

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析

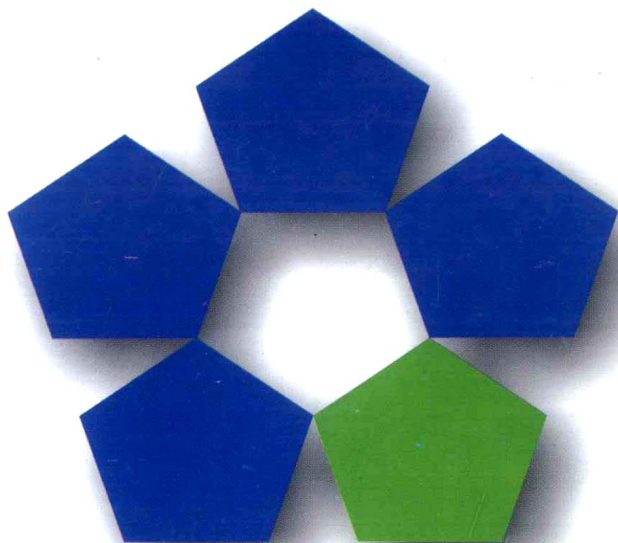
习题集题解

(三)

费定晖
郭大钧

周学圣
邵品琮

编演
主审



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

(三)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

Б.П 吉米多维奇数学分析习题集题解 (3)/费定
晖编. - 2 版. - 济南:山东科学技术出版社,1999.9
(2003.2 重印)

ISBN 7-5331-0101-4

I.Б… II.费… III.数学分析-高等学校-解题
IV.017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 43955 号

**Б. П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解**

(三)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

*

山东科学技术出版社出版
(济南市玉函路 16 号 邮编 250002)

山东科学技术出版社发行
(济南市玉函路 16 号 电话 2064651)

日照市黄海印刷厂印刷

*

787mm×1092mm 32 开本 18.875 印张 403 千字

2003 年 2 月第 2 版第 15 次印刷

印数:250301-260300

ISBN 7-5331-0101-4

O.7 定价:17.70 元

出版说明

吉米多维奇 (Б. П. ДЕМИДОВИЧ) 著《数学分析习题集》一书的中译本, 自 50 年代初在我国翻译出版以来, 引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生, 常以试解该习题集中的习题, 作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来, 对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题, 数量多, 内容丰富, 由浅入深, 部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限, 单变量函数的微分学, 不定积分, 定积分, 级数, 多变量函数的微分学, 带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等, 概括了数学分析的全部主题。当前, 我国广大读者, 特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者, 在为四个现代化而勤奋学习的热潮中, 迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此, 我们特约作者, 将全书 4462 题的所有解答汇编成书, 共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书, 同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知, 原习题集, 题多难度大, 其中不少习题如果认真习作的话, 既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念, 又可以有效地提高我们的运算能力, 特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样, 我们殷切期望初学数学分析的青年读者, 一定要刻苦钻研, 千万不要轻

易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有张效先、徐沅同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

目 录

第三章 不定积分	1
§ 1. 最简单的不定积分	1
§ 2. 有理函数的积分法	82
§ 3. 无理函数的积分法	137
§ 4. 三角函数的积分法	197
§ 5. 各种超越函数的积分法	245
§ 6. 函数的积分法的各种例子	275
第四章 定积分	309
§ 1. 定积分作为和的极限	309
§ 2. 利用不定积分计算定积分的方法	336
§ 3. 中值定理	403
§ 4. 广义积分	417
§ 5. 面积的计算法	474
§ 6. 弧长的计算法	498
§ 7. 体积的计算法	512
§ 8. 旋转曲面表面积的算法	534
§ 9. 矩的计算法, 重心的坐标	546
§ 10. 力学和物理学中的问题	557
§ 11. 定积分的近似算法	570

第三章 不定积分

§ 1. 最简单的不定积分

1° 不定积分的概念 若 $f(x)$ 为连续函数及 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

式中 C 为任意常数.

2° 不定积分的基本性质:

$$(a) \ d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx; (6) \int d\Phi(x) = \Phi(x) + C;$$

$$(b) \int Af(x)dx = A\int f(x)dx \quad (A = \text{常数});$$

$$(c) \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

3° 最简积分表:

$$I. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$$

$$II. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0);$$

$$III. \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \arctg x + C, \\ -\operatorname{arccotg} x + C; \end{cases}$$

$$IV. \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C;$$

$$V. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C; \end{cases}$$

$$VI. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C;$$

$$\text{VII. } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1); \int e^x dx = e^x + C;$$

$$\text{VIII. } \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\text{IX. } \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\text{X. } \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\text{XI. } \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\text{XII. } \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\text{XIII. } \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\text{XIV. } \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$\text{XV. } \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

4° 积分的基本方法

(a) 引入新变数法 若

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

则 $\int f(u) du = F(u) + C$, 式中 $u = \varphi(x)$.

(6) 分项积分法 若

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

则 $\int f(x) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$

(B) 代入法 假设

$x = \varphi(t)$, 式中 $\varphi(t)$ 及其导函数 $\varphi'(t)$ 为连续的,

则得 $\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$

(r) 分部积分法 若 u 和 v 为 x 的可微分函数,

则 $\int u dv = uv - \int v du.$

利用最简积分表,求出下列积分*:

1628. $\int (3 - x^2)^3 dx.$

解
$$\begin{aligned}\int (3 - x^2)^3 dx &= \int (27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6) dx \\ &= 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C.\end{aligned}$$

1629. $\int x^2(5 - x)^4 dx.$

解
$$\begin{aligned}\int x^2(5 - x)^4 dx &= \int (625x^2 - 500x^3 + 150x^4 - 20x^5 + x^6) dx \\ &= \frac{625}{3}x^3 - 125x^4 + 30x^5 - \frac{10}{3}x^6 + \frac{1}{7}x^7 + C.\end{aligned}$$

1630. $\int (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x) dx.$

解
$$\begin{aligned}\int (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x) dx &= \int (1 - 6x + 11x^2 - 6x^3) dx \\ &= x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + C.\end{aligned}$$

1631. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx.$

解
$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right) dx$$

* 本章在叙述习题及其解答过程中,凡出现的函数,无论是被积函数还是原函数,均默认是在有意义的定义域上进行的.例如最简积分表中 I 里当 $n \leq -2$ 时,要求 $x \neq 0$; N 中要求 $|x| \neq 1$; V 中要求 $|x| < 1$; 以及 W 中,当取负号时要求 $|x| > 1$; 等等,就未加声明.在题解中也有相当多的类似情况.因此,如无特别声明,在一般情形下,这些定义域是很容易被读者确定的,此处就不再予以一一指明.

——《题解》编者注.

$$= -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C.$$

$$1632. \int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} \right) dx.$$

$$\text{解} \quad \int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} \right) dx = a\ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + C.$$

$$1633. \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx &= \int (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx \\ &= \frac{2}{3} x \sqrt{x} + 2 \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

$$1634. \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx \\ &= \int (x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{5}{12}} + x^{-\frac{1}{4}}) dx \\ &= \frac{4}{5} x \sqrt[4]{x} - \frac{24}{17} x \sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C. \end{aligned}$$

$$1635. \int \frac{(1-x)^3}{x \sqrt[3]{x}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{(1-x)^3}{x \sqrt[3]{x}} dx \\ &= \int (x^{-\frac{4}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}) dx \\ &= -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} \left(1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{8}x^3 \right) + C. \end{aligned}$$

$$1636. \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad & \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx = \int (x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}}) dx \\ & = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + C = \frac{4(x^2 + 7)}{7 \sqrt[4]{x}} + C.\end{aligned}$$

$$1637. \int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad & \int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x} dx \\ & = \int (2 - 2 \sqrt[6]{72x}^{-\frac{1}{6}} + \sqrt[3]{9} x^{-\frac{1}{3}}) dx \\ & = 2x - \frac{12}{5} \sqrt[5]{72x^5} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{9x^2} + C.\end{aligned}$$

$$1638. \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad & \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx \\ & = \int \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{x^3} dx \\ & = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}\right) dx = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C.\end{aligned}$$

$$1639. \int \frac{x^2}{1+x^2} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad & \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\ & = x - \arctan x + C.\end{aligned}$$

$$1640. \int \frac{x^2}{1-x^2} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x^2}{1-x^2} dx = \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2}\right) dx$$

$$= -x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

$$1641. \int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx &= \int \left(1 + \frac{4}{x^2 - 1} \right) dx \\ &= x + 2 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

$$1642. \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx \\ &= \arcsin x + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C. \end{aligned}$$

$$1643. \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx \\ &= \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2+1}} \right| + C. \end{aligned}$$

$$1644. \int (2^x + 3^x)^2 dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int (2^x + 3^x)^2 dx &= \int (4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x) dx \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C. \end{aligned}$$

$$1645. \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx &= \int \left[2 \left(\frac{1}{5} \right)^x - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^x \right] dx \\ &= -\frac{2}{\ln 5} \left(\frac{1}{5} \right)^x + \frac{1}{5 \ln 2} \left(\frac{1}{2} \right)^x + C. \end{aligned}$$

$$1646. \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx &= \int (e^{2x} - e^x + 1) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C. \end{aligned}$$

$$1647. \int (1 + \sin x + \cos x) dx.$$

$$\text{解} \quad \int (1 + \sin x + \cos x) dx = x - \cos x + \sin x + C.$$

$$1648. \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx &= \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} dx \\ &= \int [\operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)] (\cos x - \sin x) dx \\ &= (\sin x + \cos x) \cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x) + C. \end{aligned}$$

$$1649. \int \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int (\csc^2 x - 1) dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

$$1650. \int \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

$$1651. \int (ashx + bchx) dx.$$

$$\text{解} \quad \int (ashx + bchx) dx = achx + bshx + C.$$

$$1652. \int \text{th}^2 x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \text{th}^2 x dx = \int \left(1 - \frac{1}{\text{ch}^2 x} \right) dx = x - \text{th} x + C.$$

$$1653. \int \text{cth}^2 x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \text{cth}^2 x dx = \int \left(1 + \frac{1}{\text{sh}^2 x} \right) dx = x - \text{cth} x + C.$$

1654. 证明: 若

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

则

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C \quad (a \neq 0).$$

证 由 $\int f(x) dx = F(x) + C$ 得知 $F'(x) = f(x)$. 因

而有 $F'(ax+b) = f(ax+b)$, 且 $\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{a} F(ax+b) \right]$
 $= F'(ax+b)$, 于是

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{a} F(ax+b) \right] = f(ax+b),$$

所以

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

求出下列积分:

$$1655. \int \frac{dx}{x+a}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C.$$

$$1656. \quad \int (2x-3)^{10} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int (2x-3)^{10} dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11} (2x-3)^{11} + C \\ &= \frac{1}{22} (2x-3)^{11} + C. \end{aligned}$$

$$1657. \quad \int \sqrt[3]{1-3x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sqrt[3]{1-3x} dx &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} (1-3x)^{\frac{4}{3}} + C \\ &= -\frac{1}{4} (1-3x)^{\frac{4}{3}} + C. \end{aligned}$$

$$1658. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}} &= -\frac{1}{5} \cdot 2(2-5x)^{\frac{1}{2}} + C \\ &= -\frac{2}{5} \sqrt{2-5x} + C. \end{aligned}$$

$$1659. \quad \int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}} &= \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) (5x-2)^{-\frac{3}{2}} + C \\ &= -\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}} + C. \end{aligned}$$

$$1660^{+*}. \quad \int \frac{\sqrt{1-2x+x^2}}{1-x} dx.$$

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明。中译本基本是按俄文第二版翻译的。俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正。

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx \\
 &= \int (1-x)^{-\frac{3}{5}} dx \\
 &= -\frac{5}{2} \sqrt[5]{(1-x)^2} + C.
 \end{aligned}$$

$$1661. \int \frac{dx}{2+3x^2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int \frac{dx}{2+3x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}x)^2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left[x \sqrt{\frac{3}{2}} \right] + C.
 \end{aligned}$$

$$1662. \int \frac{dx}{2-3x^2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int \frac{dx}{2-3x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}} x \right)^2} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{3}{2}} x}{1 - \sqrt{\frac{3}{2}} x} \right| + C \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + x\sqrt{3}}{\sqrt{2} - x\sqrt{3}} \right| + C.
 \end{aligned}$$

$$1663. \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \left[x \sqrt{\frac{3}{2}} \right] + C.$$

$$1664. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left[\sqrt{\frac{3}{2}}x\right]^2-1}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \left| x \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}x^2-1} \right| + C_1 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln |x \sqrt{3} + \sqrt{3x^2-2}| + C.
 \end{aligned}$$

$$1665. \int (e^{-x} + e^{-2x}) dx.$$

$$\text{解} \quad \int (e^{-x} + e^{-2x}) dx = -(e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x}) + C.$$

$$1666. \int (\sin 5x - \sin 5a) dx.$$

$$\text{解} \quad \int (\sin 5x - \sin 5a) dx = -\frac{1}{5} \cos 5x - x \sin 5a + C.$$

$$1667. \int \frac{dx}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

$$1668. \int \frac{dx}{1 + \cos x}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

$$1669. \int \frac{dx}{1 - \cos x}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{1 - \cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C.$$