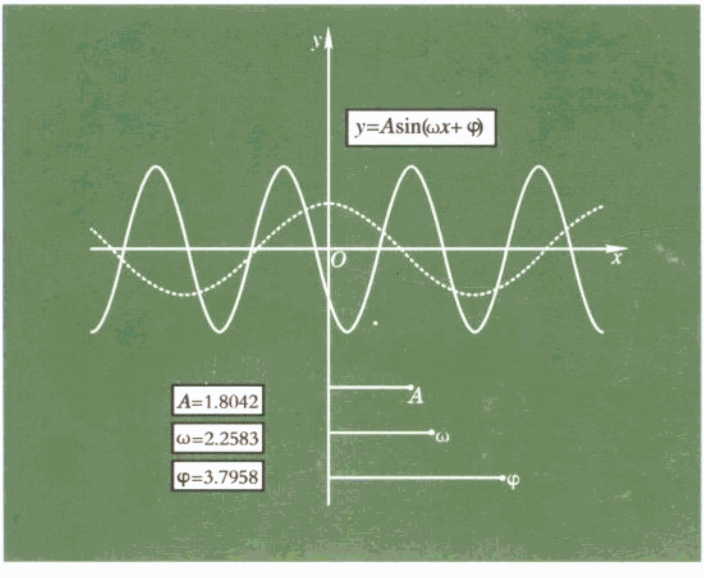
经全国中小学教材审定委员会2004年初审通过

Mathematics

普通高中课程标准实验教科书（必修）

数学

第二册



湖南教育出版社

主　　编　张景中　陈民众
执行主编　李尚志

本册主编　李尚志
编　　委　郑志明　查建国　贺仁亮
　　　　　　罗培基　孟实华

南辕北辙的启示

你听说过南辕北辙的故事吗?

这个故事说的是我国春秋战国时代的事：有一个人要到楚国去，他的车很结实，马跑得很快，准备了足够的钱和充足的食物，每天从早到晚拼命赶路，为的是能早一天到达楚国.

可是，他不但没能够到达楚国，反而离楚国越来越远.

你猜猜为什么?

答案很简单：楚国在南方，可是他却拼命往北方走!

这个故事说明，要达到一个目标，不但要拼命努力，更重要的是方向要正确. 方向错了，走得越快离目标越远.

数学是在认识和改造现实世界的过程中产生的. 现实世界中，万物皆动. 因此需要描述运动过程中物体位置的变化.

从南辕北辙的故事可以知道，要描述一个运动物体位置的变化，除了要指明所走的距离，还必须指明运动的方向.

比如一艘船从某个码头出发，行驶了 200 千米，你能确定它的位置吗? 不能. 为了确定它的位置，需要知道它朝什么方向行驶了 200 千米.

假如一艘船从某个码头出发，先行驶了 200 千米，

又行驶了300千米，它与码头的距离是500千米吗？不见得．如果它先朝南200千米，再朝北（或朝东，或朝东北）300千米呢？两次运动“加起来”，离码头的距离就不是500千米．到底是多少千米？你不妨先自己想一想，试一试．

由此可见，要表示位置的变化，仅仅知道运动的距离是不够的，还必须考虑运动的方向．既考虑距离、也考虑方向的量叫作向量．位置的变化要用向量来描述．

你在初中已经学过一些几何知识．几何是研究图形的性质的．图形是由点构成的．只要知道了图形的每一点（或者一些关键点）的位置，就知道了这个图形的形状和位置．怎样描述每个点的位置？首先要取一个已知点作为基准点，也就是我们通常所说的原点．只要说清楚了从原点到每一个点的方向、距离，就说清楚了这个点的位置．原点到这个点的方向和距离可以用一个向量来表示，这个向量也就表示了这个点的位置．将每个关键点的位置都用向量来表示，就将这个图形描述清楚了．将这些向量进行适当的运算，就好象我们对于实数进行加、减、乘运算，或者对代数式进行展开和合并一样，可以算出几何图形的性质．你在以前是用推理的方法研究几何，而向量可以帮助你用计算的方法、代数的方法来研究几何．你愿意接受它的帮助吗？

物体的运动，有平动、有转动．平动用位置的变化来描述，转动通过方向的变化来描述．

转动过程中方向的变化可以用角来度量．

在初中你已经学习了0°到360°的角．但物体的转

动不受360°的限制，可以无止境地转动下去，产生任意大小的角，也可以向相反的方向转动，产生小于0°的角.

在转动过程中，转动物体上的点的坐标随着角的改变而变化. 坐标的变化与角的变化之间的关系，用三角函数来描述.

物体的转动具有周期性，转动物体上点的位置随着角的增加周而复始地变化. 因此三角函数具有周期性，是处理周期现象的重要数学工具.

既然向量和三角函数是为了解决现实世界中的问题而产生的，学习它们的最好途径就是自己尝试去解决这些问题，为此，应设法找出适当的工具和方法，也就是尝试自己把这部分知识重新发明（探索）一遍. 这不但是学习本书的好方法，也是学习任何知识的好方法. 沿着这个正确方向努力前进，哪怕前进得慢一些，总会一步步向目标接近.

在信息技术飞速发展的今天，学习和研究数学不再仅仅靠纸和笔，计算机及其软件成为我们的好帮手。本书安排了一些数学实验，让你在计算机的帮助下，通过观察美丽的图形，体会电子琴为什么能模拟出不同乐器的声音，体会光的干涉原理. 你喜欢吗?

学好数学需要付出艰苦的努力，同时又能从数学的真和美中享受到快乐. 让我们一起来努力，在艰苦和快乐中前进吧!

作　者

2004年5月

目录

第3章　三角函数

第5章 三角恒等变换

第3章

三角函数

东升西落照苍穹，
影短影长角不同.
昼夜循环潮起伏，
冬春更替草枯荣.

转动是重要的运动形式，与周期现象密切相关.

三角函数刻画了平面上转动过程中点的位置变化规律，是研究周期现象的重要数学模型.

数学建模

怎样度量平面上的转动

转动导致方向的变化.

平面上的转动都有一个转动中心 O，它是转动过程中唯一的不动的点，其余所有的点都围绕这个中心转动.

转动中心 O 之外的每个点 A 处于 O 的某个方向上，这个方向由射线 OA 代表. 在转动过程中，射线 OA 绕 O 旋转到射线 OB，射线所指的方向就发生变化，由原来射线 OA 的方向变到射线 OB 的方向，形成 $\angle AOB$.

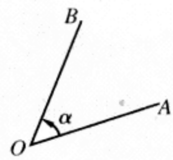


图 3-1

$\angle AOB$ 的大小怎样量?

这个角的大小就度量了转动的“大小”，也度量了从射线 OA 到 OB 方向的改变的“大小”.

连续几天观察月亮升起的时间，看它转一圈是不是 24 小时.

转动是可以循环和周而复始的. 一种最自然、最容易想到的描述转动的方式就是看它转了多少圈. 角的始边 OA 经过转动之后第一次回到原来位置，就称为转动了一周，这样产生的角称为周角. 如果重复原来的历程继续旋转，再次回到原来位置，就是周角的 2 倍. 反过来，也可能还没有转到一周就停止转动了，则可以考虑它转了一周的几分之几.

始边转半周形成什么角? 转 $\frac{1}{4}$ 周形成什么角?

将周角分成 360 等份，用“周”的 $\frac{1}{360}$ 作为度量单位，称为度 (degree). 1 度的角记作 1°. 一个角是 1° 的多少倍，就称这个角是多少度的角. 这样来度量角的大小的方式称为角度制 (degree measure).

这样，周角的大小就是 360 度，记作 360°. 周角的一半就是 180°，称为平角 (straight angle). 平角的一半也就是周角的 $\frac{1}{4}$，

称为直角（right angle），就是90°.

为了更精确地度量角的大小，还将1°的$\frac{1}{60}$作为更小的单位，称为“分”，1分的角记作$1'$. 同时还将$1'$的$\frac{1}{60}$称为“秒”，1秒的角记作$1''$.

也可以不用“周”或它的$\frac{1}{360}$来度量转动与角，而直接用转动图形上的点在转动过程中走的路程来度量. 对于角来说，就是用它的始边OA上的点在转动过程中所走的路程来度量. 但这有一个问题：始边OA上不同的点在转动过程中虽然转过的圈数都是相同的，但所走的路程却不同，离转动中心O越远，走的路程就越远. 试一试，你能不能想个办法解决这个问题，创造出另外一种度量角的大小的方法？

想不出来也不要紧，在下面的课程中我们一起来研究.

3.1 弧度制与任意角

万物皆变，万物皆动.

有平动，有转动.

平动改变位置，转动改变方向.

平动量距离，转动量什么？

3.1.1 角的概念的推广

在初中数学中，我们已经会用角度来量 $0°$ 到 $360°$ 的角.

转动超过一圈，角度就超过 $360°$.

既然角是描述转动的，是由转动产生的，就可能不只转动一圈而可能转很多圈. 比如，时钟的分针每小时转一圈，一天 24 小时就转 24 圈. 行驶的汽车、火车的车轮，它们显然都不能只旋转一圈，而要旋转很多圈. 每旋转一圈的角是 $360°$，2 圈就是 $360°$ 的 2 倍，1.5 圈就是 $360°$ 的 1.5 倍，等等.

例 1 时钟的分针每小时转 1 圈，时针每 12 小时转 1 圈. 问：

每经过 16 小时，分针旋转的角度是多少度，时针旋转的角度是多少度？

解 分针每小时转 $360°$，16 小时转 $360°\times16=5\ 760°$.

时针每小时转 $360°\div12=30°$，16 小时转 $30°\times16=480°$.

图 3-2

平面上的旋转有两个相反的旋转方向：顺时针方向和逆时针方向. 为了区别我们通常规定：

规定了一个旋转方向为正，与它相反方向旋转的角度就为负.

一条射线绕着端点以逆时针方向的旋转为正向，所成的角称为正角，用正的角度来表示；顺时针方向旋转所成的角称为负角，用负的角度来表示；不旋转所成的角称为零角，用 $0°$ 表示.

如果在平面上建立了直角坐标系，使角的顶点与坐标原点重合，

角的始边与 x 轴的非负半轴重合，那么，我们规定：角的终边（除端点外）落在第几象限，就说这个角是第几象限角.

例 2 设在平面上以 O 为原点建立了直角坐标系，OX，OX' 分别是 x 轴的非负半轴和非正半轴，OY，OY' 分别是 y 轴的非负半轴和非正半轴. 写出：

(1) 由 OX 沿逆时针方向旋转到 OY，OX'，OY' 所成的角度；

(2) 由 OX 沿顺时针方向旋转到 OY，OX'，OY' 所成的角度.

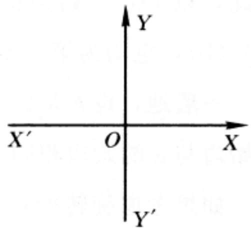


图 3-3

解 (1) 所成角度分别为 $90°$，$180°$，$270°$；

(2) 所成角度分别为 $-270°$，$-180°$，$-90°$.

例 3 设在平面上建立了直角坐标系，使角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合. 试确定下列各角分别是第几象限角.

(1) $1\,700°$；　　(2) $-820°$.

解 (1) 1 700 除以 360 商 4 余 260，因此 $1\,700° = 4 \times 360° + 260°$.

也就是说，从角的始边 Ox 逆时针旋转到终边 OP，在旋转了 4 整圈之后再旋转 $260°$. 始边 Ox 每旋转 1 圈（$360°$）之后就回到原来的位置 Ox，旋转了 4 圈（$4 \times 360°$）之后仍然回到初始位置 Ox，然后再从这个位置旋转 $260°$ 到达终边所在的位置 OP，如图 3-4（a）. 因此，以 Ox 为始边的 $1\,700°$ 角与 $260°$ 角的终边位置相同，均为第三象限角.

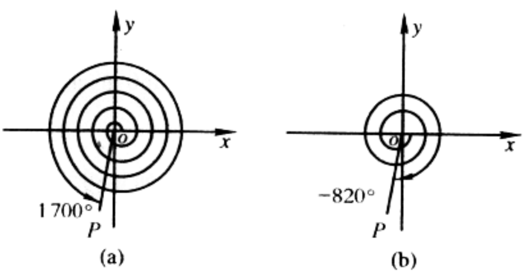


图 3-4

(2) $2\times360^\circ<820^\circ<3\times360^\circ$，故 $(-2)\times360^\circ>-820^\circ>(-3)\times360^\circ$，$-820^\circ=(-3)\times360^\circ+260^\circ$.

判断角所在的象限，只管终边位置，不计较旋转过程.

由始边 Ox 顺时针旋转 820° 到终边 OP；可以先顺时针旋转 3 圈回到原来的位置 Ox，再由 Ox 逆时针旋转 260° 到终边 OP 的位置. 因此，以 Ox 为始边的 -820° 角与 260° 角的终边位置相同，如图 3-4 (b)，也均为第三象限角.

一般地，设 k 是任意的整数，α 是任意角，如果角 $\beta=k\cdot360^\circ+\alpha$ 的始边与 α 的始边相同(仍然是 OA)，则它们的终边也相同.

如果考虑旋转的过程，则 α 与 $k\cdot360^\circ+\alpha$ 是不同的角，相差 k 圈. 但如果只考虑旋转的结果而不考虑过程，也就是说只考虑终边与始边的相对位置，如果角 α 与 $k\cdot360^\circ+\alpha$ 的始边重合，则它们的终边也重合.

设角 $\alpha=\angle AOB$，则所有以 OA 为始边，OB 为终边的角都是 α 与整数个周角的和，组成集合

$$S=\{\beta\mid\beta=\alpha+k\cdot360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

为了表示平面上点的位置，我们可以在平面上建立直角坐标系，以每一点 P 的坐标(x,y)来表示这个点 P 的位置，实际上是表示点 P 相对于原点 O 的位置. 但在实际应用中，有的时候要从点 O 测量点 P 的坐标并不容易，而测定原点 O 到点 P 的方向和距离更容易一些. 点 O 到点 P 的距离可以用线段 OP 的长度来表示. 但怎样表示 OP 的方向呢？可以取 x 轴的非负半轴 Ox 旋转到射线 OP 所成的 $\angle xOP$ 来表示. 从 Ox 旋转到 OP 的 $\angle xOP$ 不只一个，而是无穷多个，它们相互之间相差周角的整数倍. 但如果我们不关心旋转过程只关心 OP 的方向，可以规定选取 $\angle xOP$ 在范围$[0^\circ,360^\circ)$之内. 对于不在这个范围内的 $\angle xOP$，可以将它加减 360° 的适当的整数倍化为这个范围内的角.

我们约定：将角置于平面坐标系中时，如果没有特别指明角的始边，就是说这个角的始边与 x 轴的非负半轴重合.

例 4 在区间$[0^\circ,360^\circ)$内找出与下列角的始边和终边相同的角 α：

(1) $1\,700^\circ24'$；　　(2) $-819^\circ36'$.

解 （1）$\alpha=1\ 700°24'-4\times360°=260°24'$；

（2）$\alpha=-819°36'+3\times360°=260°24'$.

例 5 试写出顶点与原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，角的终边落在 y 轴非负半轴上的角的集合.

解 ∵ $\angle xOy=90°$，

∴ 所有这些角的集合为 $\{\beta \mid \beta=90°+k\cdot360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

练 习

1. "第一象限角是锐角"这句话对吗？请说明理由.
2. 已知角的顶点与直角坐标系的原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，试作出下列各角并指出它们是第几象限角.

   （1）30°；（2）120°；（3）−120°；（4）420°；

   （5）13 290°；（6）−45°；（7）−210°；（8）−1 300°.
3. 指出上题中的角在 [0，360°) 内与它终边相同的角分别是多少？

3.1.2 弧度制

例 1 如图 3-5，设线段 OA 的长度为 1. 绕端点 O 旋转角 α 到 OB. 旋转过程中 A 经过的路线是从 A 到 B 的一段圆弧 $\overset{\frown}{AB}$.

（1）当 $\alpha=1°$ 或 $\alpha=n°$ 时，圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度是多少？

（2）当圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 长度为 1 时，α 等于多少度？

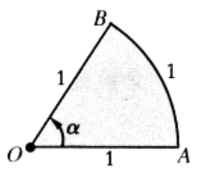


图 3-5

这段圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度与角 α 的大小成正比，可以用来度量角 α 的大小.

解 （1）当 $\alpha=360°$ 时，圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 就是以 $OA=1$ 为半径的圆周，长度为 2π.

当 $\alpha=1°$ 时，圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度等于圆周长 2π 的 $\frac{1}{360}$，为

$$\frac{2\pi}{360}=\frac{\pi}{180};$$

当 $\alpha=n^\circ$ 时，圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度等于 $\frac{\pi}{180}$ 的 n 倍，为 $\frac{n\pi}{180}$.

（2）设当 $\alpha=n^\circ$ 时弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度为 1，即 $\frac{n\pi}{180}=1$，从而

$$n=\frac{180}{\pi}\approx 57.30,\ \alpha\approx 57.30^\circ\approx 57^\circ 18'.$$

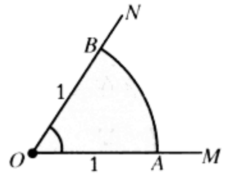


图 3-6

除了角度制，还有另外一种常用的方式来度量角：如图 3-6，在 $\angle MON$ 的始边 OM 上取点 A 使 OA 的长度等于 1，用从 OM 到 ON 旋转过程中 A 所经过的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度来度量角 $\angle MON$（也就是 $\angle AOB$）的大小．在旋转过程中，A 所画出的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 是以角的顶点为圆心、半径为 1 的圆的一部分，$\angle AOB$ 就是这段圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角．半径为 1 的圆称为**单位圆**（unit disk）．因此，上述这种方式就是用单位圆中的弧长来度量所对圆心角的大小，单位圆上长度为 1 的圆弧所对的圆心角取为度量的单位，称作**弧度**（radian）．这样的单位制称为**弧度制**（radian measure）．

按照例 1 的计算结果，

$$1\text{ 弧度}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx 57^\circ 18',$$

$$\text{周角}=360^\circ=2\pi\text{ 弧度},$$

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\approx 0.01745\text{ 弧度}.$$

上面这三个等式就是角度与弧度两种单位制之间的换算公式．

角度制与弧度制都是度量角的大小的单位制，只不过度量单位的大小不同：

角度制以周角的 $\frac{1}{360}$ 作为度量单位，称为“度”；弧度制以周角的 $\frac{1}{2\pi}$ 作为度量单位，称为“弧度”．

以上以单位圆周上的弧 AB 的长来度量它所对的圆心角 $\angle AOB$，得到的还只是 $\angle AOB$ 的弧度数的绝对值．与角度制类似，在弧度制中我们也将沿逆时针方向转动所成的角定为正角，弧度数为正；沿顺时针方向转动所成的角定为负角，弧度数为负；如果始边没有旋转，

为什么在角度制之外还要引入弧度制？为什么在科学研究中更偏向于使用弧度制而不偏向于使用角度制？这是因为弧度制能使微积分中的有关公式特别简单．你以后学了高等数学就会知道．

所成的角为零角，弧度数为0.

在科学应用中，用弧度制表示角的时候，单位"弧度"通常略去不写：比如写 $\alpha=1$ 表示 α 是1弧度的角，即 $\alpha\approx 57°18'$；$\alpha=2\pi$ 则表示 $\alpha=2\pi$ 弧度，即 α 是周角. 因此，当直接用一个实数来表示角的时候，一定是指的这个角的弧度数.

为什么可以将"弧度"略去？在下面的例2中可以知道其中的理由.

但需特别注意：用角度制表示的角的单位一定不能省略，如将 $\alpha=30°$ 写成 $\alpha=30$，就变成 $\alpha=30$ 弧度 $\approx 30\times 57°18'$，与 $\alpha=30°$ 相差悬殊.

例2 在半径为 r 的圆中，设圆心角 $\alpha=\angle AOB$ 所对的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度为 l，此时扇形面积记为 S.

(1) 已知 $\alpha=n°$，求 l；

(2) 已知 $\alpha=x$ 弧度，求 l 和 S；

(3) 已知 l，求 α 的弧度数 x 的绝对值 $|x|$.

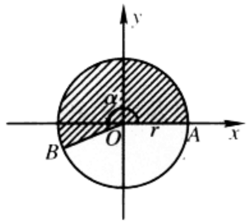


图 3-7

解 半径为 r 的圆周长为 $2\pi r$. 也就是说：周角所对的弧长为 $2\pi r$.

(1) $n°$ 角的大小是周角的 $\frac{|n|}{360}$，所对的弧长应是周角所对弧长 $2\pi r$ 的 $\frac{|n|}{360}$. 即

$$l=\frac{|n|}{360}\cdot 2\pi r=\frac{|n|\pi r}{180}.$$

(2) x 弧度角的大小是周角的 $\frac{|x|}{2\pi}$，所对弧长应是周角所对弧长 $2\pi r$ 的 $\frac{|x|}{2\pi}$，所形成扇形面积是整个圆的面积 πr^2 的 $\frac{|x|}{2\pi}$. 即

$$l=\frac{|x|}{2\pi}\cdot 2\pi r=|x|r,$$

$$S=\frac{|x|}{2\pi}\cdot \pi r^2=\frac{1}{2}|x|r^2.$$

求弧长 l 的另一种解法：在圆心角 α 相同的条件下，α 所对的弧长与圆的半径成正比. x 弧度的角在半径为1的圆中所对的弧长为 $|x|$，在半径为 r 的圆中所对的弧长应是 $|x|$ 的 r 倍，即

$$l=|x|r.$$

(3) 在圆心角 α 相同的条件下，α 所对的弧长与圆的半径成正