数学竞赛辅导

高等数学精题·精讲·精练

（高职高专适用）

陈启浩 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

数学竞赛辅导
高等数学精题·精讲·精练

（高职高专适用）

陈启浩　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是高职高专类大学生数学竞赛辅导书，可供自学使用，也可用于竞赛培训.

书中通过典型例题的精解，既梳理了重点的解题方法，也介绍了实用的解题技巧．书中的例题，既有基本概念和基本方法运用的例题，也有综合性和技巧性较强的例题．在每章之后都精选了一些练习题，并附上解题过程和答案.

图书在版编目（CIP）数据

数学竞赛辅导高等数学精题・精讲・精练/陈启浩编著.—北京：机械工业出版社，2010.12

高职高专适用

ISBN 978-7-111-34083-6

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①数学—竞赛—高等职业教育—题解
Ⅳ.①O1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 060675 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　李永联
责任校对：李秋荣　封面设计：路恩中　责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2011 年 5 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm・12 印张・292 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-34083-6
定价：24.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：（010）88361066
销售一部：（010）68326294
销售二部：（010）88379649
读者购书热线：（010）88379203

网络服务
门户网：http：//www.cmpbook.com
教材网：http：//www.cmpedu.com

前　言

在高职高专学生中开展数学竞赛，必能进一步激发他们学习数学的热情，提高他们分析、推演各种数学问题的能力，因此，这是一项对提高高职高专数学教学质量和高职高专学生的数学修养极为有益的重要举措.

本书旨在为复习迎赛的高职高专学生提供一份参考资料，帮助他们进一步融会贯通高等数学理论，熟练掌握各种计算方法和解题技巧，在较短时期内，对各种高等数学问题的求解能力有一个较大幅度的提高，从容面对数学竞赛.

全书共有三章及两个附录，每章由以下四部分组成：

一、**核心内容提要**　这里简要地列出了全章的核心内容（注意：不是全部内容）.

二、**主要方法总结**　这里对全章的解题方法进行总结、整理，使之系统化和实用化. 因此，本书不是一本“题解集”，而是一本能帮助读者准确地掌握许多有效的解题方法的参考书.

三、**典型例题精解**　这是全章的主要部分，其中既有基本概念和基本方法运用的例题，也有综合性和技巧性较强的例题，对每道例题都按分析、精解及附注作出精细、快捷的解答，并且例题分 A 组、B 组两个层次，或 A 组、B 组及 C 组三个层次，循序渐进.

四、**精选备赛练习题**　这些练习题都经过精心挑选和编排，分 A 组和 B 组两个层次，由浅入深，它们既能衡量读者已经达到的水平和具有的能力，又能通过练习进一步提高读者分析问题和解决问题的本领. 为了方便读者使用本书，每章后都附有该章练习题的解答.

编写本书是对数学竞赛培训的一种尝试，不当之处请读者和同仁批评指正.

陈启浩

目　　录

第一章 函数、极限与连续

一、核心内容提要

1. 函数定义域与值域

设函数 $f(x)$，则使 $f(x)$ 有定义的 x 的集合称为 $f(x)$ 的定义域，记为 D_f 或 D；当 x 在 D_f 上变动时，函数值 $f(x)$ 的集合称为 $f(x)$ 的值域，记为 R_f 或 R.

2. 函数的有界性、单调性、奇偶性与周期性

有界性 设函数 $f(x)$ 在某个数集 E 上有定义. 如果对任意 $x\in E$，存在 $M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 E 上有界；否则称 $f(x)$ 在 E 上无界.

单调性 设函数 $f(x)$ 在某个区间 I 上有定义. 对任意 $x_1,x_2\in I$，如果当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加（或单调不减）；如果当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)>f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少（或单调不增）. 单调增加（单调不减）与单调减少（单调不增）称为 $f(x)$ 的单调性.

奇偶性 设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的数集 E 上有定义. 如果对任意 $x\in E$，有 $f(-x)=-f(x)$（或 $f(-x)=f(x)$），则称 $f(x)$ 是奇函数（或偶函数）.

周期性 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义. 如果对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，存在正数 T，使得

$$f(x+T)=f(x), \tag{1}$$

则称 $f(x)$ 是周期函数；否则称 $f(x)$ 是非周期函数.

当 $f(x)$ 是周期函数时，称满足式(1)的最小的正数 T 为 $f(x)$ 的周期.

3. 反函数与复合函数

反函数 设函数 $y=f(x)$ 的定义域与值域分别为 D 与 R. 如果对任意 $y\in R$，都有唯一的 $x\in D$ 与之对应，则称如此确定的函数 $x=\varphi(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，通常将反函数记为 $y=\varphi(x)$.

$y=\varphi(x)$ 的定义域为 R，值域为 D.

复合函数 设函数 $y=f(u)$（定义域为 D_f）与 $u=\varphi(x)$（定义域与值域分别为 D_φ,R_φ）. 如果 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$，则使得 $x\in D_\varphi$，通过 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 与 y 对应而确定的函数，称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，记为 $y=f(\varphi(x))$.

$$y=f(\varphi(x))\text{ 的定义域}=\{x\mid x\in D_\varphi \text{ 且 } \varphi(x)\in D_f\cap R_\varphi\}.$$

4. 函数极限与左、右极限之间的关系

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

设函数 $f(x)$ 在 $|x|>N$(N 是某个充分大的正数)上有定义，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

5. 两个重要极限与四个常用极限

重要极限

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，推广形式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=k$($k$ 是常数)；

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，推广形式 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=\mathrm{e}^k$($k$ 是常数)；

或者 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，推广形式 $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^k$($k$ 是常数).

常用极限

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$($\mu$ 是常数)，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

6. 无穷小比较、常用等价无穷小以及等价无穷小代替定理

无穷小比较

设 $\alpha(x)$，$\beta(x)$(其中，在点 x_0 的某个去心邻域内 $\beta(x)\neq 0$)都是 $x\to x_0$ 时的无穷小.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 的高阶无穷小，记为 $o(\beta(x))$.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 的低阶无穷小.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小，特别当 $c=1$ 时，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

上述的 $x\to x_0$ 相应地换为 $x\to x_0^-$，$x_0\to x_0^+$，$x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$ 也可.

常用的等价无穷小

$x\to 0$ 时，

$\sin x\sim x$，　$\tan x\sim x$，　$\arcsin x\sim x$，　$\arctan x\sim x$，

$\ln(1+x)\sim x$，　$\mathrm{e}^x-1\sim x$，　$(1+x)^\mu-1\sim\mu x(\mu\neq 0)$，　$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$.

等价无穷小代替定理

设 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$，$\beta(x)\sim\beta_1(x)$，则当 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ 存在或为 ∞ 时，有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

上述的 $x \to x_0$ 换为 $x \to x_0^-$，$x \to x_0^+$，$x \to \infty$，$x \to -\infty$，$x \to +\infty$ 也都正确.

7. 数列极限存在准则

准则Ⅰ　设数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$，如果 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n (n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = A$，则 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$.

准则Ⅱ　设数列 $\{x_n\}$ 单调不减有上界，或单调不增有下界，则 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ 存在.

8. 函数连续的定义

函数在一点处连续的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义. 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续；

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左半邻域（或右半邻域）内有定义. 如果 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$（或 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$），则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续（或右连续）.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续，又右连续.

函数在闭区间上连续的定义

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内的每点处都连续，且在点 $x=a$ 处右连续和点 $x=b$ 处左连续，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

初等函数在其定义区间上必连续.

9. 函数的间断点

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

设 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点. 如果 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在，则称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点. 特别当 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$（即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在）时，称 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点；当 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 时，称 x_0 是 $f(x)$ 的跳跃间断点. 当 x_0 不是第一类间断点时，称为第二类间断点.

10. 闭区间上连续函数性质

最值定理　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值 M 与最小值 m，即存在 $\xi, \eta \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = M$ 和 $f(\eta) = m$.

介值定理　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则对介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$（$x_1, x_2 \in [a,b]$）之间的任一实数 c，存在 $\xi \in [x_1, x_2]$ 或 $[x_2, x_1]$，使得 $f(\xi) = c$. 特别对介于 M 与 m（M，m 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值）之间的任一实数 c，存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = c$.

零点定理　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b) < 0$，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = 0$.

零点定理有多种推广形式，例如，

(1)设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f(a)f(b)\leqslant 0$,则存在 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=0$;

(2)设函数 $f(x)$在$[a,+\infty)$上连续,且 $f(a)f(+\infty)<0$(其中 $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,这里 $f(+\infty)$可以为$+\infty$或$-\infty$),则存在 $\xi\in(a,+\infty)$,使得 $f(\xi)=0$.

二、主要方法总结

1. $\dfrac{0}{0}$型未定式极限计算方法

下述的方法与结论对 $x\to x_0^-$, $x\to x_0^+$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$也都适用.

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,则称极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$为$\dfrac{0}{0}$型未定式极限,简称$\dfrac{0}{0}$型未定式.它的计算方法有:

(1)消去 $f(x)$与 $g(x)$中趋向于零的公因子,将未定式转换成非未定式,然后按极限运算法则计算.

(2)利用重要极限和常用极限计算.

(3)利用等价无穷小代替定理,即先对 $f(x)$或 $g(x)$作等价无穷小代替,然后计算代替后的极限.

(4)当利用上述方法还无法算出极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$时,应用$\dfrac{0}{0}$型洛必达法则,它是:

设函数 $f(x)$,$g(x)$在点 x_0 的某个去心邻域内可导且 $g'(x)\neq 0$,则当$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在或为$\infty$时,有$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

2. 数列极限计算方法

设数列$\{x_n\}$,则$\lim\limits_{x\to\infty}x_n$ 的计算方法如下:

(1)利用数列极限运算法则计算.

(2)将数列极限转换成函数极限,然后用函数极限计算方法计算:

记 $f(n)=x_n$,将 $f(n)$中的 n 换成x 得函数 $f(x)$,然后利用函数极限的各种计算方法算出极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

(3)利用数列极限存在准则计算$\lim\limits_{x\to\infty}x_n$.

利用准则Ⅰ计算$\lim\limits_{x\to\infty}x_n$ 时,往往对 x_n 作适当缩小和放大得到数列$\{y_n\}$,$\{z_n\}$,使得 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,\cdots)$,则当$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$ 时,就有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

当$\{x_n\}$是由递推式 x_1,$x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$定义时,往往利用准则Ⅱ计算$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.此时先确定$\{x_n\}$有上界或下界,然后再考察$\{x_n\}$的单调性.

$\{x_n\}$的单调性的确定有以下三种方法:

(i)如果 $x_{n+1}-x_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$,则$\{x_n\}$单调不减;如果 $x_{n+1}-x_n\leqslant 0(n=1,2,\cdots)$,则$\{x_n\}$单调不增.

(ii)如果$\{x_n\}$是正项数列，则当$\frac{x_{n+1}}{x_n}\geqslant 1(n=1,2,\cdots)$时，$\{x_n\}$单调不减；如果$\frac{x_{n+1}}{x_n}\leqslant 1(n=1,2,\cdots)$时，$\{x_n\}$单调不增.

(iii)将递推式$x_{n+1}=f(x_n)$中的x_n改为x得$f(x)$.如果$f'(x)\geqslant 0$，则当$x_1\leqslant x_2$时，$\{x_n\}$单调不减；当$x_1\geqslant x_2$时，$\{x_n\}$单调不增.

当确定了$\lim\limits_{x\to\infty}x_n$存在后，记其值为$A$，对所给递推式两边令$n\to\infty$求极限得到关于$A$的方程$A=f(A)$，解此方程算得的$A$，即为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$的值.

3. 当函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续且满足某些其他条件时，证明命题“存在ξ使得$f(\xi)=0$或与$f(\xi)$有关的某个等式成立”的方法

当要证明“存在$\xi\in(a,b)$(或$\xi\in[a,b]$)，使得$f(\xi)=0$成立”时，根据连续函数的零点定理，只要找到满足$f(x_1)f(x_2)<0$(或$f(x_1)f(x_2)\leqslant 0$)的不同两点$x_1,x_2\in[a,b]$即可.

当要证明“存在$\xi\in(a,b)$(或$\xi\in[a,b]$)，使得与$f(\xi)$有关的某个等式成立”时，首先将等式的右边移到左边，成为$F(\xi)=0$，然后取$F(x)$为辅助函数，检验它在$[a,b]$上连续，并在$[a,b]$上找到满足$F(x_1)F(x_2)<0$(或$F(x_1)F(x_2)\leqslant 0$)的不同两点x_1,x_2即可.

三、典型例题精解

A　组

例 1.1　函数$f(x)=\sqrt{1+\ln(x+1)}+\dfrac{\arcsin\frac{x-1}{2}}{x-2}$的定义域为______.

分析　根据组成$f(x)$的各个函数的定义域，寻找使$f(x)$有定义的点x的集合即可.

精解　使$f(x)$有定义的x必须满足

$$\begin{cases}x+1\geqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}},\\ \left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1,\\ x\neq 2\end{cases}\quad\text{即}\ \frac{1}{\mathrm{e}}-1\leqslant x<2\ \text{或}\ 2<x\leqslant 3,$$

所以$f(x)$的定义域为$\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1,2\right)\cup(2,3]$.

附注　应记住各个基本初等函数的定义域.

例 1.2　函数$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$的值域为______.

分析　先确定$f(x)$的定义域，然后计算对定义域中的每个x，$f(x)$的取值范围.

精解　$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，对于定义域中的每个x，由

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=1-\frac{3\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=1-\frac{3}{\mathrm{e}^{2x}+1}$$

以及$0<\dfrac{3}{\mathrm{e}^{2x}+1}<3$知$-2<f(x)<1$.所以$f(x)$的值域为$(-2,1)$.

附注 由于本题的函数 $f(x)$ 比较简单，可以直接算出它的值域，当 $f(x)$ 比较复杂时，以下结论对于计算值域是有用的：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则它的值域是 $[m,M]$，其中 m,M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值.

例 1.3 函数 $f(x)=\begin{cases} e^x-1, & x<0, \\ 1-e^{-x}, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 的单调性与奇偶性为______.

分析 用定义判断 $f(x)$ 的单调性与奇偶性.

精解 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 对任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，

当 $x_1<x_2<0$ 时，$f(x_1)=e^{x_1}-1<e^{x_2}-1=f(x_2)$；

当 $x_1<0\leqslant x_2$ 或 $x_1\leqslant 0<x_2$ 时，$f(x_1)=e^{x_1}-1<0\leqslant 1-e^{-x_2}=f(x_2)$，或 $f(x_1)=e^{x_1}-1\leqslant 0<1-e^{-x_2}=f(x_2)$；

当 $0\leqslant x_1<x_2$ 时，$f(x_1)=1-e^{-x_1}<1-e^{-x_2}=f(x_2)$，

所以，$f(x)$ 单调增加.

对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(-x)=\begin{cases} e^{-x}-1, & -x<0, \\ 1-e^x, & -x\geqslant 0 \end{cases}=\begin{cases} -(e^x-1), & x\leqslant 0, \\ -(1-e^{-x}), & x>0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -(e^x-1), & x<0, \\ -(1-e^{-x}), & x\geqslant 0 \end{cases}=-f(x),$$

所以，$f(x)$ 是奇函数.

附注 函数 $y=f(x)$ 的图形如图 1.3 所示. 由图可知，$f(x)$ 是单调增加的奇函数.

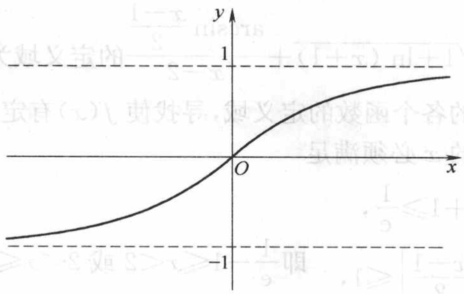

图 1.3

例 1.4 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leqslant 1, \\ \ln x, & x>1, \end{cases}$ $u=\varphi(x)$ 是函数 $u=g(x)=\begin{cases} 1-x, & x\leqslant 0, \\ -x^2, & x>0 \end{cases}$ 的反函数，则复合函数 $f(\varphi(x))=$______.

分析 先算出反函数 $u=\varphi(x)$，然后考虑 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合.

精解 由 $u=g(x)=\begin{cases} 1-x, & x\leqslant 0, \\ -x^2, & x>0 \end{cases}$ 解出 $x=\begin{cases} \sqrt{-u}, & u<0, \\ 1-u, & u\geqslant 1, \end{cases}$ 所以 $u=g(x)$ 的反函数 $u=\varphi(x)=\begin{cases} \sqrt{-x}, & x<0, \\ 1-x, & x\geqslant 1, \end{cases}$ 如图 1.4 所示.

$$f(\varphi(x))=\begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)\leqslant 1, \\ \ln\varphi(x), & \varphi(x)>1 \end{cases}\xlongequal{\text{图 1.4}}\begin{cases} e^{\varphi(x)}, & -1\leqslant x<0 \text{ 或 } x\geqslant 1, \\ \ln\varphi(x), & x<-1 \end{cases}$$

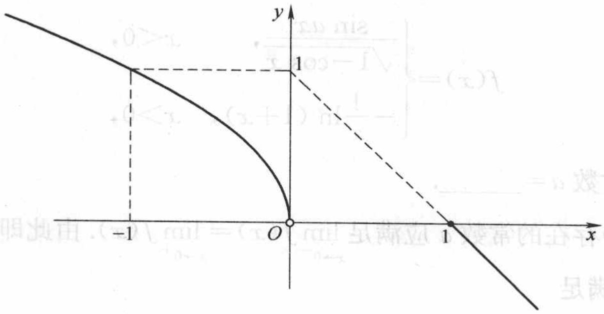

图　1.4

$$=\begin{cases}e^{\sqrt{-x}}, & -1\leqslant x<0,\\ e^{1-x}, & x\geqslant 1,\\ \ln\sqrt{-x}, & x<-1\end{cases}=\begin{cases}\ln\sqrt{-x}, & x<-1,\\ e^{\sqrt{-x}}, & -1\leqslant x<0,\\ e^{1-x}, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

附注　计算 $f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)\leqslant 1,\\ \ln\varphi(x), & \varphi(x)>1\end{cases}$ 的表达式时画出 $u=\varphi(x)$ 的图形是很有必要的，它能快捷地确定 $\varphi(x)\leqslant 1$ 时 x 的范围和 $\varphi(x)>1$ 时 x 的范围.

例 1.5　设 $f(x)=\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$______.

分析　由于 $x\to 0$ 时 $e^{\frac{1}{x}}$ 的极限不存在，所以需从计算 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 入手.

精解　由于

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=\frac{2+0}{1+0}-1\quad\left(\text{由于}\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0\right)$$

$$=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=\frac{0+0}{0+1}+1\quad\left(\text{由于}\lim_{x\to 0^+}e^{-\frac{1}{x}}=0\right)$$

$$=1,$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

附注　实际上，$f(x)$ 是分段函数，它在分段点 $x=0$ 处的极限应从计算左、右极限入手.

例 1.6　设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}, & x<0,\\ -\dfrac{1}{x}\ln(1+x), & x>0,\end{cases}$$

则使$\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在的常数$a=$______.

分析 使$\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在的常数a应满足$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$. 由此即可算出$a$的值.

精解 由于a应满足

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x), \tag{1}$$

其中,$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin ax}{-\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax}{-\sqrt{2}\cdot\dfrac{x}{2}}=-\sqrt{2}a$,

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=-1.$$

将它们代入式(1)得

$$-\sqrt{2}a=-1,即\ a=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

附注 计算中应注意的是,$x\to0^-$时,$\sqrt{1-\cos x}=-\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}$.

例 1.7 设$x\to0$时,$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比$x\sin x^n$的高阶无穷小,$x\sin x^n$是比$e^{x^2}-1$的高阶无穷小,则正整数$n=$______.

分析 分别寻找$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$,$x\sin x^n$,$e^{x^2}-1$在$x\to0$时的等价无穷小,即可确定n的值.

精解 $x\to0$时,

$$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\frac{1}{2}x^2\cdot x^2=\frac{1}{2}x^4,$$
$$x\sin x^n\sim x^{n+1},$$
$$e^{x^2}-1\sim x^2.$$

于是,由$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比$x\sin x^n$的高阶无穷小知$4>n+1$,即$n<3$;由$x\sin x^n$是比$e^{x^2}-1$的高阶无穷小知$n+1>2$,即$n>1$. 因此,正整数$n=2$.

附注 本题实际上是通过寻找等价无穷小确定各个函数的无穷小的阶数,这种方法也适合于求解若干个无穷小由低阶到高阶(或由高阶到低阶)的排序问题.

例 1.8 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}=$______.

分析 由于不能把$1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$加在一起,因此考虑应用数列极限存在准则Ⅰ计算所给的数列极限.

精解 记$x_n=\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$,则

$$x_n>\sqrt[n]{n\cdot\frac{1}{n}}=1,且\lim_{n\to\infty}1=1,$$

$$x_n<\sqrt[n]{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n个}}=\sqrt[n]{n},\quad 且\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

所以，由极限存在准则Ⅰ知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=1.$$

附注 应记住$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. 证明如下：

考虑$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$. 由于$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}$，其中

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\xlongequal{洛必达法则}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=e^0=1$，从而有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

例 1.9 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^3)}{\sqrt{1+x^3}-1}, & x>0,\\ b, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax^2}-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则常数 a,b 分别为______.

分析 由 $f(x)$在点 $x=0$ 处连续知 a,b 应满足 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$，由此即可算得 a,b 的值.

精解 a,b 应满足

$$\begin{cases}f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x), & (1)\\ \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x), & (2)\end{cases}$$

其中，$f(0)=b$，

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x^3)}{\sqrt{1+x^3}-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3}{\frac{1}{2}x^3}=2,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{ax^2}-1}{x\sin\frac{x}{4}}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^2}{\frac{1}{4}x^2}=4a.$$

将它们代入式(1)、式(2)得

$$\begin{cases}b=2,\\ 4a=2,\end{cases}即\ a=\frac{1}{2},b=2.$$

附注 如果要求 $x=0$ 是 $f(x)$的可去间断点，则 $a=\frac{1}{2}$，$b\neq2$.

例 1.10 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x}, & x<0,\\ 3, & x=0,\\ 3+xe^{\frac{1}{x-1}}, & x>0,\end{cases}$ 则它的间断点为_____(需指明类型).

分析 分 $x<0,x>0$ 以及 $x=0$ 三种情形分别寻找 $f(x)$ 的间断点.

精解 当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{\sin 3x}{x}$ 连续，无间断点.

当 $x>0$ 时，$f(x)=3+xe^{\frac{1}{x-1}}$ 仅在 $x=1$ 处不连续，并且

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(3+xe^{\frac{1}{x-1}})=\infty.$$

此外，由 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=3$ 知，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

因此，$f(x)$ 仅有间断点 $x=1$，是第二类间断点.

附注 $x=1$ 是第二类间断点，但不是无穷型的，这是因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$ 不成立.

例 1.11 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$.

分析 所给极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限. 将分子化为乘积形式来寻找它的等价无穷小，然后用等价无穷小代替定理计算所给极限.

精解 由于 $x\to0$ 时，

$$\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})=-2\sin\frac{x(e^x+e^{-x})}{2}\sin\frac{x(e^x-e^{-x})}{2}$$

$$\sim-2\cdot\frac{x(e^x+e^{-x})}{2}\cdot\frac{x(e^x-e^{-x})}{2}=-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\cdot x^2(e^x-e^{-x})$$

$$=-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})e^{-x}\cdot x^2(e^{2x}-1)\sim-\frac{1}{2}(1+e^{-2x})\cdot x^2\cdot 2x=-(1+e^{-2x})x^3,$$

所以，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+e^{-2x})x^3}{x^3}=-\lim\limits_{x\to0}(1+e^{-2x})=-2.$

附注 记住 $x\to0$ 时的常用等价无穷小往往可以快捷地找到函数 $f(x)$ 在 $x\to0$ 的等价无穷小，这对于计算 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限是十分重要的.

例 1.12 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-x+x^2)+\ln(1+x+x^2)}{\sec x-\cos x}$.

分析 所给极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限，应用等价无穷小代替定理计算.

精解

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-x+x^2)+\ln(1+x+x^2)}{\sec x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln[(1-x+x^2)(1+x+x^2)]\cos x}{1-\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\cos x\cdot\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{\sin^2 x}\right]=\lim_{x\to0}\cos x\cdot\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{\sin x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x^4}{x^2}=1.$$

附注　计算$\frac{0}{0}$型未定式极限，应先进行化简，即将非未定式部分分离出来，用极限运算法计算之.

例 1.13　求函数极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3+2\sin x)^x-3^x}{\tan^2 x}$.

分析　所给极限是$\frac{0}{0}$型未定式极限，寻找分子、分母的等价无穷小，并用等价无穷小代替定理计算这个极限.

精解　由于$x\to 0$时，

$$(3+2\sin x)^x-3^x=3^x\left[\left(1+\frac{2\sin x}{3}\right)^x-1\right]$$

$$=3^x\left[e^{x\ln\left(1+\frac{2\sin x}{3}\right)}-1\right]\sim 3^x\cdot x\ln\left(1+\frac{2\sin x}{3}\right)$$

$$\sim 3^x\cdot x\cdot\frac{2}{3}\sin x\sim 3^x\cdot\frac{2}{3}x^2,$$

$\tan^2 x\sim x^2$，

所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3+2\sin x)^x-3^x}{\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x\cdot\frac{2}{3}x^2}{x^2}=\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}3^x=\frac{2}{3}$.

附注　寻找幂指函数$[f(x)]^{g(x)}$在$x\to x_0$时的等价无穷小时，总是先将它指数化，即$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$.

例 1.14　计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$.

分析　将函数指数化后再计算极限.

精解　由于

$$\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}},$$

其中，$x\to 0$时，$\ln\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}=\ln\left(1+\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{n}\right)\sim\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(e^{ix}-1)$，

所以，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{ix}-1}{x}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{e^{ix}-1}{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{1}{2}(n+1).$$

因此　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}}=e^{\frac{1}{2}(n+1)}$.

附注　本题也可以按以下方法计算：

$$\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\left[\frac{e^x(e^{nx}-1)}{n(e^x-1)}\right]^{\frac{1}{x}}=e\cdot e^{\frac{1}{x}\ln\frac{e^{nx}-1}{n(e^x-1)}}$$

$$=e\cdot e^{\frac{1}{x}\ln\left[1+\frac{e^{nx}-1-n(e^x-1)}{n(e^x-1)}\right]},$$