高等数学

解题指引与同步练习

⑦ 空间解析几何

曾令武　吴　满　编著

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题指引与同步练习/曾令武,吴满编著.—广州：华南理工大学出版社，2008.1

ISBN 978-7-5623-2708-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①曾…②吴… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 200962 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
营销部电话：020-87113487 87111048（传真）
E-mail：scutc13@scut.edu.cn **http**://www.scutpress.com.cn
责任编辑：欧建岸 乔 丽
印 刷 者：广州市穗彩彩印厂
开 本：787mm×960mm 1/16 **印张**：32 **字数**：645 千
版 次：2008 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月第 1 次印刷
印 数：1～5000 册
定价（1～10 册）：48.50 元

前　　言

成人高等教育是我国高等教育事业的重要组成部分，它不同于普通高等教育，有着自身的特点.因此，编写、使用适合成人教育特点的教材及辅导用书，是提高教学质量的有力保证.作者从事各类不同层次数学学科的教学近 50 年，在长期的教学实践中，深知要使学生掌握数学的“三基”（基本概念、基本理论、基本方法），必须要通过一定数量的习题练习才能实现.为了达到这个目标，作者作了一种新的尝试，把辅导与练习合编成一册，即对每章的“三基”内容给予小结，并举例作解题指引，接着安排一些基本练习题给读者反复练习，以便及时巩固“三基”.然后配置适量的拓展题给读者一个充分训练的平台.章末附有习题答案.

本书可作为成人高等教育院校各类专业的辅导用书.对专科学生，书中的拓展题部分及有“*”号标记的内容不作要求.

本书的编写和出版，自始至终得到了华南理工大学继续教育学院有关领导的大力支持，在此向他们表示感谢.

由于水平所限，书中不完善之处，恳请同仁和读者批评指正.

编　者

2007 年 10 月于广州

出版说明

由吴满、曾令武编著的这套教学辅导与练习册，在华南理工大学继续教育学院使用已10年，一直得到任课教师和学生的好评，这次出版的是第三次修订本.

学好数学就一定要做习题.我国伟大的数学家华罗庚说过，“学数学不做习题，等于你进了一个宝藏后出来时却是两手空空的”.两位作者从事成人教育多年，十分了解成人教育的特点，即学员都是在做好本职工作的前提下，业余学习，甚至部分学生还需兼顾家庭.因此，如何利用更少的时间完成学习任务是学生面对的实际问题.作者根据多年的教学经验，把辅导与练习合编成一册，对每章的“三基”内容给予小结，并精选一些例题，指引学生掌握解题的要领.然后安排一些基本题型，分类编排，使学生由浅入深地掌握数学的基本知识.最后配置适量的拓展题给学生一个充分训练的平台，使部分学生的学习能力提高一个层次，为以后深造打下坚实的基础.

练习题目都留出空白给学生解题之用，免去再抄题目而省时，任课教师批改作业也很方便.因此，这是一套很实用的教辅工具.

华南理工大学继续教育学院
教学主管院长　金军

*空间解析几何

空间解析几何的知识对学习多元函数微积分是必不可少的.其主要内容是:通过空间直角坐标系,了解空间的平面和直线,以及常见的空间曲面.

一、向量及其运算

1. 空间直角坐标系

在空间取一点 O,以点 O 为原点作三条两两互相垂直的数轴 Ox,Oy,Oz(长度单位一般相同),这样便构成空间直角坐标系(图 7-1).

如图 7-1 所示,空间的点 M 与有序数组(x,y,z)之间一一对应.称有序数组(x,y,z)为点 M 的直角坐标,记作 $M(x,y,z)$.

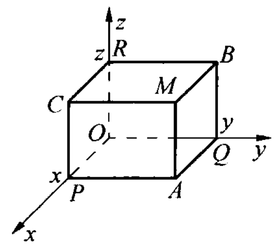

图 7-1

原点 O 的坐标为$(0,0,0)$;

在 x 轴上的点P 的坐标为$(x,0,0)$,y 轴上的点Q 的坐标为$(0,y,0)$,z 轴上的点R 的坐标为$(0,0,z)$;

在 xOy 坐标面上的点A 的坐标为$(x,y,0)$,yOz 坐标面上的点 B 的坐标为$(0,y,z)$,zOx 坐标面上的点 C 的坐标为$(x,0,z)$.

空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$之间的距离公式为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

特别地,空间点 $M(x,y,z)$到原点 $O(0,0,0)$的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

例 1 在 xOz 平面上求一点,使之与点 $A(1,-3,2)$,$B(-3,0,-1)$及 $C(6,3,-1)$等距离.

解 所求点 M 在xOz 平面上,故设其坐标为$(x,0,z)$.

由$|MA|=|MB|$得

$$\sqrt{(x-1)^2+3^2+(z-2)^2}=\sqrt{(x+3)^2+0^2+(z+1)^2}$$

由$|MB|=|MC|$得

$$\sqrt{(x+3)^2+0^2+(z+1)^2}=\sqrt{(x-6)^2+(-3)^2+(z+1)^2}$$

整理以上两式,得方程组

$$\begin{cases}4x+3z=2\\x=2\end{cases}$$

解得 $x=2,z=-2$.故所求点为 $M(2,0,-2)$.

2. 向量的坐标

(1) 以原点 $O(0,0,0)$为起点、$M(x,y,z)$为终点的向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式为

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\xlongequal{\text{记}}\{x,y,z\}$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示 x 轴、y 轴和 z 轴上正方向的单位向量.

$\overrightarrow{OM}$的模$|\overrightarrow{OM}|$等于点$M(x,y,z)$到原点的距离

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$\overrightarrow{OM}$的方向余弦:

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\quad\cos\beta=\frac{y}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

满足约束条件

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

常称与方向余弦成比例的一组实数 $m,n,p\left(\frac{m}{\cos\alpha}=\frac{n}{\cos\beta}=\frac{p}{\cos\gamma}\right)$为方向数,写成$\{m,n,p\}$.

可见向量的坐标$\{x,y,z\}$就是该向量的一组方向数.

(2) 以点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$为起点,$M_2(x_2,y_2,z_2)$为终点的向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$

也就是说,由空间两点所确定的一个向量,它的坐标由其终点坐标减去起点坐标所组成.

(3) 若 $\boldsymbol{a}^\circ$是与 $\boldsymbol{a}$(非零向量)同方向的单位向量,则有

$$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

3. 向量的运算

设两向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$和$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,则有

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

4. 两向量平行、垂直的充要条件

设两个非零向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 与 $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则

$$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\text{ 的充要条件是}\quad \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\text{ 的充要条件是}\quad a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$

例 2 已知空间两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同方向的单位向量以及 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向余弦、方向角.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-2,3-2,0-\sqrt{2}\}=\{-1,1,-\sqrt{2}\}$

所以 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$$

于是，与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同方向的单位向量为

$$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\frac{1}{2}\{-1,1,-\sqrt{2}\}=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2}\qquad\cos\beta=\frac{1}{2}\qquad\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

方向角为

$$\alpha=\frac{2\pi}{3}\quad\beta=\frac{\pi}{3}\quad\gamma=\frac{3\pi}{4}$$

例 3 设 $\boldsymbol{a}=\{4,-3,4\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,2,1\}$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{4+2,-3+2,4+1\}=\{6,-1,5\}$

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}&=2(4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})-3(2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\\&=(8\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})-(6\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\\&=2\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}=\{2,-12,5\}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\cdot2+(-3)\cdot2+4\cdot1=6$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\4&-3&4\\2&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&4\\2&1\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}4&4\\2&1\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}4&-3\\2&2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\&=-11\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+14\boldsymbol{k}=\{-11,4,14\}\end{aligned}$$

例 4 设 $\boldsymbol{a}=\{2,\lambda,-1\}$，$\boldsymbol{b}=\{-4,-1,2\}$，

(1) 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,求参数 λ;　　(2) 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,求参数 λ.

解 (1) 由于 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,可知必有 $\frac{2}{-4}=\frac{\lambda}{-1}=\frac{-1}{2}$,得 $\lambda=\frac{1}{2}$.

(2) 由于 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,可知必有 $2\cdot(-4)+\lambda\cdot(-1)+(-1)\cdot 2=0$,即 $-\lambda-10=0$,解得 $\lambda=-10$.

习题 7-1

基本练习题

1. 单项选择题:

(1) 点 $M(2,-1,0)$ 的位置在　　(　　)

A. xOy 平面上　B. yOz 平面上　C. xOz 平面上　D. z 轴上

(2) 空间两点 $P_1(2,1,3)$ 和 $P_2(1,2,3)$ 之间的距离为　　(　　)

A. 1　B. $\sqrt{2}$　C. $\sqrt{3}$　D. 2

(3) x 轴上与点 $M(3,2,1)$ 的距离为 3 的点是　　(　　)

A. $(0,2,1)$　B. $(5,0,0)$

C. $(1,0,0)$　D. $(1,0,0)$ 或 $(5,0,0)$

2. 求空间点 $M(4,-3,5)$ 到原点以及到各坐标轴的距离.

解

3. 已知空间三点 $A(0,-1,2)$,$B(-1,3,5)$,$C(3,-1,-2)$,计算 $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ 及 $\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$.

解

4. 已知一向量的坐标为$\overrightarrow{AB}=\{-4,2,5\}$,且终点为$B(0,4,2)$,求该向量起点$A$的坐标.

解

5. 已知$\boldsymbol{a}=\sqrt{2}\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$,试求与$\boldsymbol{a}$同方向的单位向量$\boldsymbol{a}^{\circ}$,并用$\boldsymbol{a}^{\circ}$表示$\boldsymbol{a}$.

解

6. 设$\boldsymbol{a}=\{6,3,-2\}$,$|\boldsymbol{b}|=14$,且$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,求$\boldsymbol{b}$.

解

7. 已知$|\boldsymbol{a}|=6$,$\alpha=45^{\circ}$,$\beta=60^{\circ}$,求$\boldsymbol{a}$的坐标表示式.

解

8. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$,试求:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$; (2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$; (3) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$; (4) $\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

解

9. 求同时垂直于 $\boldsymbol{a}=\{2,2,1\}$ 及 $\boldsymbol{b}=\{4,5,3\}$ 的单位向量.

解

拓展题

10. 设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的终点为 $B(-1,2,1)$,模 $|\overrightarrow{AB}|=2$ 且与 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 平行,求该向量起点 A 的坐标.

解

11. 在 xOy 坐标平面上求一单位向量，使它与已知向量 $\boldsymbol{a}=\{-4,3,7\}$ 垂直.

解

12. 已知三角形的顶点 $A(1,-1,2)$，$B(3,3,1)$，$C(3,1,3)$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

解

二、空间的平面

1. 平面方程

(1) 点法式方程： $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ ①

(平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$，(x_0,y_0,z_0)是平面上一已知点的坐标)

(2) 一般式方程： $Ax+By+Cz+D=0$ ②

(法向量为 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$)

在空间直角坐标系中具有特殊位置的平面的方程形式：

当 $D=0$ 时，方程②成为 $Ax+By+Cz=0$ (缺常数项，平面过原点)

若 A,B,C 中仅有一个为零，方程②成为

$$\begin{cases} Ax + By + D = 0 & (C = 0,\text{即缺 } z \text{ 项,平面平行于 } z \text{ 轴}) \\ Ax + Cz + D = 0 & (B = 0,\text{即缺 } y \text{ 项,平面平行于 } y \text{ 轴}) \\ By + Cz + D = 0 & (A = 0,\text{即缺 } x \text{ 项,平面平行于 } x \text{ 轴}) \end{cases}$$

例如方程 $3x+2y-1=0$ 所表示的平面是平行于 z 轴的,如图 7-2 所示.

当 A,B,C 中有两个为零,方程②成为

$$\begin{cases} Cz + D = 0 & (\text{缺 } x,y \text{ 项,平面平行于 } xOy \text{ 坐标面}) \\ By + D = 0 & (\text{缺 } x,z \text{ 项,平面平行于 } xOz \text{ 坐标面}) \\ Ax + D = 0 & (\text{缺 } y,z \text{ 项,平面平行于 } yOz \text{ 坐标面}) \end{cases}$$

例如,方程 $3x-1=0$ 表示的平面如图 7-3 所示,它平行于 yOz 坐标平面.

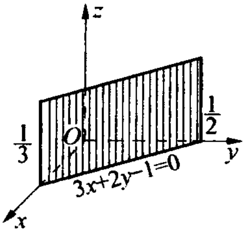

图 7-2

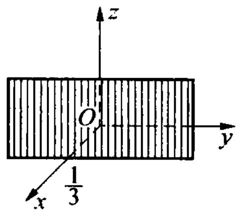

图 7-3

(3) 截距式方程:$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ ③

(截距式方程便于画图,因为 a,b,c 分别为平面在x,y,z轴上的截距)

例 5 求过点 $M_0(1,-2,0)$且以 $\boldsymbol{n}=\{6,-4,3\}$为法向量的平面方程.

解 根据点法式方程①,所求的平面方程为

$$6(x-1)+(-4)(y+2)+3(z-0)=0$$

即

$$6x-4y+3z-14=0$$

例 6 求通过 z 轴且过点$M(2,4,-3)$的平面方程.

解 平面过 z 轴,即平面通过原点且平行于 z 轴,所以 $D=0,C=0$. 所求平面方程可设为

$$Ax+By=0$$

由于平面过点 $M(2,4,-3)$,因此

$$2A+4B=0 \quad \text{即} \quad A=-2B$$

代回所设方程,有

$$B(-2x+y)=0$$

因 $B\neq0$(否则 A,B,C 同时为 0,无意义),故得所求平面方程为

$$y=2x$$

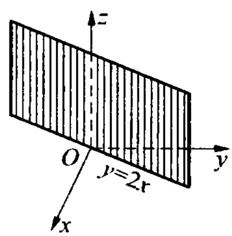

图 7-4

其图形如图 7-4 所示.

例 7 试画出平面 $3x+2y+6z-12=0$ 的图形.

解 将所给平面的一般式方程化为截距式方程：

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{2}=1$$

可知该平面与 x,y,z 轴的交点分别为(4,0,0),(0,6,0),(0,0,2).其图形如图 7-5 所示.

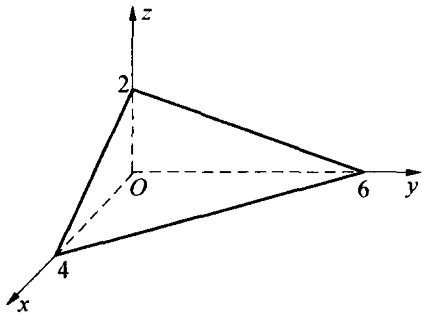

图 7-5

2. 两平面间的位置关系

设有两平面

$$\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad (\boldsymbol{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\})$$
$$\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \quad (\boldsymbol{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\})$$

则

(1) $\Pi_1\perp\Pi_2 \xleftrightarrow{\text{等价}} \boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$ 的充要条件是 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

(2) $\Pi_1/\!/\Pi_2 \xleftrightarrow{\text{等价}} \boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$ 的充要条件是

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\begin{cases}\neq\dfrac{D_1}{D_2}(\text{平行不重合})\\[2ex] =\dfrac{D_1}{D_2}(\text{两平面重合})\end{cases}$$

例 8 判定下列各组平面间的位置关系.

(1) $\Pi_1: 2x+3y+6z-7=0$ 与 $\Pi_2: 3x-6y+2z-7=0$;

(2) $\Pi_1: 2x+3y+6z-7=0$ 与 $\Pi_3: 4x+6y+12z+14=0$;

(3) $\Pi_2: 3x-6y+2z=7$ 与 $\Pi_4: -\dfrac{3}{2}x+3y-z=-\dfrac{7}{2}$.

解 (1) Π_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\{2,3,6\}$ 与 Π_2 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=\{3,-6,2\}$,有

$$2\cdot3+3\cdot(-6)+6\cdot2=0$$

故 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$,即 $\Pi_1\perp\Pi_2$;

(2) Π_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\{2,3,6\}$ 与 Π_3 的法向量 $\boldsymbol{n}_3=\{4,6,12\}$,有

$$\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{6}{12}\neq\frac{-7}{14}$$

故 $\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_3$,即 $\Pi_1/\!/\Pi_3$,但两平面不重合;

(3) Π_2 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=\{3,-6,2\}$ 与 Π_4 的法向量 $\boldsymbol{n}_4=\{-\dfrac{3}{2},3,-1\}$,有

$$\frac{3}{-\frac{3}{2}}=\frac{-6}{3}=\frac{2}{-1}=\frac{-7}{\frac{7}{2}}$$

故 Π_2 与 Π_4 重合.

例 9 设平面通过点$(1,-2,1)$,且同时垂直于两平面 $\Pi_1: x-2y+z-3=0$ 和 $\Pi_2: x+y-z+2=0$,求它的方程.

解 依题意,所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 同时垂直于两已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\{1,-2,1\}$和 $\boldsymbol{n}_2=\{1,1,-1\}$.因此,可以取

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$$

故所求的平面方程为

$$(x-1)+2(y+2)+3(z-1)=0$$

即

$$x+2y+3z=0$$

习题 7-2

基本练习题

13. 单项选择题:

(1) 平面 $2x-y+1=0$ 在空间直角坐标系中的位置是 (　　)

A. 平行于 xOy 坐标面　　B. 平行于 x 轴

C. 平行于 yOz 坐标面　　D. 平行于 z 轴

(2) 平面 $3x+2=0$ 在空间直角坐标系中的位置是 (　　)

A. 平行于 xOy 坐标面　　B. 与 x 轴垂直

C. 平行于 xOz 坐标面　　D. 不与任一坐标轴平行

(3) 平面 $\Pi_1: x+3y-2z-7=0$ 与平面 $\Pi_2: -\frac{x}{3}-y+\frac{2z}{3}=4$ 的位置关系是 (　　)

A. 平行　　B. 垂直　　C. 既不平行也不垂直　　D. 重合

(4) 平面 $x-y+2z-1=0$ 与平面 $3x+y-z-2=0$ 的位置关系是 (　　)

A. 平行　　B. 垂直　　C. 既不平行也不垂直　　D. 重合

(5) 平面 $x-y+2z=1$ 与平面 $2x+y+z=1$ 的位置关系是 (　　)

A. 平行　　B. 垂直　　C. 既不平行也不垂直　　D. 重合

14. 确定下列平面方程中的参数 λ 及 μ 的值.

(1) 使平面 $2x+\lambda y+3z=5$ 与平面 $\mu x-6y-z+2=0$ 平行；
(2) 使平面 $3x-5y+\lambda z=3$ 与平面 $x+3y+2z+5=0$ 垂直.

解

15. 设点 $M_0(3,-6,2)$ 是从原点到平面的垂足，求该平面的方程.

解

16. 分别按下列条件求平面方程：
(1) 通过点 $(3,0,-5)$ 且平行于平面 $2x-8y+z-2=0$；

解

(2) 通过 x 轴和点 $M_0(4,-3,-1)$；

解

(3) 平行于 xOz 平面且通过点 $P(3,2,-7)$.

解

17. 根据平面外一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

试求点 $P_0(1,2,1)$到平面 $x+2y+2z+2=0$ 的距离.

解

拓展题

18. 判定平面 $\Pi_1: x-y+2z-1=0$ 与 $\Pi_2: -3x+3y-6z=2$ 之间的位置关系,如果 $\Pi_1 /\!/ \Pi_2$,求这两平面间的距离.

解

19. 求过三点 $P_1(3,-1,-5)$, $P_2(1,2,3)$, $P_3(-1,0,1)$的平面方程.

解

20. 求与点 $A(2,1,0)$ 和点 $B(1,-3,6)$ 等距离的点的轨迹方程.

解

三、空间的直线

1. 直线方程

(1) 点向式方程(也称标准式或对称式):

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad ①$$

(直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$,(x_0,y_0,z_0) 是直线上一已知点的坐标)

注:将点向式方程①改写为

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases} \quad (\text{参变量 } t\in(-\infty,+\infty)) \qquad ②$$

称②为参数式方程.

(2) 一般式方程: