a \in F-K$，　$\sigma_1(a) \neq \sigma_2(a)$，则 $\tau_1(\varphi(a)) = \varphi(\sigma_1(a)) \neq \varphi(\sigma_2(a)) = \tau_2(\varphi(a))$　所以 $\Psi$ 为单射。对任 $\tau \in \varphi \in G(E \mid K)$，$b \in E-K$，$\tau(b)=b' \in E-K$，有 $a,a' \in F-K$，且 $\varphi(a)=b$，$\varphi(a')=b'$。令 $\sigma = \varphi^{-1}\tau\varphi$，则 $\sigma$ 为将 a 变为 $a'$ 的 K—自同构，即 $\sigma \in G(F \mid K)$，使 $\varphi(\sigma(a)) = \varphi(a') = b' = \tau(b) = \tau(\varphi(a))$，所以 $\psi(\sigma)=\tau$，$\psi$ 为满射。

对 $\forall\ a \in F-K$，$\varphi(\sigma_1\sigma_2(a)) = \varphi(\sigma_1(\sigma_2(a))) = \tau_1(\varphi(\sigma_2(a))) = \tau_1(\tau_2(\varphi(a))) = \tau_1\tau_2(\varphi(a))$，

因此，$\psi(\sigma_1\sigma_2) = \tau_1\tau_2 = \psi(\sigma_1)\psi(\sigma_2)$，$\psi$ 为同构映射，有 $G(F \mid K) \cong G(E \mid K)$，故 $F \mid K$ 与 $E \mid K$ 平行相似。

平行相似的有限维伽罗华扩张有下面的性质。

**命题 2**　平行相似的有限维伽罗华扩张的维数相等。

**证明**　令 $(F_1 \mid K_1) \mathrel{/\!\!/} (F_2 \mid K_2)$，则 $[F_1:K_1] = |G(F_1 \mid K_1)| = |G(F_2 \mid K_2)| = [F_2:K_2]$。

**命题 3**　设 E，F 为域 K 的两个平行相似的有限维伽罗华扩张，则 E 与 F 为次数相同的可分多项式在 K 上的分裂域。

**证明**　令 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 是 F 在 K 上的一组基，而 $f_i(x) \in K[x]$ 是 $v_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的极小多项式。由于 $F \mid K$ 是有限维伽罗扩张，因此 F 为多项式 $f(x) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ 在 K 上的分裂域，并且 F 在 K 上可分，从而每个 $v_i$ 为 K 上可分元素。据本原元素定理，$F=K(v_1,v_2,\cdots v_n)$ 是 K 的单扩张，令 $F=K(\xi)$，$p_1(x) \in K[x]$ 为 $\xi$ 的可分极小多项式。由于 $F \mid K$ 的维数有限，因此 F 在 K 上正规可分，而 $\xi \in F$，所以 $p_1(x)$ 在 F

$[x]$中分裂，故 F 为 $p_1(x)$在 K 上的分裂域。

同理可令 $E=K(\eta)$，$p_2(x)\in K[x]$为η的可分极小多项式，则 E 为 $p_2(x)$在 K 上的分裂域。且有

$$\deg p_1(x)=[F:K]=[E:F]=\deg p_2(x),$$

命题证毕。

此命题的逆不成立。例如，多项式 $f(x)=x^4+4x^2+2$ 与 $g(x)=x^4+1$。它们均为有理数域 Q 上的四次可分多项式，其在 Q 上分裂域的伽罗华群分别为四阶循环群$\langle(1234)\rangle$与 Klein 四元群 $B_4$，显然它们不同构，因此 $f(x)$与 $g(x)$在 Q 上的分裂域不平行相似。

关于有限维伽罗华扩张平行相似的条件，有以下结果。

**命题 4** L，M 是有限维伽罗华扩张 $F\mid K$ 的两个中间域，且 $L\mid K$ 与 $M\mid K$ 是伽罗华扩张，如果 $G(F\mid L)$与 $G(F\mid M)$是 $G(F\mid K)$的 Sylow$p$—子群，则$(L\mid K)\not\mathbin{/\!/}(M\mid K)$。

**证明** 因 $L\mid K$ 与 $M\mid K$ 是伽罗华的，据基本定理，它们的对应子群 $G(F\mid L)$与 $G(F\mid M)$是 $G(F\mid K)$的正规子群，且有

$$G(L\mid K)\cong G(F\mid K)/G(F\mid L),G(M\mid K)\cong G(F\mid K)/G(F\mid M)。$$

而 $G(F\mid L)$与 $G(F\mid M)$是 $G(F\mid K)$的 Sylow$p$—子群，它们彼此共轭，即存在$\sigma\in G(F\mid K)$，使 $G(F\mid L)=\sigma G(F\mid M)\sigma^{-1}$。

令 $\varphi: G(F\mid L)\to G(F\mid M)$，$\tau\mapsto p$，如果$\tau=\sigma p\sigma^{-1}$，不难证明φ为同构映射，即有 $G(F\mid L)\cong G(F\mid M)$，从而

$$G(F\mid K)/G(F\mid L)\cong G(F\mid K)/G(F\mid M),$$

于是 $G(L\mid K)\cong G(M\mid K)$，故$(L\mid K)\not\mathbin{/\!/}(M\mid K)$。

此命题的逆不成立。例如，令 $L=Q(\sqrt{2})$，$M=Q(\sqrt{3})$，它们是有理数域的有限维伽罗华扩张 $F=Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$的且在 Q 上是伽罗华的中间域，其伽罗华群 $G(L\mid Q)$与 $G(M\mid Q)$均同构于 $S_4$的子群$<(12)>$，因此$(Q\sqrt{2}\mid Q)\not\mathbin{/\!/}(Q(\sqrt{3})$。而 $G(F\mid Q)\cong B_4$，$|G(F\mid L)|=|G(F\mid Q)|/|G(L\mid Q)|=2$，所以 $G(F\mid L)$与 $G(F\mid M)$均不为 $G(F\mid Q)$的 Sylow2—子群。

设 F 为域 K 的伽罗华扩张，如果 F 在 K 上的伽罗华群 $G(F\mid K)$是循环群，称 F 为 K 的循环扩张 $|G(F\mid K)|=n$ 时，称 F 为 K 的 n 次循环扩张。

**命题 5** 设 $E\mid F$ 与 $F\mid K$ 是两个有限维循环扩张，则 $E\mid K$ 与 $F\mid K$ 平行相似的充分必要条件是它们的维数相等。

**证明** 必要性显然，现证充分性。如果$[E:K]=[F:K]=n$，则 $G(E\mid K)$与 $G(F\mid K)$均为 n 阶循环群，因此它们同构，故$(E\mid K)\not\mathbin{/\!/}(F\mid K)$。

**推论** 循环扩张 $F\mid K$ 的任何两个维数相同的中间域均平行相似。

**命题 6** 设 $E\mid K$ 与 $F\mid K$ 均为 p(素数)次循环扩张，并且它们在 K 上可分，则 $EF\mid E$ 与 $EF\mid F$ 平行相似。

**证明** 由命题 5，$E\mid K$ 与 $F\mid K$ 平行相似。由于 $G(E\mid K)$与 $G(F\mid K)$为 p 阶循环群，因此它们是单群，据谢邦杰的《抽象代数学》(223 页)中的定理 3，$G(EF\mid E)\cong G(F\mid E\cap F)$，$G(EF\mid F)\cong G(E\mid E\cap F)$。

因 E，F 是 K 的正规可分扩张，$E\cap F$ 也在 K 上正规可分，所以 $E\cap F$ 在 K 上是伽罗华的，而 $G(E\mid K)$与 $G(F\mid K)$是单群，因此 $E\mid K$ 与 $F\mid K$ 除 K 外无其它中间域，于是 $E\cap F=K$，所以 $G(EF\mid E)\cong G(F\mid K)\cong G(EF\mid F)$，即 $EF\mid E$ 与 $EF\mid F$ 平行相似。

命题证毕。

# 零正规NCD—环的诣零根

天津师范大学　李正明　副教授

在普通环 R 中，$\forall\ r\in R$，显然 $ro=0$，$or=0$ 是成立的，但在 NCD—环中，这一事实不一定成立。

**定义 1**　设 R 为 NCD—环，若对 $\forall\ r\in R$，有 $ro=0$，$or=0$ 成立，称 R 为零正规的 NCD—环。

**定义 2**　设 R 为 NCD—环，$x\in R$，若存在自然数 n 使 $x^n=0$ 成立，称 x 为幂零元。

**定义 3**　设 S 为 NCD—环 R 的子集，如果存在自然数 n，使 $S^n=\{0\}$ 成立，称 S 是幂零的。

**定义 4**　设 S 为 NCD—环 R 的子集，如果 $\forall\ x\in S$，存在自然数 n，使 $x^{n(x)}=0$ 成立，称 S 是诣零的，其中 $n(x)$ 表示与 x 有关的自然数。

定义 4 指出了，如果 S 中每一个元都是幂零元，那么 S 就是诣零的，以下出现的 R 均表示 NCD—环，而不再说明。

**命题 1**　设 $S\subseteq R$，如果 S 是幂零的，那么 S 一定是诣零的。

**证明**　$\because$ S 是幂零的，就存在自然数 n，使 $S^n=\{0\}$，$\therefore \forall\ x\in S$，必有 $x^{n(x)}=0$，$\therefore$ S 是诣零的。

**命题 2**　设 $S\subseteq T\subseteq R$，若 T 是幂零(诣零)的，那么 S 也是幂零(诣零)的。

**证明**　设 T 是幂零的，$\therefore$ 存在自然数 n，使 $T^n=\{0\}$，又 $\because S\subseteq T$，$\therefore S^n\subseteq T^n=\{0\}$，故 $S^n=\{0\}$，即 S 也是幂零的。

若 T 是诣零的，则 $\forall\ x\in S\subseteq T$，存在自然数 $n(x)$，使 $x^{n(x)}=0$ 成立，$\therefore$ S 是诣零的。

**命题 3**　设 $I\trianglelefteq R$，则 $(R/I)^n=R^n/I$

**证明**　$\forall\ \bar{a}\in R/I$，则 $\bar{a}^m=(a+I)^m=a^m+I=\overline{a^m}$

$\therefore (R/I)^n=\{\bar{a}_1\bar{a}_2\cdots\bar{a}_n \mid a_i\in R\}=\{\overline{a_1a_2\cdots a_n} \mid a_i\in R\}=R^n/I$。

普通环 R 的理想 I 必是 R 的子环，但在 NCD—环中，理想不一定是子环，但对零正规 NCD—环来说，情形就不一样了。

**命题 4**　设 S 为零正规 NCD—环 R 的理想，则 S 必是 R 的子环。

**证明**　$\because S\trianglelefteq R$，$\therefore \forall\ r_1\cdot r_2\in R$，$\forall\ x_1,x_2\in S$，有 $-r_1r_2+(r_1+x_1)(r_2+x_2)\in S$　(1)

由 $r_1$，$r_2$ 的任意性，可取 $r_1=r_2=0$，由 R 是零正规的，$\therefore r_1r_2=0$，由(1)又知，$x_1x_2\in S$，即 S 对乘法闭合，显然 S 是 $(R,+)$ 的子群，故 S 是 R 的子环。

**命题 5**　设 I、J 为零正规 NCD—环 R 的诣零理想，则 $I\cap J$ 也是 R 的诣零理想。

**证明**　$\because I\trianglelefteq R$，$J\trianglelefteq R$. $\therefore$ 由命题 4 知 $J\leqslant R$，故由 $I\leqslant R$，$J\leqslant R$，$\therefore I\cap J\subseteq J\subseteq R$，再由命题 2 知，$\because$ J 是诣零的，$\therefore I\cap J$ 也是诣零的。

**命题 6**　设 $I\trianglelefteq R$ 且 I、R 均为诣零的，则 $R/I$ 也是诣零的。

**证明** $\because R \overset{\varphi}{\simeq} R/I$. $\therefore \forall\ \bar{a} \in R/I$,存在 $a \in R$,使 $\varphi: a \to \bar{a}$,$\because R$ 是诣零的,$\therefore$ 对 $a \in R$ 存在自然数 $n(x)$,使 $a^{n(x)}=0$ $\quad \therefore \forall\ \bar{a} \in R/I$ 由命题 3 知,$\bar{a}^{n(x)}=\overline{a^{n(x)}}=\bar{o}$,故 $R/I$ 是诣零的。

**定理 1** 设 $I \triangle R$,则 R 是诣零的$\Leftrightarrow I, R/I$ 都诣零。

**证明** $\Rightarrow$若 R 是诣零的,由命题 2 知 I 是诣零的,由命题 6 知 $R/I$ 是诣零的。

$\Leftarrow$若 $I, n/I$ 都是诣零的,$\forall\ a \in R$,由 $R \sim R/I$,$\therefore \varphi: a \to \bar{a} \in R/I$,由 $R/I$ 是诣零的,$\therefore$ 存在自然数 $n(a)$ 使 $\bar{a}^{n(a)}=\overline{a^{n(a)}}=\bar{o}$,故 $\varphi: a^{n(a)} \to \overline{a^{n(a)}}=\bar{o}$,$\therefore a^{n(a)} \in \mathrm{Ker}\ \varphi=I$,$\because I$ 是诣零的,$\therefore$ 存在自然数 $k$,使 $a^{n(a)k}=0$。故 R 是诣零的。

**命题 7** 设 I、J 是 NCD—环 R 的诣零理想,则 $I+J$ 也是 R 的诣零理想。

**证明** 显然 $I+J \triangle R$,又 $I \subseteq I+J$,$\therefore I$ 是 $I+J$ 的诣零理想,又 $I \cap J \subseteq J$,由命题 5 知,$I \cap J$ 是 J 的诣零理想,故得 $(I+J)/I \simeq J/I \cap J$。由于 J 与 $I \cap J$ 均是诣零理想,由命题 6 知 $J/I \cap J$ 是诣零的,故 $(I+J)/I$ 是诣零的。由于 $I, (I+J)/I$ 都是诣零的,由定理 I 知 $I+J$ 是诣零的。

**定理 2** 设 $I_x (x \in A)$ 是零正规 NCD—环 R 的诣零理想,则 $\sum I_x$(元素为有限和)是诣零的。

**证明** 归纳法,由命题 7 知两个诣零理想之和是诣零的。假设 n 个诣零理想之和是诣零的成立,当 $n+1$ 个诣零理想之和 $I_1+I_2+\cdots+I_n+I_{n+1}=I+I_{n+1}$。其中 $I=I_1+I_2+\cdots+I_n$ 由归纳假设知 I 是诣零的,$\therefore I+I_{n+1}$ 是诣零的,即 $n+1$ 个诣零理想之和是诣零的。总之,当 $|A|<\infty$ 时,$\sum I_x$ 是诣零的。

**定义 5** 零正规 NCD—环 R 的一切诣零理想之和叫 R 的诣零根,记为 $n(R)$

**定理 3** 设 R 是零正规 NCD—环,则 $n(R)$ 是 R 的最大诣零理想。且 $n(R)$ 是使 $R/n(R)$ 无非零诣零理想的最小理想。

**证明** 设 I 是 R 的任一诣零理想,由诣零根定义知 $I \in n(R)$,$\therefore n(R)$ 是 R 的最大诣零理想。

下证 $R/n(R)$ 无非零诣零理想:

**设** $\forall\ \bar{J} \in R/n(R)$ 且为诣零的,由 $R \overset{\varphi}{\simeq} R/n(R)$,则 $J=\varphi^{-1}(\bar{J}) \in R$(J 为 $\bar{J}$ 在自然映射下的原象)。$\therefore \forall\ x \in J$,有 $\varphi(x) \in \bar{J}$,$\because \bar{J}$ 是诣零的,$\therefore$ 存在自然数 k,使 $\varphi(x)^k=\varphi(x^k)=0$,$\therefore x^k \in \mathrm{Ker}\ \varphi=n(R)$,由于 $n(R)$ 是诣零理想,$\therefore$ 存在自然数 $l$,使 $x^{kl}=0$,$\therefore J$ 是诣零的,故 $J \in n(R)$,$\therefore \bar{J}=\bar{O}$,故 $R/n(R)$ 无非零诣零理想。

再证 $n(R)$ 是使 $R/n(R)$ 无非零诣零理想的最小者,设 I 是使 $R/I$ 无非零诣零理想的任一理想,$\because n(R)$ 是 R 的诣零理想,又 $I \cap n(R) \subseteq n(R)$,由命题 2 知,$I \cap n(R)$ 是诣零的,显然 $I \subseteq I+n(R)$,由定理 2 知,$I+n(R)$ 是诣零的,$\therefore (I+n(R))/I \simeq n(R)/I \cap n(R)$,$\because (I+n(R))/I$ 是 $R/I$ 的诣零理想,由 $R/I$ 无非零诣零理想,$\therefore (I+n(R))/I=I$,$(\because \bar{o}=I)$ $\therefore I+n(R) \subseteq I$,故 $n(R) \subseteq I$,即 $n(R)$ 是使 $R/I$ 无非零诣零理想的最小诣零理想。

**(高教局科研基金资助课题)**