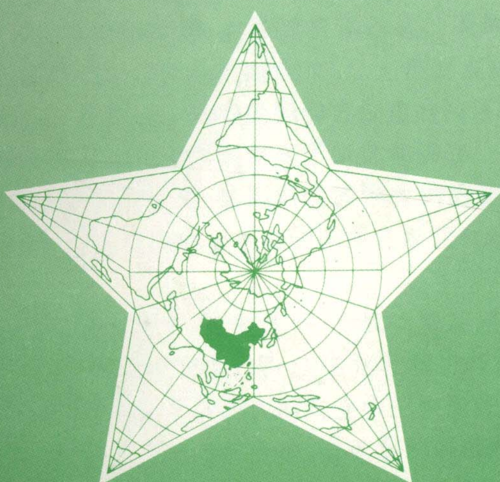
解放军信息工程大学测绘学院教材

大地测量概论补充教材

吕志平 编



解放军信息工程大学测绘学院

二〇〇二年七月

序　言

当前学科发展走向综合是一个普遍的趋势。在测绘学内部，各学科除有着各自独立的、平行的发展之外，学科间集成和综合的理论方法、应用模式和实用系统应运而生。这是当前信息革命浪潮的必然结果。计算机已经成为测量、遥感和制图工作的共同硬件平台，而现代通讯技术又为各单一系统的集成化提供了数据传输的保障。在此背景下，人们很自然地提出了“测绘工程一体化”的概念，这就是目前国内很流行的提法——“3S”集成。

所谓“3S”，就是：GPS(全球定位系统，应理解为以 GPS 为代表的现代定位技术，故包含惯性测量系统、双星定位系统等)、RS(遥感，含数字摄影测量系统 DPS)和 GIS(地学信息系统，含专家系统 ES)。GIS、RS 和 GPS 三者有机的集成，构成了整体的实时的和动态的对地观测、分析和应用的综合系统。例如：以 GIS 中的电子地图及其分析功能作辅助的 GPS 实时差分定位系统可以应用于各种导航目的，如作战动态指挥、交通管理、公安侦破、大田农作物因地施肥、科学耕种和海上捕鱼等；利用 GPS、GIS 和 CCD 摄像机加 DPS 进行自动影象获取和处理的集成系统，可以用于高速公路(铁路)线路状况的自动监测、GIS 数据的实时更新以及战场的现场侦察和自动化指挥等；在导弹机动作战的测地保障中，应用 GPS 和 GIS 相结合的集成系统，可以实现机动分队的实时定位、已知控制点的快速寻找、发射场区的选择、垂线偏差值的快速提供以及发射点地心坐标和方位角的快速联测等；……。应用实例不胜枚举，这表明“3S”集成的发展为测绘学科带来了机遇和挑战。

为了在测绘教育中顺应时代的发展，按照新编教学大纲的要求，我们在原《大地测量概论》的基础上增编了本教材，作为我院航测系和制图系各专业大地测量课程的补充教材。本教材包含以下两部分内容：

一、GPS 定位　GPS 技术除用于大地测量外，已成功地应用于航空和航天遥感中。应用研究表明，利用设在地面参考点和飞机上的 GPS 接收机进行动态载波相位测量，采用光束法区域网平差，可以满足各种比例尺航测成图对空中三角测量的精度要求。星载 GPS 接收机也已问世，它们可用于低轨卫星的精确定位，进而实现遥感地面目标的自动定位。

二、误差理论和数据处理　数据和处理模型的精度和可靠性是衡量系统质量的重要标志。本教材为制图专业加入了这一部分内容(航测专业将专设该门课程)。由于原《大地测量概论》中“高斯投影”一章不列入制图专业的教学范围，因此加入“误差理论和数据处理”一章后，航测、制图两专业“大地测量概论”课程的教学内容在总体上基本相当。

本教材由吕志平副教授编写。许其凤教授、随立芬副教授审阅了本书的初稿并提出了修改意见；教研室吴晓平主任为本教材的框架和教学计划的落实花费了不少心血，谨此一并致谢。

编者

1995 年 12 月

目　录

第一章　误差理论和数据处理……………………………………………………………… 1
§1.1　误差理论 ……………………………………………………………………… 1
一、测量平差的概念 ……………………………………………………………… 1
二、中误差和权 …………………………………………………………………… 2
三、相对误差 ……………………………………………………………………… 6
四、误差传播定律与权倒数传播定律 …………………………………………… 7
§1.2　参数平差 ……………………………………………………………………… 9
一、参数平差概述 ………………………………………………………………… 9
二、参数平差原理…………………………………………………………………… 11
三、应用例…………………………………………………………………………… 14
第二章　GPS 定位 ………………………………………………………………………… 19
§2.1　GPS 导航定位 ……………………………………………………………… 19
一、导航与大地测量………………………………………………………………… 19
二、GPS 概况 ……………………………………………………………………… 20
三、GPS 伪距导航原理 …………………………………………………………… 21
四、伪随机码测距…………………………………………………………………… 22
五、卫星位置和卫星钟差…………………………………………………………… 25
§2.2　差分 GPS 定位 ……………………………………………………………… 26
一、GPS 实时定位的主要误差源 ………………………………………………… 27
二、差分 GPS 原理 ………………………………………………………………… 28
§2.3　GPS 载波相位测量 ………………………………………………………… 31
一、载波相位测量…………………………………………………………………… 31
二、载波相位测量的数学模型……………………………………………………… 32
三、GPS 相对测量 ………………………………………………………………… 33

第一章　误差理论和数据处理

§1.1　误差理论

一、测量平差的概念

在测量工作中，观测者的感觉器官、测量时使用的仪器、观测过程所处的客观环境以及观测目标本身等，都不可能是绝对理想的，这就必然会在一定程度上影响观测质量，使一切测量数据都不可避免地带有误差。这里所说的“测量数据”不一定就是指由测量仪器直接获得的数据，而是一个广义的概念。任何处理过程的输入数据均属本章所指的“测量数据”的范畴，例如：地形测图时布设图根控制网所采用的已知大地控制点坐标、DTM 模型内插计算时已知格网点的高程数据、地学分析时所采用的地图数据库数据等。

测量误差主要来源于①从事测量的人；②使用的测量仪器；③测量时所处的自然条件；④测量对象。这是因为观测者感觉器官的鉴别能力、测量仪器的精密灵敏程度、外界自然条件的千变万化以及目标本身的清晰状况等，都直接影响观测结果。一般称以上构成测量过程的四个要素为测量条件。不难理解：测量条件好，则测量结果精度高；测量条件差，则测量结果精度低；测量条件相同，则测量结果精度相等。即一定的测量条件对应于一定的测量精度。测量条件相同的观测，称为等精度观测。

数据误差按性质可分为偶然误差、系统误差和粗差三类。所谓粗差是指粗心大意或仪器故障所造成的错误，如测错、计算程序编错等。在实践中应尽量避免产生粗差并能及时发现和排除粗差。系统误差是由测量条件中某些特定因素的系统性影响而产生的误差。系统误差的大小和符号固定不变或呈系统性的变化，例如，用带有一定误差的尺子量距时，量距结果会带有系统误差；通过 DTM 模型内插待定点高程时，由于内插模型选择得不合适产生的模型误差也是系统误差的一个例子。在具体的测量或数据处理工作中，视具体问题可以采用特定的方法来消除或减弱系统误差的影响。例如对于上两例，量距时的尺长误差可以通过加尺长改正的方法给予消除；DTM 内插计算前可在大量试验和分析的基础上建立最佳模型。粗差和系统误差都不是经典误差理论的研究对象，经典误差理论主要研究的是偶然误差及其处理方法。

所谓偶然误差是指由测量条件中的偶然因素影响产生的误差。偶然误差是许多偶然因素所产生的小误差的代数和。例如，测角误差主要是由照准、读数等因素引起的误差所构成的，而每项误差又来自许多偶然因素，如照准误差就可能是由于脚架或觇标晃动和扭转、风力风向变化、目标背景、大气折光与大气透明度等的影响，而其中的任何一种影响又是产生于许多偶然因素。可见，测角误差是许许多多小原始误差的代数和。由概率论中的中心极限定理可知，测量偶然误差是服从正态分布的。

偶然误差就单个而言，其数值和符号存在着不确定性，而在总体上却有着一定的统计规

律性。由概率论知，这种统计规律性可表述为：

(1)在一定测量条件下，偶然误差的数值不超出一定限值，或者说超出一定限值的误差出现的概率为零。

(2)绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的概率大。

(3)绝对值相等的正负误差出现的概率相同。

这就是偶然误差的三个概率特性。这三条特性可简要概括为：界限性、聚中性和对称性，它们充分揭示了表面上似乎并无规律性的偶然误差的内在规律。

在一切测量过程中，偶然误差是不可避免的。事实上不难发现，当测量得足够精细时，同一量反复多次观测的各结果间，常有一定的差异；对存在一定数学关系的几个量进行观测的结果，常常并不能完全满足已知的数学关系。如：一段距离的反复量测结果不尽相同，平面三角形三内角观测值之和不等于 180°等。这些现象都是在测量结果中含有误差的反映。

因为测量必有误差，于是就产生了这样的问题：如何处理带有误差的观测值，求出最为可靠的结果；如何评定测量结果的精确程度。

为了检验观测结果的正确性，并提高观测结果的可靠性，实践中的有效方法是进行多余观测(过剩观测)。所谓多余观测就是多于必要观测的观测。例如，只需进行一次量测即可确定一段距离的长度，而实际上往往观测多次。其中一次是必需观测，其它是多余观测；又如，只要测出一平面三角形三内角中的任意两个，第三角即可由 180°减另两角得出。但在实际作业中，通常是三内角都进行观测，其中两个是必需观测，另一个是多余观测。

由于测量结果含有误差，这种多余观测必然产生不符值。例如，前边提到的同一个量的几个观测结果之间互有差异、平面三角形三内角观测值之和不等于 180°等。因此，多余观测揭露了由于测量误差引起的矛盾。在此情况下，根据一定的原则，对各观测结果进行合理的调整，即分别给以适当的改正数，使矛盾消除，从而求出一组最可靠的结果，这一工作就叫做平差。进行平差时所依据的原则就是概率论中的最小二乘原则。

设有观测值 L_1、L_2、…、L_n，平差时它们的对应改正数为 v_1、v_2、…、v_n，用最小二乘法进行平差，就是要求这些观测值的相应改正数满足：

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \text{最小} \tag{1.1}$$

当各观测值的可信赖程度有所不同时，则应满足：

$$\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 = \text{最小} \tag{1.2}$$

称为加权最小二乘法。式中 p_i 是反映第 i 个观测值可信赖程度的系数，称为第 i 个观测值的权。

依最小二乘原理，经平差计算所得观测值的改正数 v_i，称为最或然改正数。经平差后所得有关量的值，称为该量的最或然值，也叫平差值。

二、中误差和权

1、中误差

直观上不难理解，观测值越靠近真值，即偶然误差越密集于 0 附近，则观测精度越好，反之精度越差，因此偶然误差的离散程度反映了观测的精确程度。按照这一道理，我们引入测

量中常用的估计精度的标准，即中误差的概念。

由概率论知，描述随机变量离散特征的数值是方差。随机变量 L 与其数学期望 E(L) 之差的平方的数学期望，即定义为此随机变量的方差 D(L)，即

$$D(L) = E((L - E(L))^2) \tag{1.3}$$

由此可见，随机变量的全部取值越密集于其数学期望附近，则方差值越小；反之，方差值越大。这里，方差反映的是随机变量总体的离散程度，故又称总体方差。在测量问题中，L 为观测值，E(L)即为真值，故方差的大小正反映了总体观测结果靠近真值的程度。方差小，观测精度高；方差大，观测精度低。故方差是标志观测精度的一个理想数值。

在(1.3)中，代入$\triangle = L - E(L)$（$\triangle$为观测值与真值之差，称为真误差），则得

$$D(L) = E(\triangle^2) \tag{1.4}$$

对于正态分布函数

$$f(\triangle) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\triangle^2/2\sigma^2} \tag{1.5}$$

由概率论知，其中参数 σ 的平方正是随机变量的方差，即

$$\sigma^2 = E(\triangle^2)$$

测量条件的好坏，决定了测量精度的高低。对于一定的测量条件，误差的概率分布是确定的，即对应有确定的(1.5)式，故应有确定的方差，因此测量条件与 σ^2 是相对应的，或者说 σ^2 是测量条件的定量化。

为使精度的量纲与随机变量的量纲相一致，常以

$$\sigma = \sqrt{E(\triangle^2)} \tag{1.6}$$

代替方差的作用，称为均方差。

由(1.3)、(1.6)式知，计算方差或均方差必须已知随机变量的取值总体，这在测量上意味着观测值的个数要无穷多，实际是做不到的。因之，也就无法得到方差或均方差的绝对准确值。应用中，总是将有限次观测误差出现的频率当作相应的概率，从而计算方差的估计值，并把此方差估计值的方根作为均方差的估计值，特称之为中误差，用 m 表示。由此知，相同测量条件下的一组真误差平方中数的平方根即为中误差，即

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\triangle\triangle]}{n}} \tag{1.7}$$

式中 n 为真误差$\triangle$的个数，$[\triangle\triangle]$表示各误差平方之和，它相当于数学中的 $\sum_i^n \triangle_i^2$。“[ ]”是大地测量学中常用到的表示取和的符号。

(1.7)式为(1.6)式的估算式，只有当 n 相当大时才较为准确，当 $n \to \infty$ 时，则 $m = \sigma$。

习惯上，常将标志一个数量精确程度的中误差，附写于此数量之后，如 $83°26'24'' \pm 3''$、$458.483^m \pm 0.005^m$ 等。此处的 $\pm 3''$ 及 $\pm 0.005^m$ 即分别为其前边数值的中误差，切勿误解为真正的误差大小。

当以一个量 n 个观测值的算术平均值 $\bar{L}$ 作为真值的估计值时，由概率论知，σ 的无偏估计量应为

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \tag{1.8}$$

式中 $v=L-\bar{L}$，为最或然改正数。

例 1：某测区 10 个三角形闭合差如下。试求三角形闭合差的中误差，并求闭合差的最大允许值。

$-0.6''$	$+1.4''$	$-2.0''$	$+2.1''$	$-1.0''$
$-1.1''$	$-1.7''$	$-1.9''$	$+0.6''$	$-0.6''$

解：因为三角形闭合差是真误差，由(1.7)得三角形闭合差的中误差为

$$m=\pm\sqrt{\frac{(0.6)^2+(1.4)^2+\cdots+(0.6)^2+(0.6)^2}{10}}=\pm 2.02''$$

由概率论中的三倍均方差原理知，服从正态分布的偶然误差，如其绝对值大于三倍中误差则视为不可能事件。因此我们取三倍中误差作为极限误差$\Delta_{限}$，即

$$\Delta_{限}=3m \tag{1.9}$$

在要求严格时，也可采用二倍中误差作为$\Delta_{限}$，即

$$\Delta_{限}=2m \tag{1.10}$$

可见，极限误差是依据测量条件而定的，测量条件好，极限误差规定得小；测量条件差，极限误差规定得大。超过极限误差的值可视为是粗差。

极限误差是真误差的限值，故通常把极限误差用作为闭合差的允许值。对本例，应用(1.10)式，得极限误差为$|\Delta_{限}|=4''$。

例 2：某角的 10 次观测值如下，试求出该角的中误差。

$85°42'50''$	$42''$	$46''$	$44''$	$48''$
$48''$	$45''$	$47''$	$44''$	$46''$

解：该角的平均值为 $\bar{L}=46''$，则$[vv]=50$，由(1.8)得 $m=\pm 2.36''$。

前已指出，一定的测量条件对应于一定的方差。对作为均方差估值的中误差，也可近似地说：一定的测量条件应有一定的中误差，而一定的中误差也代表一定的测量条件。当然，这里的中误差，应是以足够多的观测结果为依据计算所得。

由一列等精度观测结果所求得的中误差，反映了进行这一系列观测值所处的测量条件，因之它标志的是这一系列观测结果的精度，又是其中每个单一观测结果的精度，也可看作是在上述相同测量条件下另外的一系列观测结果或某单一观测结果的精度。这里，尽管各观测结果的真误差不同，但它们的中误差是同一数值，即它们是在同一测量条件下获得的等精度的观测结果。

例 2 实际上就是一种简单的平差计算，平差结果是将观测值的算术平均值作为最或然值。可以看出，在该例中，对精度相同的所有观测值是不偏不倚地看待的，类似这样的平差计算称为等精度平差。

2、权

由于观测条件的明显差异，精度不相一致的观测结果，在平差处理时，自然不应再是简单地等同对待。容易理解，此时正确的做法应是：给精度相对较高的观测值以较大的信赖，使其对平差结果的影响较大；给精度相对较低的观测值以较小的信赖，使其对平差结果的影响较小。这就要求，在平差时需予先以明确的数值标志出各观测值间的相对可信赖程度，进而使其体现在平差过程中。观测值的这种相对可信赖程度，就称为观测值的权。

令 μ 为任一常数，由观测值的中误差 m_i 按下式计算

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}(i = 1、2、\cdots、n) \tag{1.11}$$

得出数值 p_i，并按〔pvv〕= min 的原理进行平差，即正好满足上述要求。数值 p_i 称为观测值的权。这里可以看出，权与相应中误差平方成反比。测量条件越好，观测中误差越小，其权的数值就越大；反之，则权越小。由于 μ^2 是可以任意选定的比例常数，故 p_i 是表示观测结果可信赖程度的一个相对数值。

由(1.11)式可得

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{m_j^2}{m_i^2}$$

权与中误差都是反映测量条件的好坏进而表示观测值精度的一个数值，这是权与中误差的共性。然而中误差是评定观测值精度的绝对数值；而权则是表示各观测值彼此间可信赖程度的相对数值，这是权与中误差的不同点。

现在考察一下常数 μ 的实际意义。当某一中误差 m_i 恰好等于所选常数 μ 时，则有

$$p_i = \frac{\mu^2}{\mu^2} = 1$$

即中误差等于 μ 的观测值，其权为 1，我们称数值为 1 的权为单位权。单位权所对应的中误差 μ 则称为单位权中误差，而单位权所对应的观测值即为单位权观测值。

为进一步理解单位权中误差以及权的相对性，试看下面的举例。

〔例 3〕设有三个观测值 L_1、L_2、L_3 的中误差分别为

$$m_1 = \pm 1'' \qquad m_2 = \pm 2'' \qquad m_3 = \pm 3''$$

试求各观测值的权。

由公式(1.11)知各观测值权 p_1、p_2、p_3 为

$$p_1 = \frac{\mu^2}{(\pm 1'')^2} \qquad p_2 = \frac{\mu^2}{(\pm 2'')^2} \qquad p_3 = \frac{\mu^2}{(\pm 3'')^2}$$

因为比例常数是任意选取的，故可以得出许多组不同的权。例如我们取 $\mu = 1''$、$2''$、$3''$、$6''$……，可得相应权如下：

取 $\mu = 1''$时：$p_1 = \frac{1}{1^2} = 1, p_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, p_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$；

取 $\mu = 2''$时：$p_1 = \frac{4}{1^2} = 4, p_2 = \frac{4}{2^2} = 1, p_3 = \frac{4}{3^2} = \frac{4}{9}$；

取 $\mu = 3''$时：$p_1 = \frac{9}{1^2} = 9, p_2 = \frac{9}{2^2} = \frac{9}{4}, p_3 = \frac{9}{3^2} = 1$；

取 $\mu = 6''$时：$p_1 = \frac{36}{1^2} = 36, p_2 = \frac{36}{2^2} = 9, p_3 = \frac{36}{3^2} = 4$。

可见，一组权根据需要同乘或同除某数，其相互比值不变，这就是权的相对性。离开权的这种相对性，单纯看某个观测值权的大小是无意义的。

既然权与中误差具有确定的对应关系式(1.11)，为什么有了中误差的概念又要引入权的概念呢？因为观测值的权可在平差前通过各种途径获得(如例 6、例 7)，从而能运用(1.2)

的原则进行计算，而中误差则需在平差计算后才能估计出来。

三、相对误差

对于衡量精度来说，在很多情况下，仅仅知道观测值的中误差还不能完全表达观测精度的好坏。例如，我们测量了两段距离，一段为 1000 米，另一段为 50 米，其中误差均为 ±0.2 米，中误差一样，但这两段距离中单位长度的观测精度显然是不相同的，前者的精度高于后者。因此，必须再引入一个衡量精度的标准，即相对误差。

相对误差的定义是：误差值与其相应观测结果的比。特别是，一个量的中误差与此量本身大小之比，称作这一量的相对中误差。如上例中距离为 1000 米的相对中误差为：

$$\frac{0.2}{1000}=\frac{1}{5000}$$

而距离为 50 米的相对中误差为

$$\frac{0.2}{50}=\frac{1}{250}$$

显然前者的相对中误差比后者的小，即前者每单位长度的测量精度比后者的高。

相对误差是个无名数，并且一般都将分子化为一。

相对误差一般只用于长度测量中，角度测量不采用相对误差。因为，角度误差的大小主要是观测两个方向引起的，它并不依赖角度大小而变化。

在某些情况中，如导线测量，点位误差是测角误差和量距误差的合并影响，故两者的精度应取得一致。这就要对角度误差与距离误差进行比较，用相对误差就能达到此目的。

图 1.1 表示的是测量角度及距离确定 p 点的位置。由于角度测量有误差 $\Delta\alpha''$，使 P 点移至 p′点；由于距离测量有误差 Δs，使 p′点又移至 p″点。由角度测量引起的垂直于量线方向的位置误差 Δu 称为横向误差。由距离误差 Δs 引起的沿量测方向上的位置误差称为纵向误差。于是

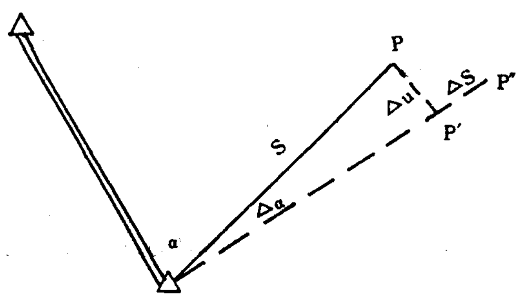


图 1.1

$$\text{纵向相对误差}=\frac{\Delta s}{s},$$

$$\text{横向相对误差}=\frac{\Delta u}{s}。$$

由于 $\Delta\alpha$ 是一个微量，于是 $\frac{\Delta u}{s}=\Delta\alpha(\text{弧度})=\frac{\Delta\alpha''}{\rho''}$。

〔例 4〕若一条边的测距误差为 1/200000，方向误差为 1″，试比较两者误差是否相应。

解：由角度误差所引起的横向相对误差为

$$\frac{\Delta u}{s}=\frac{1}{20600}$$

可见当距离精确到 1/20 万时，与角度精确到秒相匹配。

四、误差传播定律与权倒数传播定律

在函数关系式中，自变量的误差将传播给因变量。误差传播定律就是描述自变量和因变量间精度传播关系的数学关系式。

设有线性函数：

$$z = k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n + k_0 \tag{1.12}$$

式中 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 为相互独立的随机变量，$k_1, k_2 \cdots k_n$ 为常系数，k_0 是常数项。

对(1.12)取全微分，得

$$\triangle z = k_1\triangle x_1 + k_2\triangle x_2 + \cdots + k_n\triangle x_n \tag{1.13}$$

$\triangle z$ 及 $\triangle x_1, \triangle x_2 \cdots \triangle x_n$ 分别为因变量与各自变量的真误差。

由概率论知，(1.12)或(1.13)式各量的方差关系为

$$\sigma_z^2 = k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2 + \cdots + k_n^2\sigma_n^2$$

式中 $\sigma_1^2, \cdots \sigma_n^2$ 为随机变量 $x_1, \cdots x_n$ 的方差，σ_z^2 为随机变量函数 z 的方差。以中误差 m 代替 σ，得

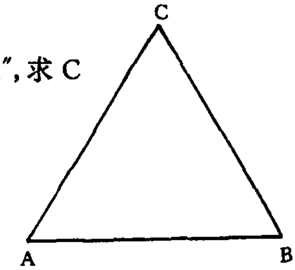
$$m_z^2 = k_1^2m_1^2 + k_2^2m_2^2 + \cdots + k_n^2m_n^2 \tag{1.14}$$

上式即称为误差传播定律。

将(1.11)式代入(1.14)式，有

$$\frac{1}{p_z} = k_1^2\frac{1}{p_1} + k_2^2\frac{1}{p_2} + \cdots + k_n^2\frac{1}{p_n} \tag{1.15}$$

称为权倒数传播定律。



〔例 5〕如图所示的三角形中，测了角 A、角 B，知 $m_A = m_B = \pm 1''$，求 C 角的精度。

解：C = 180 − A − B，由(1.14)得

$$m_C^2 = m_A^2 + m_B^2$$

故 $$m_C = \pm\sqrt{2} = \pm 1.4''$$

〔例 6〕求一个量等精度观测算术中数的中误差。如对一量第一次等精度观测了 2 个结果，取算术中数得 L_{I}；第二次在同样测量条件下对该量又观测了 3 个结果，取中数为 L_{II}，试求由 L_{I} 和 L_{II} 计算该量最或然值时所需之权。

解：设一量的 n 个等精度观测值为 $L_1, L_2, \cdots L_n$，中误差皆为 m，得算术中数 x 为

$$x = \frac{1}{n}(L_1 + L_2 + \cdots + L_n)$$

由(1.14)得

$$m_x = (\frac{1}{n})^2m^2 + (\frac{1}{n})^2m^2 + \cdots + (\frac{1}{n})^2m^2 = (\frac{1}{n})m^2$$

故 $$m_x = \pm\frac{m}{\sqrt{n}} \tag{1.16}$$

可见，算术中数的精度比单个观测值的精度要高。

设一次观测的权为 1，即取 m 为 μ，则由(1.11)(1.16)即得

二次观测结果算术中数 L_{I} 之权　　$P_{L_{\mathrm{I}}}=2$

三次观测结果算术中数 L_{II} 之权　　$P_{L_{\mathrm{II}}}=3$

〔例 7〕设两点间测水准，试推导计算水准测量的权的公式。

解：设两点间进行水准测量，中间共设站 n 次，两点间高差等于各站测得的高差之和，即

$$h = h_1 + h_2 + \cdots\cdots h_n$$

式中 h_i 为各站所测高差，当各站距离大体相同时，这些观测高差可视为等精度的，若设它们的中误差均为 m，则得两点间高差的中误差

$$m_h = \sqrt{n}m$$

又因各站距离 s 大致相等，则近似地有全长 S = ns，这时有 $n=\frac{S}{s}$。代入上式即得

$$m_h = \sqrt{\frac{S}{s}} \cdot m = \frac{m}{\sqrt{s}}\sqrt{S}$$

其中 s 为大致相等的各站距离，m 为每站所得高差的中误差，故 $\frac{m}{\sqrt{s}}$ 可视为定值，令

$$k = \frac{m}{\sqrt{s}}$$

所以

$$m_h = k\sqrt{S} \tag{1.17}$$

即水准测量高差的中误差与距离的平方根成正比。

(1.17)式中若取距离为一个单位长度，即 S = 1，则 $m_h = k$。因此，k 是单位距离高差的中误差，通常距离以公里为单位，k 就是距离为一公里时高差的中误差。

设路线长为 s 的高差之权为 p、中误差为 m_h；并设路线长为 s_0 的高差之权为 1，则其中误差即为单位权中误差 μ。当单位路线长度的水准测量所得高差之中误差均为定值 k 时，由(1.17)式有

$$m_h = k\sqrt{s}$$

$$\mu = k\sqrt{s_0}$$

代入公式(1.11)即得路线长为 s 时的高差之权

$$p = \frac{s_0}{s} \tag{1.18}$$

(1.18)式表明，水准测量中高差的权与路线长成反比。

设同等级的三条水准路线的距离分别为 $s_1=4$ 公里，$s_2=2.5$ 公里，$s_3=5$ 公里。若取路线长 1 公里时高差的权为 1，则得各高差的权为

$$p_1=\frac{1}{4}=0.25$$

$$p_2=\frac{1}{2.5}=0.40$$

$$p_3=\frac{1}{5}=0.20$$

若取路线长 10 公里时高差的权为 1，则得

$$p_1=\frac{10}{4}=2.5$$

$$p_2=\frac{10}{2.5}=4.0$$

$$p_3=\frac{10}{5}=2.0$$

〔例 8〕求地形测图中图板上描绘方向线的误差。

解:已知此误差来源于以下四项:

①测站偏心与目标偏心的影响$\triangle_{偏}$,已知 $m_{偏}=\pm 1.0'$;

②直尺安置误差$\triangle_{直}$,已知 $m_{直}=\pm 1.0'$;

③划方向线的误差$\triangle_{划}$,已知 $m_{划}=\pm 1.0'$;

④测板倾斜误差$\triangle_{倾}$,已知 $m_{倾}=\pm 0.5'$。

综合以上各项可得大平板仪定方位的误差$\triangle_{方位}$为

$$\triangle_{方位}=\triangle_{偏}+\triangle_{直}+\triangle_{划}+\triangle_{倾}$$

应用(1.14)式

$$m_{方位}=\pm\sqrt{m_{偏}^2+m_{直}^2+m_{划}^2+m_{倾}^2}=\pm 1.8'$$

§1.2 参数平差

一、参数平差概述

参数平差是选取与观测值有一定关系的未知量作为参数,以观测值为依据,按最小二乘原理,解出这些未知参数的最或然值,并作出相应的精度评定。由于所选取的参数常常不是直接观测量,所以,这种平差方法又叫间接平差。

为便于理解参数平差的概念,不妨先看两个简单的例子。

第一个例子:如图 1.2,在一平面三角形内等精度观测了三个内角,其观测值分别为 L_1, L_2, L_3,现求此三个角度的最或然值。

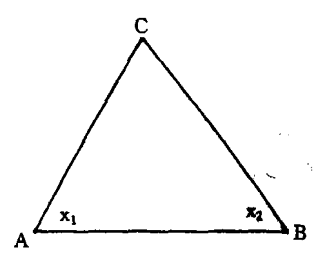


图 1.2

由于在一平面三角形内,只要求出任意两个角的最或然值,则由 180°减去此二数值,即得第三角的最或然值。现取其中任二角的最或然值为待定参数,并分别用 X_1 及 X_2 表之,在理想的情况下应为

$$\bar{L}_1=X_1$$
$$\bar{L}_2=X_2$$
$$\bar{L}_3=-X_1-X_2+180^\circ$$

上式称观测方程。式中 $\bar{L}_i$ 为观测量的真值,X_i 为参数真值。但在测量中只能获得观测量的观测值 L_i,故以 L_i 加改正数 v_i 代替 $\bar{L}_i$,此时参数 X_i 也随之变成估计值 x_i。则观测方程

变为

$$L_1 + v_1 = x_1$$
$$L_2 + v_2 = x_2$$
$$L_3 + v_3 = -x_1 - x_2 + 180^\circ$$

或

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= x_1 - L_1 \\ v_2 &= x_2 - L_2 \\ v_3 &= -x_1 - x_2 + 180^\circ - L_3 \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

显然,单纯为消除矛盾而加入的修正量 v_1、v_2、v_3 可以有无穷多组。所谓最小二乘平差就是根据(1.19)式,以 $\sum_{i=1}^{3} v_i^2 = \min$ 为条件,求出未知参数 x_1 及 x_2 的解。

第二个例子:设从三个已知点 P_1、P_2、P_3 对未知点 P 进行距离测量,观测值为 S_1、S_2、S_3。现由三个已知点的坐标 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$、$P_3(x_3, y_3)$求 P 点坐标(x, y)。

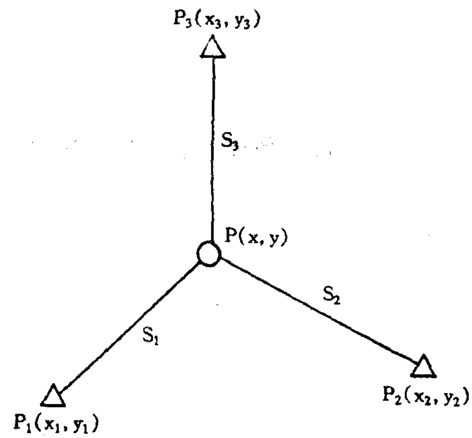


图 1.3

显然有两个观测值就可求出 P 点坐标(通常有两组解,舍弃不符实际情况者即可)。现测了三条边,故有多余观测。我们选取 P 点坐标 x 及 y 为待定参数,即未知量,则未知量和观测量之间的关系式为

$$\left.\begin{aligned} s_1 + v_1 &= \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \\ s_2 + v_2 &= \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \\ s_3 + v_3 &= \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2} \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

这就是此问题的误差方程组,按此方程组依最小二乘原理,可求得未知量 x 及 y。这里,观测量是距离,而我们选取的未知量是未知点的坐标。

概括地说,所谓参数平差,就是首先依具体问题选取未知量,列出未知量与全部观测量的关系式,然后根据这些关系式按最小二乘原理,求出各未知量,最后按各最或然改正数求出各观测量的最或然值。

根据以上定义,对参数平差问题作如下说明:

(1)任何平差,都是在有多余观测条件下进行的,如上面的第一个例子中,当一平面三角形只测两个角,则无平差问题。第二个例子中若只测了两条边,则也没有平差问题。在无多余观测的情况下,可由观测值按一定关系式直接计算所需量。

(2)按参数平差法平差一具体问题时,未知量的数目是固定的,它等于该问题必需观测的个数。例如上面第一个例子中,确定一平面三角形,至少必需观测两个角,这两个角就是必需观测量,我们选未知数的数目即为 2。第二个例子里,为确定一个点的坐标,至少需要两个观测量,故未知量有两个。设未知参数的数目为 t,多余观测数为 r,总观测数为 n,则应

有

$$n = t + r$$

显然,只有当 n>t 时,才产生平差问题。

(3)未知量的选择,依实际问题而定,可取观测量,也可取非观测量。未知量的选择方式不同,则误差方程式的形式也不一样。但是,未知量的选择原则应是经平差后能使问题得到确定的解。

还应注意,我们要求未知量应是互相独立的,即未知量之间不存在函数关系。在某些实际问题中,如果未知量中选入了非独立的参数,则这些未知量间必构成一定的函数关系式,一般称之为条件式。例如,第一个例子中,若取三个内角的最或然值为未知量,设分别为 x_1、x_2 及 x_3 则有

$$v_1 = x_1 - L_1$$

$$v_2 = x_2 - L_2$$

$$v_3 = x_3 - L_3$$

此时所选参数间不独立,有 $x_1 + x_2 + x_3 - 180° = 0$。由此式解出 x_3,代入第三式可得(1.19)式,即为参数平差时的误差方程式。

(4)在确定了未知量之后,要建立这些未知量与所有观测量之间的数学关系式(即误差方程式)。这些关系式可以是线性的,如(1.19)式;也可以是非线性的,如(1.20)式。为使平差简便,我们在平差中总是将非线性的误差方程式线性化(引入近似值应用泰勒级数展开取一次项)。

(5)有了未知参数与观测值之间的关系式——误差方程式,就可以〔pvv〕= min(等精度时为〔vv〕= min)为条件,解出各未知参数。

二、参数平差原理

1、列矩阵对列矩阵的导数

在推导参数平差计算公式之前,先补充介绍有关矩阵求导的几个公式。

设有列矩阵

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

若 Y 中元素 $y_i(i=1,2,\cdots,m)$ 皆为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的可导函数,则定义

$$\frac{dY}{dX} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

为 Y 对 X 的导数。

依据上面的定义，容易得出以下诸关系式

(1) $\frac{dC}{dX}=0$　　C——元素都是常数的列矩阵

(2) $\frac{d(\alpha Y)}{dX}=\alpha\frac{dY}{dX}$　　α——常数

(3) $\frac{d(Y+Z)}{dX}=\frac{dY}{dX}+\frac{dZ}{dX}$

(4) $\frac{d(\underset{t\times m}{C}\underset{m\times 1}{Y})}{d\underset{n\times 1}{X}}=C\frac{dY}{dX}$　　$\underset{t\times m}{C}$——常量阵

(5) $\frac{d(\underset{1\times m}{Y^T}\underset{m\times 1}{Z})}{d\underset{n\times 1}{X}}=Y^T\frac{dZ}{dX}+Z^T\frac{dY}{dX}$

2、参数平差公式推导

设有 n 个观测值为 $L_1,L_2,\cdots L_n$，其相应的最或然改正数为 $v_1,v_2\cdots\cdots v_n$。假设选取的未知参数有 t 个（n>t），即 $x_1,x_2,\cdots x_t$。

根据具体平差问题，我们可以列出各未知参数与每个观测量的关系式，其一般形式可以写为

$$\left.\begin{aligned} L_1+v_1&=a_1x_1+b_1x_2+\cdots\cdots t_1x_t+d_1\\ L_2+v_2&=a_2x_1+b_2x_2+\cdots\cdots t_2x_t+d_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ L_n+v_n&=a_nx_1+b_nx_2+\cdots\cdots t_nx_t+d_n \end{aligned}\right\}\tag{1.21}$$

式中 a_i、$b_i\cdots\cdots t_i$ 为各未知参数的系数，d_i 为理论常数，它们均可由具体的平差问题确定。例如(1.19)式即为(1.21)式当未知参数个数 t=2，且

$$\begin{array}{lll} a_1=+1 & b_1=0 & d_1=0\\ a_2=0 & b_2=+1 & d_2=0\\ a_3=-1 & b_3=-1 & d_3=180^\circ \end{array}$$

时的具体形式。

若设

$$V=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_t\end{pmatrix}\quad L=\begin{pmatrix}L_1\\L_2\\\vdots\\L_n\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_n\end{pmatrix}$$

且
$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & t^1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & t^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & \cdots & t^n \end{pmatrix}$$
则(1.21)式移项后写成矩阵形式为
$$V = AX + D - L$$
其中 D－L 是方程的已知部分，令
$$l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - L_1 \\ d_2 - L_2 \\ \vdots \\ d_n - L_n \end{pmatrix} = D - L$$
则公式为
$$V = AX + l \tag{1.22}$$
此式即为参数平差的基本数学模型，通常称为误差方程。l 是方程式中的已知部分，称为方程的自由项。

易于理解，在(1.22)式的 n 个方程中，需求解 t 个未知参数 x_1、x_2、$\cdots x_t$ 和 n 个改正数 v_1、v_2、$\cdots$、v_n，即总的未知数有 n+t 个，所以(1.22)式是不定方程组，其解是无穷的。当加入[pvv](等精度观测时是〔vv〕)为最小这一限制条件后，它的解就是唯一的了。

现在即根据最小二乘原理求参数向量 X 的解，使之能满足
$$[pvv] = p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + \cdots\cdots + p_nv_n^2 = min$$
或表示为
$$V^TPV = \min$$
其中
$$P = \begin{pmatrix} p_1 & & \bigcirc & \\ & p_2 & & \\ \bigcirc & & \ddots & \\ & & & p_n \end{pmatrix}$$
应用数学中求函数极值的方法，将 V^TPV 对 X 求导数，并令其为零，则有
$$\frac{d(V^TPV)}{dX} = V^T\frac{dPV}{dX} + (PV)^T\frac{dV}{dX} = 0$$
即
$$V^TP\frac{dV}{dX} + V^TP\frac{dV}{dX} = 0$$
由误差方程式(1.22)知
$$\frac{dV}{dX} = A$$
故有
$$2V^TPA = 0$$
或
$$A^TPV = 0$$
将(1.22)式代入上式，得

$$A^TP(AX+l)=0$$

即
$$A^TPAX+A^TPl=0 \qquad (1.23)$$

设
$$A^TPA=N \qquad A^TPl=U$$

则 (1.23)式变为

$$NX+U=0 \qquad (1.24)$$

(1.23)式或(1.24)式称为法方程组。式中 N 为法方程组的系数阵,U 为法方程组的自由项矩阵。

当 N 为非奇异阵时,其逆阵存在,则可由

$$X=-N^{-1}U$$

求得解向量 X。

3、参数平差计算步骤

参数平差的计算,通常按以下程序进行:

(1)依题意选取待定参数作为未知量。应该注意,参数的个数应等于解决该问题必需观测的个数,不能多也不能少。如果选少了,误差方程式列不出来;如果选多了,则参数之间不独立。

(2)依选取的未知参数与观测量之间的函数关系,列出误差方程组。误差方程式的个数等于观测量的个数。也就是说,每有一个观测量就有一个误差方程式。

(3)依误差方程组组成法方程式,其个数等于未知量的个数。

(4)解线性方程组,求出 X 的解向量。

(5)如果需要,可将 X 的值代入误差方程式解出 V 向量,依 $\bar{L}=L+V$,求出各观测量的最或然值。

(6)精度估计,即评定所解参数的可靠性(中误差),对此本书不予介绍。

三、应用例

对于具体的测量平差问题需编制程序在计算机中完成计算。为进一步说明参数平差的应用方法,举例如下。

〔例 1〕单三角形中,设观測了三角形三内角,其观测值为 $L_1=62°17'52''$, $L_2=33°52'19''$ 及 $L_3=83°49'43''$,求各角最或然值。

解:首先选择待定参数作为未知量。这里独立的必需参数是两个,取第一、第二两角最或然值为待定参数,则依未知参数与观测量的关系可列出误差方程式

$$v_1=x_1-L_1$$

$$v_2=x_2-L_2$$

$$v_3=-x_1-x_2+180°-L_3$$

即

$$V=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-62°17'52''\\ -33°52'19''\\ 96°10'17''\end{pmatrix}$$

由于角度观测为等精度观测,则权阵为单位阵,法方程组为