

2005 考研辅导教材



双博士系列

硕士研究生入学考试

历年真题解析及 双色 点评

数学一

编写

双博士考研数学课题组

支持

双博士在线

www.bbdd.cc

总策划

胡东华

买80元双博士考研书送80元礼品

硕士研究生入学考试 历年真题解析及双色点评

(数学一)

主 编 北京大学数学科学学院 田勇
编 写 双博士考研数学课题组
支 持 双博士在线 www.bbdd.cc
总策划 胡东华

机械工业出版社

声明:本书封面及封底均采用双博士品牌专用图标(见右图);
该图标已由国家商标局注册。未经本策划人同意,禁止其
他单位或个人使用。



图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试历年真题解析及双色点评(数学一)/田勇主编. - 北京:
机械工业出版社, 2004. 4
考研辅导教材

ISBN 7-111-12080-9

I. 硕... II. 田... III. 理工数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 032141 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮编:100037)

责任编辑:于宁 牛涛

责任校对:王鲁华

封面设计:吴亦锋

责任印制:何全君

北京市高岭印刷有限公司

机械工业出版社出版发行

2004 年 4 月第 2 版 第 1 次印刷

787mm × 1092mm 1/16 印张 13.875 字数 334 千字

定价:16.00 元

©版权所有 违法必究

盗版举报电话:13801064123(著作权者)

封面无防伪标识均为盗版

(注:防伪标识揭开有用户名(十位)和密码(六位))

为了保护您的消费权益,请使用正版图书。正版双博士品牌考研图书均贴有防伪标识物(揭开后可见 10 位数字组成的 ID 和 6 位组成的 PW)。凭此 ID 和 PW 可登录双博士在线(www.bbdd.cc)中的网络课堂、全国各大学历年专业课试题库以及考前各科密押试卷。(该试卷去年版本押中大量 2004 年考研真题)。每购一本双博士图书,可点击以上非公开栏目 30 次。

<http://www.bbdd.cc> (双博士在线)

凡购买本书,如有字迹不清、缺页、倒页、脱页,由本社发行部负责调换。

<http://www.bbdd.cc> (网络课堂)

“考研押题讲座”授课计划

一、内容:考研政治、英语、数学(一、二、三、四)、西医综合科目考前押题讲座

二、讲座总策划:胡东华

三、讲座资料提供:

北大、清华、人大考研辅导班资料采编组 联合提供
京城考研命题信息搜集研究组

四、讲座时间:2004年12月1日—2005年1月7日(以网上通知为准)

五、课程表:

科 目 考 研	12月第1周	12月第2周	12月第3周	12月第4周	1月第1周
政 治	马克思主义哲学 政治经济学	毛泽东思想 概论	邓小平理论与 三个代表重要 思想概论	当代世界经济 与政治、 形势与政策	点题
英 语	听力	英语知识运用	阅读理解 A (命题趋势)	阅读理解 B (英译汉)	写作命题预测 及背诵范文
数 学 一	高数 (1~5)	高数 (6~11)	线性代数	概率论与 数理统计	点题
数 学 二	高数(1~3)	高数(4~6)	高数(7~11)	线性代数	点题
数 学 三	微积分 (1~5)	微积分 (6~10)	线性代数	概率论与 数理统计	点题
数 学 四	微积分 (1~5)	微积分 (6~10)	线性代数	概率论	点题
西医综合	生理学 生物化学	病理学	外科学	内科学	点题

注:本讲座需凭双博士考研图书封面上的防伪标识提供的 ID(十位数字)和 PW(六位密码)方可登录。(每购一本双博士图书,可点击双博士在线非公开栏目 30 次。)

双博士在线 www.bbdd.cc 在线咨询

您在复习备考尤其是复习专业课程过程中,会经常遇到很多疑难问题,在您的具体客观条件下,这些疑难问题都不能得到及时正确的解答和引导,日久成积,直接影响了您的考试结果。基于对此的认识,双博士在线,以您为服务对象,以您的疑难问题为切入点,为您提供个性化、一对一、实质性的专业咨询。双博士在线聘用您欲报考大学的在校优秀研究生作为您的专业咨询员,他们都是该专业的顶尖高手,会学习更会考试! 他们的点"金"成"金"将为您的考试赢得关键性的分数!

来自北京大学研究生会的感谢信

双博士:

您好!

首先感谢您对北京大学“十佳教师”评选活动的热情支持和无私帮助! 师恩难忘,北京大学“十佳教师”评选活动是北京大学研究生会的品牌活动之一,是北京大学所有在校研究生和本科生对恩师情谊的最朴素表达。双博士作为大学教学辅导及考研领域全国最大的图书品牌之一,不忘北大莘莘学子和传道授业的老师,其行为将永久的被北大师生感怀和铭记。

作为考研漫漫征途上的过来人,双博士曾陪伴我们度过无数个考研岁月的日日夜夜,曾带给我们无数个明示和启发,当然也带给我们今天的成功。

特致此信,向双博士表达我们内心长久以来的感激之情,并祝愿双博士事业蒸蒸日上。

北京大学研究生会

二零零二年十二月

安徽某大学学生的来信

双博士:

您好!

我是一名在校大学生,从去年来到学校时,我就认定了双博士图书,我认为它非常实用。我很喜欢。所以今年我一来就又一次购买了双博士图书,还推荐给我们班许多同学了。他们都感觉双博士不错。

现在,我们班同学均报了英语四级,我上了 www.bbdd.cc 网看了一下,我觉得非常适合我们的备考。在此我非常感谢你们,希望你们工作顺利!

买了双博士图书,还可以获得赠品,我觉得这是一个非常好的事……,我的地址是:安徽省安庆师范学院东一区×数学×班,我的名字是:谢××。邮编 246003。谢谢!

谢××

2003 年 10 月 28 日

前言

任何事物的发展都具有规律性,考研命题也不例外。通过对历年考研试题的科学分析,我们可以发现,知识点的考察总是具有稳定性、普遍性和反复出现的共性。近几年的数学试题都可以在往届的考卷中觅到踪影,有些题目甚至完全雷同。因此,任何模拟题的练习效果,都不如演练真题,真题具有无可比拟的权威性和实战性。

本着“想考生所想,急考生所急”的宗旨,双博士考研数学课题组精心打造了这本《硕士研究生入学考试真题解析及双色点评(数学一)》,本书的特点如下:

1. **考点及思路**:每道题目均有名师点拨命题考点,归纳解题思路。
2. **双色点评**:每个考题均注有点评,或详细分析了此类题型的解题方法,或指出了考生易犯的错误,或评价了题目的难易程度,或点出考题的出处,点评透彻准确。
3. **考点分类汇编**:在本书的第二部分,我们将历年考点的分布按章节统计成表格,依此总结了命题规律并对发展趋势作出了科学预测。
4. **解题技巧总结**:紧跟第二部分中的各章考点汇编,我们结合历年考题将解题技巧进行了进一步总结,相信定会使读者达到“一览众山小”的境界。

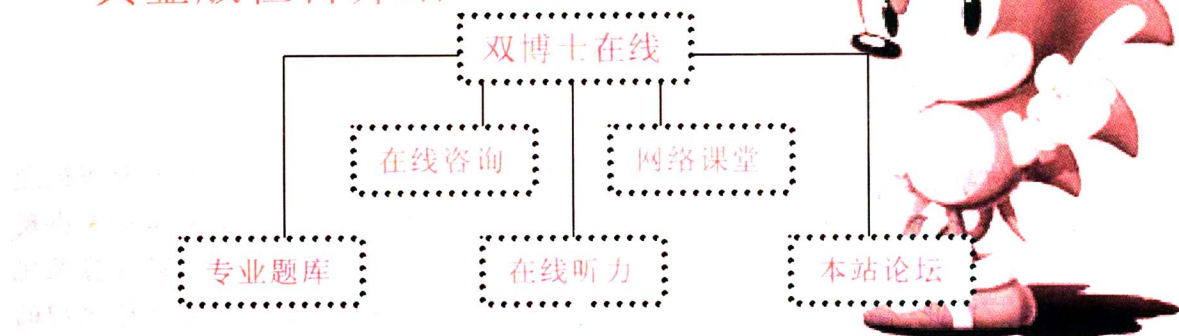
考生在使用本书过程中遇到问题可登录双博士在线 www.bbdd.cc/本站论坛/我爱双博士下面留言提问。在准备考研公共课和专业课中遇到的问题,也可登录双博士在线 www.bbdd.cc 在线咨询。

双博士在线在考前提供密押试卷(政治、英语、西医),本试卷去年版直接命中2004考研真题。获取本试卷的具体方法为:揭开封面上的防伪标识,获得10位数字ID和6位PW方可登录。每购一本双博士图书,可点击双博士在线非公开栏目30次。

与本系列配套的双博士系列用书《2005 考研数学应试题典》(理工、经济)2004年4月出版,《2005 考研数学公式掌中宝》(理工、经济)2004年4月出版,《2005 考研最后冲刺》(理工、经济)2004年9月出版。

双博士短信课堂:订阅双博士短信课堂,每日两条考试信息,快乐备考,轻松过级。考研直通车栏目包括:高频词汇、低频词汇、词汇速记巧记、黄金短语、经典句型;政治考点精华背诵、时事直通车、特快消息。

双博士在线 (www.bbddd.cc) 黄金版栏目介绍



双博士在线 (www.bbddd.cc) 专业提供考研和四六级考试资源网站, 日访问量超过 **10000** 次。

- **在线咨询:**

提供考研专业课和公共课个性化一对一实质性的专业咨询服务。双博士在线聘用你欲报考学校的在校优秀研究生作为您的专业咨询员, 为你提供专家级的解答和服务。咨询电话: 010 82608053

- **网络课堂:**

随时随地, 省时省钱, 灵活有效享受面授无法比拟的教育资源服务。

- **专业题库:**

包括全国各高校和科研单位历年考研专业课试题。

- **在线听力:**

包括真题及 20 套模拟试题, 本栏目是同类网站中音频文件最为密集的栏目, 练就此栏目的音频文件听力过关不用愁。

- **在线测试:**

考研政治、英语、数学、西医、中医和 MBA 5 门科目真题和模拟。

- **短信课堂:**

订阅双博士短信课堂, 每日两条考试信息, 快乐备考, 轻松过级。时尚英语、经典句子, 休闲、时尚、实用一个都不能少。

- **英语聊天室:**

适应教育部英语听说能力训练改为机考进行的趋势; 适合考研听力和复试口语测试的需要; 24 小时可随时找到合适自己的练习伙伴。聊天就能过级!

注: 购书登录双博士在线

每购一本双博士品牌图书, 可凭双博士考研图书封面上的防伪标识提供的 ID (十位数字) 和 PW (六位密码) 登录 30 次双博士网站的非公共资源栏目。如欲继续享受本服务, 请咨询 010 82608053

目 录

第一部分 真题实战演练及双色点评

2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题	(2)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题	(18)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题	(35)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题	(48)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题	(61)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题	(75)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题	(90)
1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题	(105)
1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题	(118)
1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题	(131)
1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题	(142)
1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题	(153)
1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题	(164)
1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题	(174)

第二部分 考点分类汇编及技巧总结

第一篇 高等数学	(186)
第一章 函数、极限、连续	(186)
第二章 一元函数微分学	(187)
第三章 一元函数积分学	(189)
第四章 空间解析几何	(191)
第五章 多元函数微分学	(192)
第六章 多元函数积分学	(194)
第七章 无穷级数	(196)
第八章 常微分方程	(198)

第二篇 线性代数	(200)
第一章 行列式	(200)
第二章 矩阵	(201)
第三章 向量	(202)
第四章 线性方程组	(204)
第五章 特征值与特征向量	(205)
第六章 二次型	(207)
 第三篇 概率论与数理统计初步	(209)
第一章 随机事件和概率	(209)
第二章 一维随机变量及其分布	(210)
第三章 二维随机变量及其分布	(211)
第四章 随机变量的数字特征	(212)
第五章 大数定律和中心极限定理	(213)
第六章 数理统计初步	(213)



及双色点评

真题实战演练

第一部分





2004 年全国硕士研究生入学 统一考试数学(一) 试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分,把答案填在题中横线上)

(1) 曲线 $y = \ln x$ 上与直线 $x + y = 1$ 垂直的切线方程为 $y = 1 - x$

(2) 已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$, 且 $f(1) = 0$, 则 $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$

(3) 设 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分, 则曲线积分 $\int_L xdy - 2ydx$ 的值为 _____

(4) 欧拉方程 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0 (x > 0)$ 的通解为 _____

(5) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, 则 $|B| =$ _____

(6) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{X > \sqrt{DX}\} =$ _____

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分,在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内。)

(7) 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是

(A) α, β, γ (B) α, γ, β (C) β, α, γ (D) β, γ, α []

(8) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

(A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少 []

(C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$ (D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$ []

(9) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 下列结论中正确的是

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

(B) 若存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$ []

(10) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2)$ 等于

(A) $2f(2)$ (B) $f(2)$ (C) $-f(2)$ (D) 0 []

(11) 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B , 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C , 则满



足 $AQ = C$ 的可逆矩阵 Q 为

$$(A) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (B) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (C) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (D) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(12) 设 A, B 为满足 $AB = O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有

- (A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关
(B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关
(C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关
(D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关

(13) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, 1)$, 对给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$.

若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于

- (A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$ (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$ (D) $u_{1-\alpha}$

(14) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 独立同分布, 且其方差为 $\sigma^2 > 0$, 令 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则

- (A) $Cov(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$ (B) $Cov(X_1, Y) = \sigma^2$
(C) $D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n}\sigma^2$ (D) $D(X_1 - Y) = \frac{n+2}{n}\sigma^2$

三、(本题满分 12 分)

设 $e < a < b < e^2$, 证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$

四、(本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时, 为了减少滑行距离, 在触地的瞬间, 飞机尾部张开减速伞, 以增大阻力, 使飞机迅速减速并停下. 现有一质量为 9000 kg 的飞机, 着陆时的水平速度为 700 km/h , 经测试, 减速伞打开后, 飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k = 6.0 \times 10^6$), 问从着陆点算起, 飞机滑行的最长距离是多少?(注 kg 表示千克, km/h 表示千米/小时.)

五、(本题满分 12 分)

计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy$$

其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧.

六、(本题满分 11 分)

设有方程 $x^n + nx - 1 = 0$, 其中 n 为正整数, 证明此方程存在惟一正实根 x_n , 并证明当 $a > 1$ 时,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^a$ 收敛.

七、(本题满分 12 分)

设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数

求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值.

八、(本题满分 9 分)



设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots x_n = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0 \\ \cdots \cdots \cdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0 \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

九、(本题满分 9 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 A 是否可相似对角化

十、(本题满分 9 分)

设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$, 令

$$X = \begin{cases} 1, A \text{ 发生} \\ 0, A \text{ 不发生} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, B \text{ 发生} \\ 0, B \text{ 不发生} \end{cases}$$

求: (I) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布

(II) X 与 Y 的相关系数 ρ_{xy}

十一、(本题满分 9 分)

设总体 X 的分布函数为

$$F(X; \beta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\beta}, & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$$

其中未知参数 $\beta > 1, X_1, X_2, \cdots, X_n$, 为来自总体 X 的简单随机样本, 求:

(I) β 的矩估计量;

(II) β 的最大似然估计量.



2004 年全国硕士研究生入学统一考试 数学(一) 答案及双色点评

一、填空题

(1) $y = x - 1$

考点: 曲线的切线

思路: 由所给直线方程求得切线斜率,再考虑与曲线相切即得。

[解析] 由直线方程可知待求切线方程的斜率 $k = 1$, 并设切线方程为 $y = x + b$. 对曲线 $y = \ln x$ 两边求导, 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

则若设切点为 (x_0, y_0) , 则有:

$$\frac{1}{x_0} = 1 \Rightarrow x_0 = 1, y_0 = \ln x_0 = 0,$$

即切点为 $(1, 0)$, 切点在直线 $y = x + b$ 上, 从而得:

$$b = -1, \text{ 即切线方程 } y = x - 1.$$

点评: 此题考查的是导数几何意义的应用, 是考研题中的拿分题考生注意一定不能在此类题中丢分。

(2) $\frac{1}{2}(\ln x)^2$

考点: 不定积分的计算

思路: 换元法

[解析] 设 $e^x = u$, 则 $x = \ln u, e^{-x} = \frac{1}{u}$

代入 $f'(e^x) = xe^{-x}$ 得:

$$f'(u) = \ln u \cdot \frac{1}{u} = \ln u \cdot (\ln u)', \text{ 积分得}$$

$$f(u) = \frac{1}{2}(\ln u)^2 + C, \text{ 即:}$$

$$f(e^x) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

当 $x = 0$ 时, 有 $f(1) = C = 0$

$$\text{故 } f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

点评: 积分的换元法, 以及分部积分是积分运算的基本方法, 应熟练掌握。

(3) $\frac{3}{2}\pi$

考点: 格林定理。

思路: 在由 $L, x = 0, y = 0$ 所围成的闭区域 D 上 $P(x, y), Q(x, y)$ 满足格林定理条件, 用格林公



式计算 D 上积分后除去边界 $x = 0, y = 0$ 积分值即可。

[解析] $\int_L xdy - 2ydx$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-2y)}{\partial y} \right) dxdy - \int_0^1 0dy - 2y \cdot 0 - \int_0^1 x \cdot 0 - 0dx$$

$$= 3 \iint_D dxdy$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi$$

$$= \frac{3}{2}\pi$$

点评: 本题主要考查的是格林定理的应用。在使用格林定理时考生要注意它的使用条件, 千万不能随意地使用。

$$(4) y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2}$$

考点: 欧拉方程

思路: 利用欧拉方程求解的方法将 x 换为 e^t

【分析】 本题考查欧拉方程的求解。

【解】 设 $x = e^t$, 则原方程化为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

此齐次方程的特征根为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ 。

故齐次通解为 $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$, 即

$$y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}$$

点评: 运用欧拉方程求解的方法中主要的是将所给方程中的 x 换成 e^t 形式, 然后再求其通解。

$$(5) \frac{1}{9}$$

考点: 伴随矩阵

思路: 利用变换直接计算出 $|B|$ 来。

【解析】 由 $A^* A = |A|$, 将方程右乘 A 得

$|A| AB = 2|A| B + A$, 移项后得

$$(A - 2E)B \cdot |A| = A$$

两边取模, 得:

$$|B| = \frac{|A|}{|A|^3 \cdot |A - 2E|} = \frac{1}{9}$$

点评: 考研填空题, 计算一般都有简便方法, 考生平时应养成习惯, 多动脑。

$$(6) \frac{1}{e}.$$

考点: 指数分布, 方差及概率分布

思路: 用公式



[解析] 参数为 λ 的指数分布密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{其方差 } DX = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\text{则 } P\{X > \sqrt{DX}\} = P\{X > \frac{1}{\lambda}\}$$

$$= 1 - P\{X \leq \frac{1}{\lambda}\}$$

$$= 1 - \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= 1 + e^{-\lambda x} \Big|_0^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$= \frac{1}{e}$$

点评: 随机变量的几种常用的分布及其性质和数字特征是考生必须牢牢掌握的。

二、选择题

(7) B

考点: 无穷小

思路: 直接进行积分计算是非常困难的, 我们可以利用等价无穷小的性质。

$$\text{【解】 } \alpha = \int_0^S \cos t^2 dt = \int_0^{S^2} \cos u d\sqrt{u} = \frac{1}{2} \int_0^{S^2} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{S^2} \frac{d \sin u}{\sqrt{u}} \sim \frac{1}{2} \int_0^{S^2} \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} \Big|_0^{S^2} = S$$

$$\beta = \int_0^{S^2} \tan \sqrt{t} dt \sim \int_0^{S^2} \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{S^2} = \frac{2}{3} S^3$$

$$\gamma = \int_0^{\sqrt{S}} \sin t^3 dt \sim \int_0^{\sqrt{S}} t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 \Big|_0^{\sqrt{S}} = \frac{1}{4} S^2$$

比较 S 的指数可得升阶排序为 α, γ, β , 即选 B.

点评: 本题还可以应用洛必达法则求解, 解决关于无穷小的题目时, 应注意它是一个趋势, 而不是具本的值。

(8) C

考点: 函数的导数

思路: 给出一点的导数值大于零, 并不能就此判定某一区间的单调性, 故 A, B 为非选项。

[解析] 本题考查导数的概念, 给出一点的导数值大于零, 并不能就此判定某一区间内的单调性, 故 A, B 为非选项。

由导数定义: $f'(0) = f'_+(0) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} > 0, x \in (0, \delta)$ 故有 $f(x) - f(0) > 0$, 即 C 选项为答案。

点评: 公式、定理的应用条件, 是其重要的组成部分, 考生平时一定要注意掌握, 应做题时更好辨别清楚。

(9) B

考点: 级数的收敛与发散。

【分析】 本题考查级数收敛的必要条件的判定及比较法判定级数的敛散性。 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 是级



数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件而非充分条件,故虽然由 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ 可推知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 未必收敛,故 A 为非选项.

对于 B 项,因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = \lambda$,可认为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 具有可比性,而调和级数发散,故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必发散,选 B.

对 C 项存在反例,如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,而 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1 \neq 0$,对 D 可举反例调和级数.

点评:考生应注意区别正项级数敛散性的几种判别法及其要求的细节.

(10) B

考点:变上限积分

【解析】用分部积分法将 $F(t)$ 化成变限定积分,然后对变限积分求导.

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_1^t \left(\int_y^t f(x) dx \right) d(y-1) \\ &\xrightarrow{\text{分部积分}} \left[(y-1) \int_y^t f(x) dx \right] \Big|_{y=1}^{y=t} - \int_1^t (y-1) d \left(\int_y^t f(x) dx \right) \\ &= \int_1^t (y-1) f(y) dy, \\ &\Rightarrow F'(t) \Big|_{t=2} = [(t-1)f(t)] \Big|_{t=2} = f(2). \end{aligned}$$

点评:此题技巧性较强,看到抽象的二次积分,考生应首先想到分部积分.

(11) D

考点:矩阵初等变换定理,即:对 A 施行一次初等列变换,相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等方阵.

思路:利用该定理可直接写出 Q

$$\text{【解】 } A Q_1 = B, \text{ 则 } Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A Q = C, \text{ 则 } Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

点评:矩阵初等变换时最重要的是搞清左乘还是右乘,以及各个初等矩阵的顺序.

(12) A

考点:向量的相关性

思路:视 B 的列向量为以 A 为系数矩阵的线性方程组的解,利用解的性质进行判断.

【解】 设 A 的列向量组 $\{a_1, a_2, \dots, a_s\}$, B 的任意一组列向量为 $\{b_1^{(j)}, b_2^{(j)}, \dots, b_s^{(j)}\}^T$ 则可得 n 个方程 $\sum_{i=1}^s a_i b_i^{(j)} = 0 (j = 1, \dots, n)$

因为 B 为非零矩阵,故至少存在一组 $b_i^{(j)}$ 不全为零,由线性相关定义知 A 的列向量组线性相关,同理可得出 B 的行向量组也线性相关,即 A 为选项.

点评: $AB = 0$, 这种式子是方程组中的一种常见的形式,其关键是把 A 视为方程组的特征矩阵,而把 B 的列向量视为方程组的解, A 的列数与 B 的行数与未知数的个数相同.

(13) C

考点:正态分布