高等数学

解题指引与同步练习

② 导数与微分

曾令武　吴　满　编著

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题指引与同步练习/曾令武，吴满编著.—广州：华南理工大学出版社，2008.1
ISBN 978-7-5623-2708-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.①曾…②吴…　Ⅲ.高等数学—高等学校—解题　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 200962 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
营销部电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail：scutc13@scut.edu.cn　　http://www.scutpress.com.cn
责任编辑：欧建岸　乔　丽
印 刷 者：广州市穗彩彩印厂
开　　本：787mm×960mm　1/16　**印张**：32　**字数**：645 千
版　　次：2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷
印　　数：1～5000 册
定价（1～10 册）：48.50 元

前　　言

成人高等教育是我国高等教育事业的重要组成部分，它不同于普通高等教育，有着自身的特点.因此，编写、使用适合成人教育特点的教材及辅导用书，是提高教学质量的有力保证.作者从事各类不同层次数学学科的教学近50年，在长期的教学实践中，深知要使学生掌握数学的“三基”(基本概念、基本理论、基本方法)，必须要通过一定数量的习题练习才能实现.为了达到这个目标，作者作了一种新的尝试，把辅导与练习合编成一册，即对每章的“三基”内容给予小结，并举例作解题指引，接着安排一些基本练习题给读者反复练习，以便及时巩固“三基”.然后配置适量的拓展题给读者一个充分训练的平台.章末附有习题答案.

本书可作为成人高等教育院校各类专业的辅导用书.对专科学生，书中的拓展题部分及有“*”号标记的内容不作要求.

本书的编写和出版，自始至终得到了华南理工大学继续教育学院有关领导的大力支持，在此向他们表示感谢.

由于水平所限，书中不完善之处，恳请同仁和读者批评指正.

编　者

2007年10月于广州

出版说明

由吴满、曾令武编著的这套教学辅导与练习册，在华南理工大学继续教育学院使用已 10 年，一直得到任课教师和学生的好评，这次出版的是第三次修订本.

学好数学就一定要做习题.我国伟大的数学家华罗庚说过，“学数学不做习题，等于你进了一个宝藏后出来时却是两手空空的”.两位作者从事成人教育多年，十分了解成人教育的特点，即学员都是在做好本职工作的前提下，业余学习，甚至部分学生还需兼顾家庭.因此，如何利用更少的时间完成学习任务是学生面对的实际问题.作者根据多年的教学经验，把辅导与练习合编成一册，对每章的“三基”内容给予小结，并精选一些例题，指引学生掌握解题的要领.然后安排一些基本题型，分类编排，使学生由浅入深地掌握数学的基本知识.最后配置适量的拓展题给学生一个充分训练的平台，使部分学生的学习能力提高一个层次，为以后深造打下坚实的基础.

练习题目都留出空白给学生解题之用，免去再抄题目而省时，任课教师批改作业也很方便.因此，这是一套很实用的教辅工具.

华南理工大学继续教育学院

教学主管院长　金军

导数与微分

导数是讨论由于自变量的变化所引起的函数变化的快慢程度,即函数的变化率.而微分是研究函数的微小增量的近似值问题.这一章,重点掌握下面内容:

一、导数概念

1. 导数的定义

函数 $y=f(x)$在点 x_0 的导数是一个特定形式的极限,即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\text{(存在)} \qquad ①$$

也可记作

$$y'\big|_{x=x_0}\qquad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\qquad \text{或}\qquad \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

此时称函数 $y=f(x)$在点 x_0 可导;若式①的极限不存在时,就说 $f(x)$在点 x_0 不可导或导数不存在.

导数的定义式①应理解为

$$f'(x_0)=\lim_{\boxed{h}\to 0}\frac{f(x_0+\boxed{h})-f(x_0)}{\boxed{h}}$$

其中三个圈图$\boxed{h}$完全一致.

若记 $x_0+\Delta x=x$,则 $\Delta x\to 0$ 相当于 $x\to x_0$,这样导数的定义式①也可写成

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad ②$$

特别 $x_0=0$ 时,得

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

用式②考察分段函数在分界点 x_0 的可导性极为方便(如例 3).

在式①中,把 x_0 换为 x 即得导函数(简称导数)的定义式:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad ③$$

也可记作 y'，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$或$\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

显然，如果函数 $y=f(x)$在含 x_0 点的区间内可导，则函数在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$就是导函数 $f'(x)$在点 x_0 处的函数值，即

$$f'(x_0) = f'(x)\big|_{x=x_0}$$

例 1 设 $f(x)$在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=-\dfrac{1}{2}$，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

解 已知 $f(x)$在 x_0 可导，即已知极限 $f'(x_0)=\lim\limits_{\boxed{h}\to 0}\dfrac{f(x_0+\boxed{h})-f(x_0)}{\boxed{h}}$ 存在，且设为 $-\dfrac{1}{2}$. 以此出发求极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

应将其凑成上述形式，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\boxed{-3\Delta x})-f(x_0)}{\boxed{-3\Delta x}}\cdot(-3)$$

$$= -3f'(x_0) = \frac{3}{2}$$

例 2 讨论函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$在$x=0$ 的可导性.

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x}=-1$（存在）（当 $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^{-x}-1\sim -x$）

2. 左导数与右导数

函数 $y=f(x)$在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$与右导数 $f'_+(x_0)$都存在而且相等是 $f(x)$在点 x_0 可导的充分必要条件.

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}1-x & (x<1)\\ (1-x)(2-x) & (x\geqslant 1)\end{cases}$，求 $f'(1)$.

解 所给分段函数在分段点 $x=1$ 的左、右两侧的表达式不相同，必须考察其左、右导数，并用上述定理加以判断.

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x-0}{x-1}=-1$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(1-x)(2-x)-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x-2)=-1$$

由于 $f'_-(1)=f'_+(1)=-1$，故 $f(x)$在 $x=1$ 可导，且 $f'(1)=-1$.

3. 可导函数的连续性

若函数 $y=f(x)$在点 x 可导,则函数在点 x 必连续.这个结论是不可逆的,即函数 $y=f(x)$在点 x 连续,在该点处函数不一定可导.因此,函数在一点连续是在该点可导的必要条件而不是充分条件.

习题 2－1

基本练习题

1. 选择一个正确的答案填在括号中:

(1) 设函数 $f(x)$在 x_0 处可导,则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=$ ( )

A. $f'(x_0)$ B. $-f'(x_0)$ C. $2f'(x_0)$ D. 不存在

(2) 如果 $f(0)=0$,且 $f'(0)$存在,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$ ( )

A. 0 B. 1 C. $-f'(0)$ D. $f'(0)$

2. 设函数 $f(x)$在 $x=0$ 处可导,求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0)-f(2\Delta x)}{\Delta x}$.

解

3. 设函数 $f(x)$在 $x=2$ 处可导,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2-2x)-f(2)}{x}$.

解

4. 若 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(x_0-h)-f(x_0)}=\dfrac{1}{2}$,求 $f'(x_0)$.

解

5. 设分段函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x+1 & (x<0)\\ e^x & (x\geqslant 0)\end{cases}$,求 $f'(0),f'(1)$.

解

拓展题

6. 设 $f'(x_0)\neq 0$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)f(x)}{f(x)-f(x_0)}=$ ( )

A. $\dfrac{1}{f'(x_0)}$ B. $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$ C. $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ D. $\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

7. 设函数 $f(x)$ 可导,求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+a\Delta x)-f(x-b\Delta x)}{\Delta x}$

解

8. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的可导性：

(1) $y=\sqrt[3]{x}$；　　　　(2) $y=\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x^2}}\ln(1+x)$.

解

9. 讨论函数 $f(x)=|x-1|$ 在 $x=1$ 处的可导性.

解

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^x & (x<0) \\ a+bx & (x\geqslant 0) \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，求待定常数 a 和 b.

解

二、导数公式和函数四则运算的求导法则

1. 求导公式

(1) $(c)'=0$(c 为常数)

(2) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$

(3) $(a^{x})'=a^{x}\ln a$

(4) $(e^{x})'=e^{x}$

(5) $(\log_{a}x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

(6) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

(7) $(\sin x)'=\cos x$

(8) $(\cos x)'=-\sin x$

(9) $(\tan x)'=\sec^{2}x$

(10) $(\cot x)'=-\csc^{2}x$

(11) $(\sec x)'=\sec x\tan x$

(12) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^{2}}$

(16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^{2}}$

2. 函数四则运算的求导法则

设函数 $u(x),v(x)$都可导,则

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$

(2) $(uv)'=u'v+uv'$

(3) $(cu)'=cu'$(c 为常数)

(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^{2}}(v\neq 0)$

上述法则中的(1)和(2)都可推广到有限个函数的情形.例如

$$(u+v-w)'=u'+v'-w'$$

$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$$

例 4 求函数 $y=\sqrt[3]{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\cos\dfrac{\pi}{3}$的导数.

解 $y'=(\sqrt[3]{x})'+\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)'-\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)'=(x^{\frac{1}{3}})'+2(x^{-\frac{1}{2}})'-0$

$$=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}-\frac{1}{\sqrt{x^{3}}}$$

例 5 设函数 $f(x)=x\ln x+\dfrac{\sin x}{e^{x}}$,求 $f'(x)$.

解 $f'(x)=(x\ln x)'+\left(\dfrac{\sin x}{e^{x}}\right)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'+\dfrac{(\sin x)'e^{x}-\sin x(e^{x})'}{(e^{x})^{2}}$

$$=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+\frac{\cos x\cdot e^{x}-\sin x\cdot e^{x}}{e^{2x}}$$

$$=1+\ln x+\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$$

例 6 设 $y=(x+1)(x-3)(x-2)$,求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}$.

解 由于 $\frac{dy}{dx}=(x+1)'(x-3)(x-2)+(x+1)(x-3)'(x-2)+$
$(x+1)(x-3)(x-2)'$
$=(x-3)(x-2)+(x+1)(x-2)+(x+1)(x-3)$

所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}=[(x-3)(x-2)+(x+1)(x-2)+(x+1)(x-3)]_{x=2}$$
$$=(2+1)(2-3)=-3$$

习题 2-2

基本练习题

11. 填空题:

(1) 设 $y=x^4+e^2$,则 $y'=$ ________;

(2) 设 $y=\sqrt{e}+\sqrt[3]{x^2}$,则 $y'=$ ________;

(3) 设 $y=\sqrt{x\sqrt{x}}$,则 $y'=$ ________;

(4) 设 $y=\frac{x-\sqrt{\pi x}+2}{\sqrt{x}}$,则 $y'=$ ________;

(5) 设 $y=\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}$,则 $y'=$ ________;

(6) 设 $y=\frac{1-3^x}{\sin\frac{\pi}{2}}$,则 $y'=$ ________;

(7) 设 $f(x)=\ln\frac{1}{x}-\ln 2$,则 $f'(x)=$ ________;

(8) 设 $y=\arcsin x+\arccos x$,则 $y'=$ ________;

(9) 设 $y=x\ln x$,则 $y'=$ ________;

(10) 设 $y=\sin x\cos x$,则 $y'=$ ________;

(11) 设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$,则 $f'(x)=$ ________;

(12) 设 $x=\frac{\cos t}{e^t}$,则$\frac{dx}{dt}=$ ________.

12. 求下列函数在给定点处的导数值：

(1) $f(x)=a^x+x^a+a\sin x+\cos a$（$a$ 为常数），求 $f'(0)$；

解

(2) $y=x\arctan x$，求 $y'\big|_{x=1}$；

解

(3) 设函数 $r=e^{\theta}\tan\theta$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0}$；

解

(4) $f(x)=x^2\ln\sqrt[3]{x^2}$，求 $f'(1)$；

解

(5) $f(x)=(1+x^2)\arctan x$，求 $f'(0)$；

解

(6) $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{x}$，求 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

解

13. 求下列函数的导数:

(1) $y=\frac{x-1}{x+1}$;

解

(2) $y=\frac{2}{x^3-1}$;

解

(3) $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$.

解

拓展题

14. 求下列函数在给定点处的导数值:

(1) $y=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}$,求$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$;

解

(2) $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)(x-100)$,求 $f'(0)$.

解

15. 设 $f(x)=10$,求 $f[f'(x)]$,$f'[f(x)]$.

解

三、复合函数的求导法则

若函数 $u=\varphi(x)$在点 x 可导,函数 $y=f(u)$在对应的点 u 可导,则复合函数 $y=f(\varphi(x))$在点 x 可导,且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \qquad 或 \qquad y'(x)=f'(u)\cdot\varphi'(x)$$

例 7 设 $y=\cos^2 x$,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 把 $y=\cos^2 x$ 分解成$y=u^2$(以 u 为自变量的幂函数),$u=\cos x$(以 x 为自变量的余弦函数)的复合,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=(u^2)'=2u \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(\cos x)'=-\sin x$$

根据复合函数的求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2u\cdot(-\sin x)=-2\sin x\cos x=-\sin 2x$$

复合函数的求导法则亦称为链导法则,它适用于多层复合的情况. 例如 $y=f(u)$,$u=\varphi(v)$,$v=g(x)$时有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\varphi'(v)\cdot g'(x)$$

或理解成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)(\text{一次只对一个中间变量求导})$$

求导时，关键是把复合函数正确地分解成一系列简单函数的复合，然后分别对各自的自变量求导再连乘.

例 8 设 $y=\sin(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 $y=\sin(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})$可分解成三个基本初等函数 $y=\sin u$，$u=\mathrm{e}^{v}$，$v=\frac{1}{x}$的复合，分别对各自的自变量求导，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=(\sin u)'=\cos u\qquad\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=(\mathrm{e}^{v})'=\mathrm{e}^{v}\qquad\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^{2}}$$

应用链导法则得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\cos u\cdot\mathrm{e}^{v}\cdot\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)=-\frac{1}{x^{2}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\cos(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})$$

在熟练地掌握复合函数的分解并理解链导法则之后，为了简便运算，不需写出中间变量而默记于心中，将复合函数从外层往里层逐层求导脱“链”. 分解一层（复合步骤），求导一次，逐层深入“剥皮式”地直到对自变量求导为止. 如上述过程可写成：

$$\begin{aligned}y'&=(\sin\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})'=\cos\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})'\\&=\cos\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^{2}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\cos\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

例 9 设 $y=\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}}$，求$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi^{2}}{4}}$.

解 $y'=(\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}})'=\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}}\cdot(\cos\sqrt{x})'$

$$=\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}}\cdot(-\sin\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x})'=-\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}}\cdot\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi^{2}}{4}}=-\mathrm{e}^{\cos\frac{\pi}{2}}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2\,\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{\pi}$$

习题 2－3

基本练习题

16．填空题：

（1）设 $y=(1-x)^3$，则 $y'=$ ________________；

（2）设 $f(x)=\left(ax+\dfrac{b}{x}\right)^n$，则 $f'(x)=$ ________________；

（3）设 $y=\sqrt{1-x^2}$，则 $y'=$ ________________；

（4）设 $y=\sin x^2$，则 $y'=$ ________________；

（5）设 $y=\arccos 2x$，则 $y'=$ ________________；

（6）设 $y=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ________________；

（7）设 $y=x^{-3}+3^{-x}$，则 $y'=$ ________________；

（8）设 $y=\ln(1-x^2)$，则 $y'=$ ________________；

（9）设 $f(x)=\sin kx+\sin^k x$，则 $f'(x)=$ ________________；

（10）设 $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+\ln(\ln x)$，则 $y'=$ ________________；

17．求下列函数的导数：

（1）$y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$；

解

（2）$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

解

（3）$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

解

(4) $y=\cos e^{\frac{2}{x}}$;

解

(5) $y=\tan^2 x^2$;

解

(6) $y=e^{\cos 2x}$;

解

(7) $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$;

解

(8) $y=\arctan(e^{-x^2})$;

解