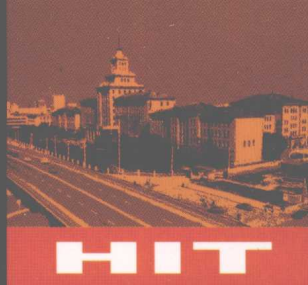


Approaches to Prove Inequalities



数学·统计学系列

建立不等式的方法

王挽澜 著



NLIC 2970701474



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



数学·统计学系列

Approaches to Prove Inequalities

建立不等式的方法

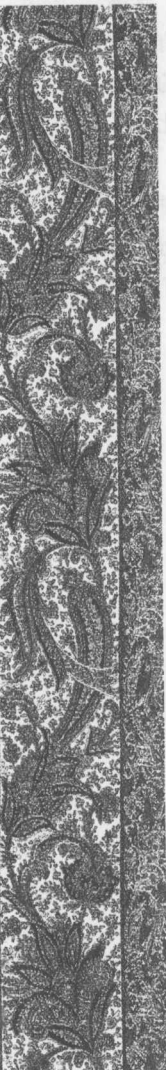
● 王挽澜 著



NLIC 2970701474



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



内 容 简 介

这是国内第一部系统论述古典及现代不等式的建立及证明方法的数学专著。本专著的特点是,涵盖从低级到高级、从古典到现代、从代数到分析和几何的诸多方法,既呈传统特色,又兼革新增补。尽量列举证明不等式的诸多方法及其例子,有典型方法的介绍,如数学归纳,凸性的应用等。也有重点介绍国内外正在流行的一些新颖、时髦和典型手段,如动态规划,受控、支撑函数,拟线性化, λ 、权函数, Mercer, 物理, 降维, 软件, 机械化等方法。在众多方法中有的突显我国特色,如机械化、权函数、降维等方法;还有些方法在不同程度上介绍华人数学家的重要贡献,如泛函、矩阵、规划、确界等,其中尚含最近 20 多年由中国学者提出的新方法。此外,作者还顾及了从中学到大学的数学教育。

综合不等式的名家和院士 Josip Pečarić、杨路、张景中、匡继昌等对于原稿的推荐意见指出:该书介绍了诸多方法,颇有意义。至今,在世界数学文献里还没有一部介绍众多不同方法而称心如意的专著。显然,这类书对所有的数学家皆是很需要的,尤其对那些专攻不等式的学者们。

本书适合大中师生、数学研究者及数学爱好者阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

建立不等式的方法/王挽澜著. —哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2011.3

ISBN 978-7-5603-3176-8

I. ①建… II. ①王… III. ①不等式—研究 IV. O178
中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 018068 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 唐 蕾 杨万鑫

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 开 印张 48 字数 868 千字

版 次 2011 年 3 月第 1 版 2011 年 3 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-3176-8

定 价 98.00 元

(如因印装质量问题影响阅读, 我社负责调换)

Preface

In order to establish new inequalities, it is not sufficient just to know some given inequalities. It is also important to master many methods and skills of establishing inequalities, and the more the better.

Up to now in the world literature there hasn't existed a well-content monograph that presents numerous and varied methods. It is clear that such a book is very necessary for all the mathematicians, especially those working in the theory of inequalities. Now my colleague Wan-lan Wang has done the needful.

In fact, Wang has engaged in the writing of this book and instructed several classes in the related subjects since 1986. In the circumstances, I think he has done his best, and the work contains some useful, interesting, new and classic methods. I also think that the Chinese mathematicians will be happy to be able to read the book in Chinese.

I hope that the reading of this monograph will give much pleasure to the readers.

Zagreb, Croatia, Europe, July 2008

Josip Pečarić



A Brief Introduction of Academician Josip Pečarić On

the left you can see one well-known mathematician: Academician Josip Pečarić (1948 —) was born in Kotor. He is the author or co-author of more than 700 scientific articles are published in mathematical journals, and about 60 mathematical articles are published in books, conference proceedings or was presented in conferences. He published about 60 articles in other fields of science. He is the author or co-author of 16 expert books. The professor in University of Zagreb is one of leading world experts in the theory of inequalities, so in world reference journals (in USA and Germany) he is called “a great name in the theory of inequalities”. He is the Editor-in-Chief and the founder of the international journal *Mathematical Inequalities and Applications*.

[Remark] The brief introduction is based on Banach J. Math. Anal. 2: 2(2008), 163-170.

or <http://www.emis.de/journals/BJMA/tex-v2-n2-a17.pdf>.

序 言

为了建立新的不等式,仅仅知道一些已知的不等式是不够的.还有更重要的事情是要掌握许多建立不等式的方法和技巧,多多益善.

至今,在世界文献里还没有一部能称心如意地介绍众多建立不等式的不同方法的专著.显然,这种书对所有的数学家皆是很需要的,尤其对那些专攻不等式的学者们.现在,我的同行王挽澜正好做了需要做的这件事.

事实上,自 1986 年以来,王就着手于该书的写作并在一些班级讲授相关的课题.我想他已经做到最好.内容包含了一些有用的、有趣的、新颖的和古典的方法.我亦想,中国的数学家能够阅读到这本中文书籍将会是高兴的.

我希望这部专著读物能够给读者带来更多的乐趣.

萨格勒布市,克罗地亚,欧洲,2008 年 7 月

Josip Pečarić



Josip Pečarić院士简介 在左边你能看到一位著名数学家: Josip Pečarić(1948—)院士出生于 Kotor. 他是 70 多篇发表在数学刊物上的科学论文的作者或合作者,也是大约 60 篇在书籍、会议录或会议上发表的数学文章的作用或合作者. 他还发表过大约 60 篇其他科学领域的论文. 他也是 16 部专著的作者或合作者. 这位萨格勒布大学的教授是世界上在不等式理论方面领袖级的专家之一,所以在世界具有参考价值的重要杂志(在美国和德国)里,他被称为“不等式论的伟人”. 他是国际刊物《数学不等式及其应用》的主编和创始人.

不等式的著作与符号

下面介绍一些国内外与不等式有关的书籍,其中一些今后会常常提到.

[单]单增. 几何不等式[M]. 上海:上海教育出版社,1980.

[徐王]徐利治,王兴华. 数学分析的方法及例题选讲[M]. 北京:高等教育出版社,1984.

[王]王伯英. 控制不等式基础[M]. 北京:北京师范大学出版社,1990.

[匡]匡继昌. 常用不等式[M]. 3版. 济南:山东科技出版社,2004.

[匡2]匡继昌. 常用不等式[M]. 4版. 济南:山东科技出版社,2010.

[王苏王]王向东,苏化明,王方权. 不等式·理论·方法[M]. 郑州:河南教育出版社,1994.

[王吴贾]王松桂,吴密霞,贾忠贞. 矩阵不等式[M]. 2版. 北京:科学出版社,2006.

[王风雨]王风雨. 泛函不等式. 马尔可夫半群与谱理论(英文版)[M]. 北京:科学出版社,2005.

[胡]胡克. 基础不等式的创建改进与应用[M]. 南昌:江西高校出版社,1998.

[胡2]胡克. 解析不等式的若干问题[M]. 武汉:武汉大学出版社,2003.

[杨冷]杨学枝,冷岗松,褚小光等. 不等式研究[M]. 拉萨:西藏人民出版社,2000.

[杨]杨必成. 算子范数与 Hilbert 型不等式[M]. 北京:科学出版社,2008.

[林白]林正炎,白志东. 概率不等式[M]. 北京:科学出版社,2006.

[沈1]沈文选. 矩阵的初等应用[M]. 长沙:湖南科学技术出版社,1996.

[沈2]沈文选. 单形论导引——三角形的高维推广研究[M]. 长沙:湖南师范大学出版社,2000.

[甘]甘特马赫尔 X P. 矩阵论[M]. 柯召,译. 北京:高等教育出版社,1955.

[A]R. P. Agarwal (Editor), Inequalities and applications, World Scientific Series in Applicable Analysis, 3; World Scientific Publishing Company

Inc., River Edge N. j., 1994.

[B]BULLEN P S. A dictionary of inequalities, Longman, Harlow, 1998.

[BB]BEKENBACH E F, BELLMAN R. Inequalities [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1965.

[BMV]BULLEN P S, MITRINOVIC D S, VASIC P M. Means and their inequalities[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988.

[Bor]BORWEIN P. Polynomials and polynomial inequalities[M]. 北京: 世界图书出版公司, 2003.

[Bot]BOTTEMA O, DJORDJEVIC R Z, JANIC R R, et al. 几何不等式 [M]. 单樽, 译. 北京: 北京大学出版社, 1991.

注: 该书的英文版出版于 1969 年 (Groningen).

[BS]BAINOV D, SIMCONOV P. Integral inequalities and applications [M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 1992.

[C]CHAVEL I. Isoperimetric inequalities, differential geometric and analytic perspectives[M]. London: Cambridge Univ. Press, 2001.

[DL]DUVAUT G, LIONS J L. Inequalities in mechanics and physics [M]. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1976.

[GS]GALAMBOS J, SIMONELLI I. Bonferroni-type inequalities with applications[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

[HLP]HARDY G H, LITTLEWOOD J E, PÓLYA G. Inequalities[M]. London: Cambridge University Press, 1952.

注: 本书有俄文, 汉文译本. 值得注意的是, 俄文译本有可观的注释,

补充文献与附录

[K]Zdzislaw Kamont. Hyperbolic functional differential inequalities and applications[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1999.

[K1]KAZARINOFF N D. Geometric inequalities[M]. New Haven: Yale Univ. Press, 1961.

[K2]KAZARINOFF N D. Analytic inequalities[M]. New York: Random House.

[KO]KUFNER A, OPIC B. Hardy-type Inequalities, Longman Group UK Limited 1990.

- [KZ2] KWONG M K, ZETTL A. Norm inequalities for derivatives and difference[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1980.
- [KZ2] KWONG M K, ZETTL A. Norm inequalities for derivatives and differences, Lecture Notes in mathematics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [L] LAURENT S -C. Aspects of Sobolev-type inequalities[M]. London: Cambridge Univ. , Press, 1997.
- [Mi] MIKHLIN S G. Constants in some inequalities of analysis, John Wiley & Sons, Limited, 1986.
- [MM1] MINC H, MARCUS M. 矩阵理论与矩阵不等式概要[M]. 张福振, 译. 大连: 大连理工大学出版社, 1990.
- [MM2] MINC H, MARCUS M. Permanents[M]. London: Addison-Wesley Publishing Company, 1978.
- [MO] MARSHALL A W, OLKIN I. Inequalities: Theory of majorization and its applications[M]. New York: Academic Press, 1979.
- [MPF1] MITRINOVIĆ D S, PEČARIĆ J E, FINK A M. Inequalities involving functions and their integrals and derivatives[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [MPF2] MITRINOVIĆ D S, PEČARIĆ J E, FINK A M. Classic and new inequalities in analysis[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [MPV] MITRINOVIĆ D S, PEČARIĆ J E, VOLENCE V. Recent advances in geometric inequalities, Kluwer Academic, Dordrecht, 1991.
- 注 1: 关于等周不等式内容在 139~140, 443~444, 518, 553, 586, 594, 610, 627, 654~655, 691~693 页.
- 注 2: 同时有这三位作者与陈计用英文写成的《专著“几何不等式新进展”的补遗(I)》, 宁波大学学报(理工版), 4:2(1991), 79-145.
- [MV] MITRINOVIĆ D S, VASIĆ D M. Analytic inequalities[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1970.

注:有赵汉宾的汉译本,广西人民出版社,1986年;也有张小萍,王龙的汉译本,科学出版社,1987年

[P]SOUZA P N D, SILVA J -N. Berkeley problems in mathematics[M]. 北京:科学出版社,2007.

[PS]PÓLYA G, SZEGÖG. Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Annals of Mathematics Studies 27, Princeton: Princeton University Press, 1951.

注:有刘西垣的汉文译本,北京大学出版社,1986

[PT]BORWEIN P, ERDÉLYI T. Polynomials and polynomials inequalities[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[R]RASSIAS Th M. ① Survey on classical inequalities[M]. Dodrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. ② Functional equations and inequalities[M], ibid., 2000.

[RV]ROBERTS A W, VARBERG D E. Convex functions[M]. New York: Academic Press, 1973.

[S]STEELE M J. The Cauchy-Schwartz Master Class: An introduction to the art of mathematical inequality[M]. London: Cambridge University Press, 2004.

[V]VLADIMIR M. Sobolev spaces[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1985.

[W]WALTER W. Differential and integral inequalities[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1970.

【注释】涉及不等式的颇为细致的书目可参考:

<http://www.china-pub.com/search/zhuantia.aspx/key1/inequalities>

今后行文提到时,可能只使用简化记号.如[匡],[BMV],等等.

经常用到不等式文献(如[MO])中的常见符号如次

$\mathbb{R}$ 表示实数集合, $\overline{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty)$

$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_{++} = (0, +\infty)$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i=1, \dots, n\}$

$x = \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0, i=1, \dots, n\}$

$\mathbb{R}_{++}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i > 0, i=1, \dots, n\}$

$\mathbb{C}$ 表示复数集合, $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{C}, i=1, \dots, n\}$

类似地, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}$ 表示全体整数、非负整数、正整数的集合.

$C([a, b])$ 表 $[a, b]$ 上的连续函数空间.

$C([a, b])$ 取模 $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

$f \in AC([a, b])$ 表 $[a, b]$ 上的绝对连续函数.

$f \in C_n([a, b])$ 表示有 n 阶连续导数的函数.

L_p 表测度空间 X 上的可测函数为 p 可积全体的集合.

L_p 取模 $\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

类似地, 对于无穷实数列 $\{x_n\}$ 的全体所组成的空间有记号 l_p .

$x \leq y$ 当且仅当 $x_i \leq y_i, i = 1, \dots, n$

$f(x) = (f(x_1), f(x_2), \dots), g(x, y) = (g(x_1, y_1), g(x_2, y_2), \dots)$

例如, 当 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$x^p = (x_1^p, \dots, x_n^p), x \cdot y = \underline{x} \cdot \underline{y} = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n)$

$\langle x, y \rangle = \underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, W = W_n = w_1 + \dots + w_n, w_i > 0$

$A = A_n = A_n(x, w) = W_n^{-1} \cdot \sum_{i=1}^n w_i x_i, G = G_n = G_n(x, w) = \left(\prod_{i=1}^n x_i^{w_i} \right)^{\frac{1}{W_n}}$

$H = H_n = H_n(x, w) = \frac{W_n}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{x_i}}, \|x\|_r = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}, r \neq 0$

$M_n^{[r]} = M_n^{[r]}(x, w) = \left(W^{-1} \cdot \sum_{i=1}^n w_i x_i^r \right)^{\frac{1}{r}}, r \neq 0$

$\Delta f(y) = \frac{\partial f(y)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f(y)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(y)}{\partial x_n} \right)$

在一定语境里, 常用到的术语、符号、约定有:

∞ 指 $+\infty$.

点(或向量或其他) x 指 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

分量指坐标 $x_i, i = 1, \dots, n$.

正的 $a = (a, \dots, a_n)$ 指 $a \in \mathbb{R}_{++}^n$, 记为 $a > 0$.

非负的 a 指 $a \in \mathbb{R}_+^n$, 记为 $a \geq 0$.

仅当指“当且仅当”.

调和平均、几何平均、算术平均依次记为 $H_n(\dots), G_n(\dots), A_n(\dots)$.

幂平均记为 $M_n^{[r]}(\dots)$.

GA 不等式指“几何平均—算术平均不等式”.

幂平均不等式指 $M_n^{[r]}(\dots) \leq M_n^{[s]}(\dots)$.

对于权数(列),常用的字母有 w, p, q, α .

初等(基本)对称函数 $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_r}$ 记为 $E_r(a)$ 或 $e_n^{[r]} = e_n^{[r]}(a)$;

$x < y$ 指 y (强)控制 x (见第 17 章受控方法).

最后,要指出的是,著作里数学环境的排版是按照《科学图书排版手册》排版而成.例如,向量 $(x_1, \dots, x_n)$ 的省略号排在这样的中位线而非底线位置;不等式链并非排版为期刊常见格式

$$\begin{aligned} G_n(a, w) &< (A_n(a, u))^{\frac{U}{W}} \cdot (A_n(a, v))^{\frac{V}{W}} \\ &\leq \frac{U}{W} \cdot A_n(a, u) + \frac{V}{W} \cdot A_n(a, v) \quad (\text{由 } a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b) \\ &= A_n(a, w) \end{aligned}$$

而是排版为国内的著作格式

$$\begin{aligned} G_n(a, w) &< (A_n(a, u))^{\frac{U}{W}} \cdot (A_n(a, v))^{\frac{V}{W}} \leq \\ &\frac{U}{W} \cdot A_n(a, u) + \frac{V}{W} \cdot A_n(a, v) \quad (\text{由 } a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b) = \\ &A_n(a, w) \end{aligned}$$

敬请读者注意!

一些介绍与感谢

(Author's Introductory Words and Acknowledgments)

自从1934年Hardy等名家的[HLP]问世以后,有关不等式的书籍出版了很多.这与不等式在数学及其相关学科中的广泛应用有关.国际知名学者王中烈在不等式方面建树颇丰,他曾郑重地对笔者说:“在不等式里没有专家.”乍闻其言,甚感谦逊,细细品味之后深感实言,真不愧为经验之谈!由此可知,任何一种不等式著作不可能包含过多甚至所有的内容;众多研究不等式的学者亦难于掌握不等式的方方面面.

数学家出于各种目的想建立有用而有趣的不等式,这就要求他们既要熟谙已知不等式及相关知识,也要熟谙一些证明、推广、构造或者说建立不等式的方法.只有这样,才能得到他们殷殷期望的不等式.

讲述不等式的优秀书籍很多:有的把不等式分类再从理论、方法及其应用上来讲,如[HLP]、[MV]、[匡]、[王苏王];有的把平均值分类而联系不等式,如[BMV];有的只讲某一大类不等式(可能联系某方面),如[单]、[王吴贾]、[杨]、[L]、[W]、[DL]、[MPF1]、[KO];有的是讲述某种理论而联系不等式,如[王]、[MO]、[RV];有的既宣讲古典的又选出新型的,如[MPF2];有的想把所有的不等式尽可能收集,如[B]、[M]、[匡],等等.当然,各书均从不同角度与程度提出一些不等式及建立它们的方法,甚至也讲到应用.但由于要照顾方方面面,不可能只讲方法,也不可能涉及方法时讲得过多.由此作者感到应当有一本只讲重要方法的书,尽可能向读者展示更多的方法及其实例,尤其展示一些鲜为人知的那些方法.作者旨在使得读者阅读本书后,不仅善于证明已知不等式,更能善于建立新的不等式.这正是编撰《建立不等式的方法》的目的.

作者自1986年以来,于所在学校数学专业开设了“不等式方法”选修课,其目的是提高师范生的数学素质,尤其是不等式方面的素质.这样做至少对他们的职业培训有好处.进而,使部分人有一定的研究能力.在选材上,既要包括典型而传统的方法,也要包括新颖而重要的方法.显见,还要包括自己涉猎过而有所体会的方法和实例.多年以前,一些同趣向的友人来信:希望加工后再交流.但是,因各种原因未能将原讲义彻底改写.近十多年来,在友人的合作、催促和多方面的支持下,我鼓起勇气改写成现在的这本书.写作的目的是,尽量把上述

初衷写出来,让同行共赏建立不等式方法的奇珍异宝.在讲述方法时,一方面,对于典型方法作介绍,如数学归纳法,凸性函数法……另一方面,着重介绍国内外正在流行的一些新颖和典型手段,如数学规划、受控、支撑函数、拟线性化、 λ -权函数、Mercer、物理、降维、软件、机械化等方法.值得指出的是,在众多方法中有的突显我中华特色,如机械化、权函数、降维等;又一些在不同程度上有我们华人的重要贡献,如泛函、矩阵、规划、确界等方法.

读者还须注意下述几点:

(1)为方便读者,每章可能先简述相关衔接知识.

(2)虽以展示建立不等式的方法为主线,但也尽可能给出众多的重要不等式,甚至简述其沿革,旨在给欲知其细节而拟深入研究者提供参考和核对.

(3)除了个别新的未被命名的方法,其他的尽可能沿用已经有的名称.为节省篇幅,某些周知的方法不予讲解或贯穿于其他方法之中.恒等式方法似乎是首次提出.

(4)以离散型的不等式为主,因为这类是基本的.当然,尽可能兼顾其他方面,如积分微分不等式、矩阵或算子不等式等.

(5)选材时,尽可能选用合乎主题、具有特色和简明的论证.因此,请国内外邮给作者丰富资料的一些同行谅解,未能过多使用他们的精彩内容.

(6)基本不等式(如 GA 不等式)多处提到,这样更能展示各种方法的特点.

(7)各章基本上是独立的,可以不依顺序阅读.况且,安排的次序未必是最佳的,尤其是对不同要求的读者.然而,必要时,指出前后的联系.

(8)内容兼顾各种教育层次的需要.例如,第 1~5, 7, 9, 16, 20, 22, 27, 30 章,征求中学同仁意见,他们认为其内容大抵师生皆可选读且能受益.

(9)各章中的习题有多种作用,这些是过去作讲义时让学生练习或让他们去学查资料或见识更多的已知不等式.这次修改感到不仅应保留且还应增补为好.此外,各种原因形成的疏漏尚有望于同行指正!

在前后改写作过程中,本人得到许多同行、朋友(含不知名的网友)和单位的支持.高朋良友樊熾(Ky Fan, 美国)、J. E. Pečarić(克罗地亚)、王中烈(Chung-Lie Wang, 加拿大)、R. P. Agarwal(新加坡)、S. S. Dragomir(澳大利亚)、K. Hamza(澳大利亚)、J. Sándor(罗马尼亚)、H. Alzer(德国)、V. E. S. Szabó(匈牙利)、P. S. Bullen(加拿大)、B. Mond(澳大利亚)、Th. M. Rassias(希腊)、张景中、杨路、刘应明、胡克、杨恩浩、李心灿、匡继昌、丁协平、吕涛、白苏华、冷岗松、彭联刚、黄廷祝、张伟年、张世清、王向东、祁锋、陈计、李国祯、杨

必成、石焕南、吴昌久、金士岐、王良成、杨启宇、杨学枝、张小明、吴裕东等,给我寄来很多宝贵资料并提出许多宝贵意见. 我们还尽可能引用了具有权威性的杂志如 Journal of Mathematical Analysis & Applications(JMAA)、Mathematical Inequalities & Applications(MIA)、Journal of Inequalities & Applications(JIA)、Journal of Mathematical Inequalities(JMI)、Journal of Inequalities in Pure & Applied Mathematics(JIPAM)等刊物上的多篇论文. 在漫长的写作过程中,得到校领导和不等式研究小组成员罗钊、张勇、高朝帮等的支持;西南交通大学,四川大学和成都大学图书馆的支持;也得到学校和其他自然科学基金的支持和帮助. 哈尔滨工业大学出版社大力支持本书早日出版,且其刘培杰数学工作室在审改过程中作了认真的更正. 严格讲,本书是集体劳动的体现,因为除上面种种支持外,本书 23 章降维方法还是由文家金最初执笔继而由作者重组润色;第 8 章中值定理由祁锋教授改写过,作者再次修改;第 6 章 6.6 由新秀张小明做过精辟的修改;第 30,31 章是由中国科学院成都分院姚勇和作者合作完成的,有幸尚得到师兄杨路的悉心指点. 最后,还有作者的妻子金今,多亏她使得屋内宜室宜家,她经常整理资料和烧饭洗刷,才使作者能安静地坐在电脑桌旁. 于此,笔者一并表示衷心感谢!

成都大学 王挽澜谨言



2010 年 5 月 26 日

目录(Contents)

第0章 科学家论数学与不等式(Scientists' comments for mathematics and inequalities)	(1)
第1章 平均与范数(Means and norms)	(6)
1.1 常见的平均	(6)
1.2 著名平均与公理体系	(9)
1.3 一些其他的著名平均	(12)
1.4 关于两个量的平均	(22)
1.5 常见的范数	(29)
习题	(30)
参考文献	(31)
第2章 几何平均-算术平均不等式(The arithmetic mean-geometric mean inequality)	(34)
2.1 不等式 $G_2 \leq A_2$ 的证明	(34)
2.2 不等式 $G_n \leq A_n$ 的证明	(40)
2.3 关于 GA 不等式的用场	(52)
习题	(57)
参考文献	(58)
第3章 利用基本不等式方法(Approaches of using fundamental inequalities)	(60)
3.1 基本的不等式及其基本关系	(60)
3.2 利用 GA 不等式	(64)
3.3 Hölder, Cauchy 和 Minkowski 不等式的相关注释	(73)
3.4 利用 Cauchy 不等式和 Hölder 不等式	(79)
3.5 利用 Minkowski 不等式和三角形不等式	(87)
3.6 利用 Bernoulli 不等式	(91)
3.7 利用 Чебышев 不等式	(94)
3.8 利用 Jensen 不等式	(99)