



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 信息光学

(第二版)

INFORMATION  
OPTICS

苏显渝 主编  
李继陶 曹益平 张启灿 编



科学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 信息光学

(第二版)

苏显渝 主编

李继陶 曹益平 张启灿 编

科学出版社

北京

2

## 内 容 简 介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材,在保持第一版特色的基础上,根据近年来信息光学领域的进展,结合长期的教学实践,对第一版内容进行了修订和补充。

全书共 14 章。第 1~4 章介绍了信息光学的基础理论;第 5~12 章介绍了光学全息、计算全息、莫尔现象及其应用、空间滤波、波前调制、光学相干和非相干处理等,是信息光学的重点应用领域;第 13~14 章介绍了最近发展起来的数字光计算机和三维面形测量。本书既阐述了信息光学的基本理论,也介绍了这一学科的最新进展,理论体系严谨,物理概念清晰,内容深入浅出,部分章节配有启发性的例题,每一章后附有适量的习题,以培养学生的创造性思维和解决实际问题的能力。书中部分内容包含了作者教学和科学研究的心得。

本书可作为高等院校光学、光学工程、光信息科学技术、电子科学与技术等有关专业本科生和硕士研究生教材,也可供相应专业的教师和科技工作者参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

信息光学/苏显渝主编. —2 版. —北京:科学出版社,2011  
普通高等教育“十一五”国家级规划教材  
ISBN 978-7-03-030737-8

I. 信… II. 苏… III. 信息光学-高等学校-教材 IV. O4-38

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 061440 号

责任编辑:昌盛 郝泽潇 / 责任校对:宋玲玲  
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号  
邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

1999 年 9 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2011 年 6 月第 二 版 印张:23

2011 年 6 月第十四次印刷 字数:590 000

印数:34 001—38 000

定价:46.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

## 前 言

本书自 1999 年 9 月出版后,已历时 10 余年,其间 13 次重印,被国内数十所高等学校相关学科专业选作教材或参考书,受到众多好评.这次被列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材.为了更好地发挥国家级规划教材的作用,反映近年来学科发展和技术进步,根据出版后教学实践的体会,我们对全书内容进行了修订和补充.

在第二版中,修改了一些错误以及不够准确和严谨的地方,删掉了一些已经由新的技术替代而过时的内容,补充和更新了有关信息光学理论与应用的一些新的发展.在第 1 章中增加了空间频率的局域化的概念与相关内容.在第 2 章中增加了历史引言、从矢量理论到标量理论以及复杂相干光学系统的分析.第 3 章增加了超越经典衍射极限的分辨率问题.第 4 章增加了部分相干成像和部分相干光场中透镜的傅里叶变换性质.第 5 章增加了数字全息和全息数据存储.第 6 章增加了计算全息在非球面检测中的应用实例.第 7 章增加了同心圆莫尔和螺旋莫尔的描述.由于空间光调制器的进展和在光学信息处理中的重要作用,第二版中增加了波前调制一章,并将原书中照相胶片和衍射光学元件的部分并入该章.第 10 章中删掉了半色调网屏技术,增加了几种不变的图像识别方法.第 12 章删掉了应用较少的哈达玛变换,增加了应用更多的 Hankel 变换、Radon 变换和 Hough 变换.第 13 章增加了数字光计算和离散模拟光学处理器.第 14 章除了增加调制度测量轮廓术和动态三维传感的内容外,还介绍了最新的三维电视摄像机的内容.书中部分内容包含了作者的研究成果和教学心得.

本书的第一版由苏显渝、李继陶编写.李继陶长期担任信息光学教学工作,现虽已退休多年,仍关心学科发展;苏显渝从事信息光学教学与科研 30 年,担任本书主编,期望为信息光学教材建设再尽微薄之力.曹益平和张启灿两位中青年骨干教师近年陆续加入教学团队,他们的加入为教学改革和发展增添了新的活力.本书第 1、4 章由李继陶编写,第 2、3、5 章由曹益平编写,第 10、12、13 章由张启灿编写,第 6、7、8、9、11、14 章由苏显渝编写.

本书坚持第一版的指导思想,既阐述了信息光学的基本理论,也介绍了这一学科的最新进展,理论体系严谨,物理概念清晰,内容深入浅出,部分章节配有启发性的例题,每一章后附有适量的习题,以培养学生的创造性思维和解决实际问题的能力.全书内容丰富,教学中为适应不同层次学生的要求,可以选择讲授不同内容.本书也可作为从事光学信息技术研究和工程应用技术人员的参考书.

希望读者对书中的不足给予指正.

编 者

2010 年 6 月

## 第一版前言

光学是一门较早发展的学科,它在科学与技术的发展史上占有重要地位,近 50 年来,由于光学自身的发展以及和其他科学技术的广泛结合与相互渗透,这门古老学科迸发出新的青春活力.随着新技术的出现,新的理论也不断发展,形成了许多新的分支学科或边缘学科.信息光学是近 40 年发展起来的一门新兴学科,它是在全息术、光学传递函数和激光的基础上,从传统的、经典的波动光学中脱颖而出的.

1948 年全息术的提出,1955 年作为像质评价的光学传递函数的建立,以及 1960 年激光的诞生,是现代光学发展中的几件大事.激光的应用使全息术获得了新的生命,全息术和光学传递函数的进一步发展,加上将数学中的傅里叶变换和通信中的线性系统理论引入光学,使光学和通信这两个不同的领域在信息学范畴内统一起来,从“空域”走向“频域”.光学工程师不再仅仅限于用光强、振幅或透过率的空间分布来描述光学图像,也像电气工程师那样用空间频率的分布和变化来描述光学图像,为光学信息处理开辟了广阔的应用前景.与其他形态的信号处理相比,光学信息处理具有高度并行、大容量的特点.近年来,这一学科发展很快,理论体系已日趋成熟,信息光学已渗透到科学技术的诸多领域,成为信息科学的重要分支,得到越来越广泛的应用.

本书是为高年级大学生和研究生的教学需要而编写的,也可供教师及科研人员参考,主要介绍信息光学的基础理论.全书共分 13 章,除包含传统的线性系统、标量衍射、传递函数、部分相干、全息和信息处理等内容外,还介绍了莫尔条纹、分数傅里叶变换、阿达玛变换、光学小波变换、光计算和三维面形测量等内容.在本书的基础部分还编写了习题,为便于教师讲授和学生自学,我们对习题给出了简单解答.

承蒙苗军、陆成强二同志为本书绘制插图,我们深表谢意.

虽然本书是在作者多年教学和科研工作的基础上完成的,但由于作者水平有限,缺点和错误实难避免,敬请专家和读者批评指正.

苏显渝 李继陶

1999 年 3 月于四川大学

# 目 录

前言	习题	31
第一版前言	第 2 章 标量衍射理论	32
第 1 章 线性系统分析	2.1 历史引言	32
1.1 几个常用的非初等函数	2.2 从矢量理论到标量理论	34
1.1.1 矩形函数	2.3 基尔霍夫衍射理论	35
1.1.2 sinc 函数	2.3.1 惠更斯-菲涅耳原理与基尔霍夫衍射公式	35
1.1.3 三角形函数	2.3.2 惠更斯-菲涅耳原理与叠加积分	37
1.1.4 符号函数	2.3.3 相干光场在自由空间传播的平移不变性	38
1.1.5 阶跃函数	2.3.4 相干光场在自由空间传播的脉冲响应的近似表达式	39
1.1.6 圆柱函数	2.4 衍射的角谱理论	39
1.2 $\delta$ 函数	2.4.1 单色平面波与本征函数	39
1.2.1 $\delta$ 函数的定义	2.4.2 角谱的传播	40
1.2.2 $\delta$ 函数的性质	2.4.3 孔径对角谱的影响	41
1.2.3 梳状函数	2.5 菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射	42
1.3 二维傅里叶变换	2.5.1 菲涅耳衍射	42
1.3.1 傅里叶级数	2.5.2 泰伯效应	45
1.3.2 傅里叶变换	2.5.3 夫琅禾费衍射	46
1.3.3 广义傅里叶变换	2.6 透镜的傅里叶变换性质	46
1.4 卷积和相关	2.6.1 透镜的相位变换作用	47
1.4.1 卷积	2.6.2 透镜的傅里叶变换特性	48
1.4.2 互相关	2.6.3 透镜的一般变换特性	51
1.4.3 自相关	2.7 复杂相干光学系统的分析	53
1.4.4 有限功率函数的相关	2.7.1 算符分析法的几个约束条件	54
1.5 傅里叶变换的基本性质和有关定理	2.7.2 算符分析法	54
1.5.1 傅里叶变换的基本性质	2.7.3 算符分析法的应用举例	55
1.5.2 傅里叶变换的基本定理	习题	56
1.6 线性系统分析	第 3 章 光学成像系统的传递函数	58
1.6.1 线性系统	3.1 相干照明衍射受限系统的点扩散函数	58
1.6.2 线性平移不变系统	3.1.1 透镜的点扩散函数	58
1.6.3 线性平移不变系统的传递函数	3.1.2 衍射受限系统的点扩散函数	60
1.6.4 线性平移不变系统的本征函数	3.2 相干照明下衍射受限系统的成像规律	62
1.7 二维光场分析		
1.7.1 单色光波场的复振幅表示		
1.7.2 平面波的空间频率		
1.7.3 复振幅分布的空间频谱		
1.8 空间频率的局域化		

3.3 衍射受限系统的相干传递函数	63	4.7.3 均匀圆形光源	105
3.3.1 相干传递函数	63	4.8 部分相干光场中透镜的傅里叶变换性质	108
3.3.2 相干线扩散函数和边缘扩散函数	66	4.9 部分相干成像习题	111
3.4 衍射受限非相干成像系统的传递函数	69	<b>第5章 光学全息</b>	113
3.4.1 非相干成像系统的光学传递函数(OTF)	69	5.1 光学全息概述	113
3.4.2 OTF与CTF的关系	71	5.2 波前记录与再现	114
3.4.3 衍射受限的OTF	72	5.2.1 波前记录	114
3.4.4 非相干线扩散函数和边缘扩散函数	74	5.2.2 波前再现	115
3.5 有像差系统的传递函数	75	5.2.3 全息图的基本类型	117
3.6 相干与非相干成像系统的比较	76	5.3 同轴全息图和离轴全息图	118
3.6.1 截止频率	76	5.3.1 同轴全息图	118
3.6.2 像强度的频谱	76	5.3.2 离轴全息图	119
3.6.3 两点分辨	78	5.4 基元全息图	120
3.7 超越经典衍射极限的分辨率问题	79	5.5 菲涅耳全息图	123
3.7.1 超分辨率存在的理论依据	79	5.5.1 点源全息图的记录和再现	123
3.7.2 常用超分辨率方法简介	80	5.5.2 几种特殊情况的讨论	125
习题	81	5.6 傅里叶变换全息图	128
<b>第4章 部分相干理论</b>	83	5.6.1 傅里叶变换全息图	128
4.1 多色光场的解析信号表示	83	5.6.2 准傅里叶变换全息图	131
4.1.1 单色信号的复表示	83	5.6.3 无透镜傅里叶变换全息图	131
4.1.2 多色信号的复表示	84	5.7 像全息图	132
4.2 互相干函数	87	5.7.1 再现光源宽度的影响	133
4.2.1 互相干函数	87	5.7.2 再现光源光谱宽度的影响	133
4.2.2 互相干函数的谱表示	90	5.7.3 色模糊	134
4.3 时间相干性	91	5.7.4 像全息的制作	135
4.3.1 时间相干性	91	5.8 彩虹全息	136
4.3.2 相干时间	95	5.8.1 二步彩虹全息	137
4.3.3 傅里叶变换光谱术	95	5.8.2 一步彩虹全息	138
4.4 空间相干性	96	5.8.3 彩虹全息的色模糊	138
4.5 在准单色条件下的干涉	96	5.9 相位全息图	140
4.6 准单色光的传播和衍射	97	5.10 模压全息图	142
4.6.1 互相干的传播	97	5.10.1 白光再现浮雕全息图的制作	142
4.6.2 薄透明物体对互强度的影响	100	5.10.2 电铸金属模板	142
4.6.3 部分相干光的衍射	100	5.10.3 模压	142
4.7 范西泰特-策尼克定理	102	5.11 体积全息	143
4.7.1 范西泰特-策尼克定理	102	5.11.1 透射体积全息图	143
4.7.2 相干面积	104	5.11.2 反射全息图	144
		5.12 平面全息图的衍射效率	145
		5.12.1 振幅全息图的衍射效率	145

5.12.2 相位全息图的衍射效率 .....	146	6.6 相息图.....	178
5.13 全息干涉计量 .....	147	6.7 计算全息的应用.....	179
5.13.1 二次曝光法 .....	147	6.7.1 空间滤波器 .....	179
5.13.2 单次曝光法 .....	149	6.7.2 干涉计量 .....	180
5.13.3 时间平均法 .....	149	6.7.3 再现三维像 .....	181
5.14 数字全息 .....	150	6.7.4 计算全息扫描器 .....	181
5.14.1 数字全息的基本概念及其特点 .....	150	6.8 计算全息的几种物理解释.....	182
5.14.2 数字全息的基本原理 .....	151	习题 .....	183
5.15 全息数据存储 .....	153	<b>第7章 莫尔现象及其应用</b> .....	184
习题 .....	155	7.1 莫尔现象的基本规律.....	184
<b>第6章 计算全息</b> .....	158	7.1.1 莫尔条纹的形成 .....	184
6.1 计算全息的理论基础.....	158	7.1.2 莫尔条纹的基本性质 .....	186
6.1.1 概述 .....	158	7.2 干涉、全息与莫尔现象 .....	187
6.1.2 抽样定理 .....	159	7.2.1 干涉条纹的莫尔模拟 .....	187
6.1.3 计算全息的抽样与信息容量 .....	162	7.2.2 全息与莫尔 .....	188
6.1.4 时域信号和空域信号的调制与解调 .....	163	7.2.3 全息干涉条纹的莫尔模拟.....	188
6.1.5 计算全息的分类 .....	164	7.3 莫尔计量术.....	188
6.2 计算全息的编码方法.....	165	7.3.1 长度和角度测量 .....	188
6.2.1 计算全息的编码 .....	165	7.3.2 同心圆莫尔及其在二维位移测量中的应用 .....	189
6.2.2 迂回相位编码方法 .....	166	7.3.3 用于应力变形测量 .....	191
6.2.3 修正离轴参考光的编码方法 .....	167	7.3.4 螺旋莫尔及其在光束准直性测量中的应用 .....	192
6.2.4 二元脉冲密度编码 .....	169	7.4 莫尔轮廓术.....	194
6.3 计算傅里叶变换全息.....	170	7.4.1 阴影莫尔法 .....	194
6.3.1 抽样 .....	170	7.4.2 投影莫尔法 .....	195
6.3.2 计算离散傅里叶变换 .....	171	7.4.3 扫描莫尔法 .....	196
6.3.3 编码 .....	171	<b>第8章 空间滤波</b> .....	197
6.3.4 绘制全息图 .....	171	8.1 空间滤波的基本原理.....	197
6.3.5 再现 .....	171	8.1.1 阿贝成像理论 .....	197
6.3.6 几点讨论.....	172	8.1.2 空间滤波的傅里叶分析 .....	198
6.4 计算像面全息.....	173	8.2 系统与滤波器.....	204
6.4.1 抽样 .....	173	8.2.1 空间滤波系统 .....	204
6.4.2 编码 .....	174	8.2.2 空间滤波器 .....	206
6.4.3 全息图的绘制和再现 .....	174	8.3 空间滤波应用举例.....	207
6.4.4 四阶迂回相位编码的一个理论解释 .....	175	8.3.1 策尼克相衬显微镜 .....	207
6.5 计算全息干涉图.....	175	8.3.2 补偿滤波器 .....	207
6.5.1 二元全息函数 .....	175	8.4 傅里叶变换透镜.....	208
6.5.2 二元全息干涉图的制作 .....	176	8.4.1 傅里叶透镜的截止频率、空间带宽积和视场 .....	209
6.5.3 载波频率的选择 .....	177	8.4.2 傅里叶透镜对校正像差的要求 .....	211
6.5.4 计算举例.....	177		



8.4.3 傅里叶变换透镜的结构	213	习题	254
习题	213	<b>第 11 章 非相干光学处理</b>	256
<b>第 9 章 波前调制</b>	214	11.1 相干与非相干光学处理	256
9.1 照相胶片	214	11.1.1 相干与非相干光学处理的比较	256
9.1.1 胶片处理的物理过程	214	11.1.2 非相干光学处理系统的噪声抑制	257
9.1.2 $H-D$ 曲线	215	11.2 基于几何光学的非相干处理系统	258
9.1.3 胶片用于非相干光学系统中	216	11.2.1 成像	258
9.1.4 胶片用于相干光学系统中	216	11.2.2 无运动元件的卷积和相关运算	259
9.1.5 调制传递函数	217	11.2.3 用散焦系统得到脉冲响应的综合	260
9.2 空间光调制器	219	11.3 基于衍射的非相干处理——非相干频域综合	261
9.2.1 概述	219	11.3.1 切趾术	262
9.2.2 液晶光阀	220	11.3.2 沃耳特(Wolter)最小强度检出滤波器	263
9.2.3 磁光空间光调制器	223	11.4 白光光学信息处理技术	263
9.2.4 可变形反射镜空间光调制器	224	11.4.1 白光光学处理的基本原理	264
9.2.5 LCOS 空间光调制器	226	11.4.2 实时假彩色编码	265
9.3 衍射光学元件	227	11.5 相位调制假彩色编码	267
9.3.1 微光学与二元光学	227	11.5.1 光栅抽样	268
9.3.2 二元光学的产生和发展	228	11.5.2 漂白处理	268
9.3.3 二元光学元件的设计	230	11.5.3 白光信息处理系统中的滤波解调	269
9.3.4 二元光学元件的制作	232	习题	270
习题	233	<b>第 12 章 几个变换在光学中的应用</b>	271
<b>第 10 章 相干光学处理</b>	235	12.1 分数傅里叶变换	271
10.1 图像相减	235	12.1.1 分数傅里叶变换的定义	271
10.1.1 空域编码频域解码相减方法	235	12.1.2 分数傅里叶变换的几个基本性质	272
10.1.2 正弦光栅滤波器相减方法	236	12.1.3 用透镜系统实现分数傅里叶变换	274
10.2 匹配滤波与图像识别	237	12.2 几何变换	278
10.2.1 匹配空间滤波器	237	12.2.1 几何变换定义和种类	278
10.2.2 用全息制作复数滤波器	239	12.2.2 广义几何变换	279
10.2.3 图像识别	240	12.2.3 几何变换的光学实现	279
10.2.4 联合变换相关识别	241	12.3 Hankel 变换	280
10.3 不变的图样识别光学方法	243	12.3.1 Hankel 变换的数学定义	280
10.3.1 梅林相关器	243	12.3.2 极坐标下的傅里叶变换	281
10.3.2 圆谐波相关	244	12.4 Radon 变换	282
10.3.3 合成判别式函数	245		
10.4 模糊图像的复原	246		
10.4.1 逆滤波器	246		
10.4.2 维纳滤波器	247		
10.5 合成孔径雷达	249		
10.5.1 合成孔径概念	249		
10.5.2 航向信息的记录	250		

12.4.1 Radon 变换的定义 .....	282	14.2.1 基本原理与计算公式 .....	308
12.4.2 像的重构 .....	282	14.2.2 散斑对激光三角法精度的影响 .....	310
12.5 Hough 变换 .....	283	14.2.3 测量实例(鞋楦三维面形测量) .....	311
12.5.1 Hough 变换定义 .....	283	14.2.4 基于激光同步扫描的三维面形测量 .....	312
12.5.2 Hough 变换的光学实现 .....	284	14.3 采用激光片光的三维传感 .....	314
12.6 光学小波变换 .....	284	14.3.1 激光片光的产生 .....	314
12.6.1 从短时傅里叶变换到小波变换 .....	285	14.3.2 测量原理 .....	314
12.6.2 小波变换 .....	287	14.3.3 测量实例 .....	315
12.6.3 小波函数 .....	289	14.4 相位测量剖面术 .....	316
12.6.4 光学小波变换 .....	291	14.4.1 相位测量剖面术的原理 .....	317
12.6.5 光学 Morlet 小波变换的实例 .....	292	14.4.2 产生结构照明的方法 .....	320
<b>第 13 章 数字光计算</b> .....	294	14.4.3 相位测量剖面术应用举例 .....	321
13.1 光学逻辑运算 .....	294	14.5 傅里叶变换剖面术 .....	324
13.2 离散模拟光学处理器 .....	296	14.5.1 基本原理 .....	325
13.2.1 信息和系统的离散表示 .....	296	14.5.2 FTP 方法的测量范围 .....	326
13.2.2 串行矩阵-矢量乘法器 .....	297	14.5.3 一种改进的方法 .....	327
13.2.3 并行的非相干光矩阵-矢量乘法器 .....	298	14.5.4 动态过程三维面形测量 .....	327
13.2.4 外积处理器 .....	299	14.6 调制度测量轮廓术 .....	329
13.3 光学互连 .....	300	14.6.1 基本原理 .....	329
13.3.1 自由空间光互连 .....	300	14.6.2 信息处理方法 .....	330
13.3.2 光纤和集成光波导光互连 .....	301	14.6.3 测量实例 .....	331
13.4 光存储 .....	301	14.7 三维轮廓测量其他光学方法 .....	332
13.4.1 光盘存储器 .....	301	14.7.1 采用激光扫描的三维共焦成像 .....	332
13.4.2 光全息存储 .....	301	14.7.2 飞行时间法 .....	333
13.5 光计算机 .....	302	14.7.3 三维电视摄像机 .....	334
<b>第 14 章 光学三维传感</b> .....	304	习题 .....	335
14.1 主动三维传感的基本概念 .....	305	本章参考文献 .....	336
14.1.1 主动照明的三维传感方法 .....	305	<b>参考书目</b> .....	339
14.1.2 三种基本的结构照明方式 .....	305	<b>部分习题参考答案</b> .....	340
14.1.3 三维传感系统的基本组成 .....	306		
14.2 采用单光束的三维传感 .....	308		

# 第 1 章 线性系统分析

一般说来,一个光学系统可以用一个输入和输出的方框图来表示.光学系统对输入信号的作用可以是线性的,也可以是非线性的.对于非线性系统,除一些特例外,目前还没有通用的技术来求解.虽然任何一个光学系统都不是严格线性的,但许多光学系统都可以作为线性系统来处理.由于光学系统几乎都用二维空间变量来描述,所以,本书的开篇将简述有关二维线性系统的一些基本知识.

## 1.1 几个常用的非初等函数

### 1.1.1 矩形函数

一维矩形函数定义为

$$\text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = \begin{cases} 1, & \left|\frac{x-x_0}{a}\right| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.1.1)$$

函数图像如图 1.1.1 所示,表示函数以  $x_0$  为中心,宽度为  $a(a>0)$ ,高度为 1 的矩形.当  $x_0=0$ , $a=1$  时,矩形函数形式变成  $\text{rect}(x)$ ,它是以  $x=0$  为对称轴的,高度和宽度均为 1 的矩形.二维矩形函数可表为一维矩形函数的乘积  $\text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\text{rect}\left(\frac{y-y_0}{b}\right)$ ,其中  $a,b>0$ .

### 1.1.2 sinc 函数

sinc 函数定义为

$$\text{sinc}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = \frac{\sin\pi(x-x_0)/a}{\pi(x-x_0)/a} \quad (1.1.2)$$

式中  $a>0$ ,函数在  $x=x_0$  处有最大值 1.零点位于  $x-x_0 = \pm na (n=1,2,\dots)$ .对于  $x_0=0, a=1$  的情况,(1.1.2)式变成  $\text{sinc}(x)$ ,函数图像如图 1.1.2 所示.

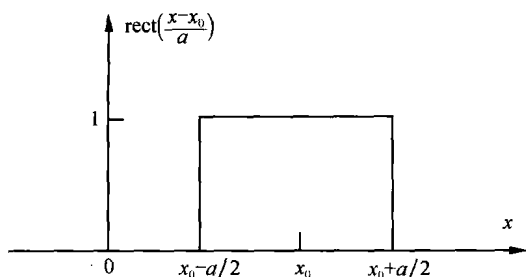


图 1.1.1 矩形函数

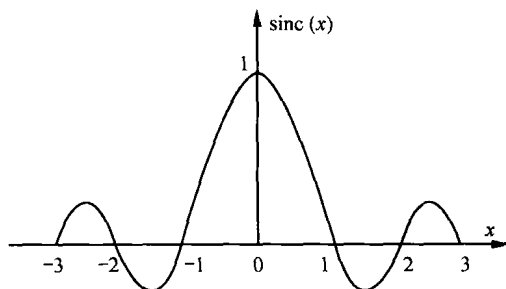


图 1.1.2 sinc 函数

### 1.1.3 三角形函数

$$\Lambda\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{x}{a}\right|, & |x| \leq a \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.1.3)$$

其中  $a > 0$ , 函数以原点为底边中心、底边长为  $2a$ 、高度为 1 的等腰三角形. 图 1.1.3 给出了  $a=1$  时  $\Lambda(x)$  的图像.

### 1.1.4 符号函数

符号函数定义为

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (1.1.4)$$

此函数图像如图 1.1.4 所示.

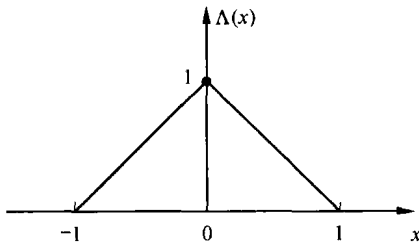


图 1.1.3 三角形函数

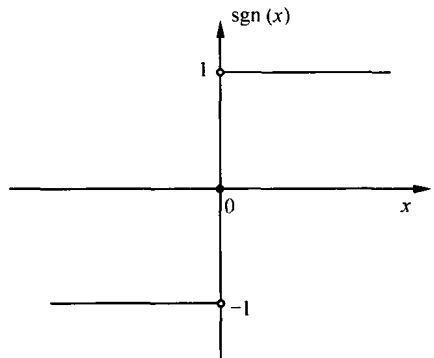


图 1.1.4 符号函数

### 1.1.5 阶跃函数

阶跃函数定义为

$$\text{step}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (1.1.5)$$

其图像如图 1.1.5 所示.

### 1.1.6 圆柱函数

在直角坐标系内圆柱函数的定义式为

$$\text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) = \begin{cases} 1, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq a \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.1.6)$$

极坐标内的定义式为

$$\text{circ}\left(\frac{r}{a}\right) = \begin{cases} 1, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (1.1.7)$$

圆柱函数的图像如图 1.1.6 所示.

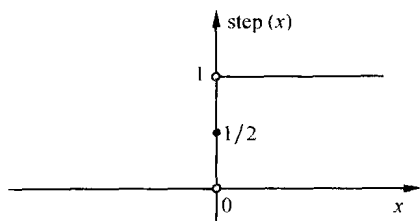


图 1.1.5 阶跃函数

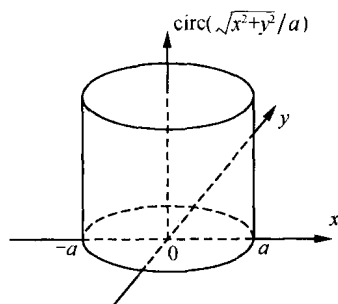


图 1.1.6 圆柱函数

## 1.2 $\delta$ 函数

在物理学和工程技术中,人们常常要考察质量或能量在空间或时间上高度集中的各种现象.为此,人们设想了诸如质点、点电荷、点光源以及瞬时脉冲等物理模型. $\delta$ 函数就是用来描述这类物理模型的数学工具. $\delta$ 函数不是普通函数,它不像普通函数那样完全由数值对应关系确定.它是广义函数,其属性完全由它在积分中的作用表现出来.然而,从应用的角度看,也可以把 $\delta$ 函数与普通函数联系起来,用普通函数描述它的性质.这样既简单、直观,又能充分满足要求.

### 1.2.1 $\delta$ 函数的定义

#### 1. 类似普通函数形式的定义

$$\delta(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad x \neq 0 \text{ 或 } y \neq 0 \\ \infty, \quad x = y = 0 \end{array} \right. \quad (1.2.1)$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx dy = 1$$

在这个 $\delta$ 函数定义中,与普通函数类似之处,就是保留了数值对应关系的痕迹.

#### 2. 普通函数序列极限形式的定义

$$\delta(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x, y) \quad (1.2.2)$$

并且对函数序列中的任一函数 $g_n(x, y)$ 来说,皆有

$$\left. \begin{array}{l} \iint_{-\infty}^{\infty} g_n(x, y) dx dy = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x, y) = 0, \quad x \neq 0 \text{ 或 } y \neq 0 \end{array} \right\} \quad (1.2.3)$$

常用的表现形式有

$$\delta(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \exp[-n^2 \pi(x^2 + y^2)] \quad (1.2.4)$$

$$\delta(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \operatorname{rect}(nx) \operatorname{rect}(ny) \quad (1.2.5)$$

$$\delta(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \operatorname{sinc}(nx) \operatorname{sinc}(ny) \quad (1.2.6)$$

#### 3. 广义函数形式的定义

$\delta$ 函数是一个广义函数,它赋予检验函数 $\phi(x, y)$ 以一个数 $\phi(0, 0)$ ,即

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) \phi(x, y) dx dy = \phi(0, 0) \quad (1.2.7)$$

其中  $\phi(x, y)$  在原点处连续. 上式表明,  $\delta(x, y)$  在该式左端积分中的作用, 就是赋予  $\phi(x, y)$  在  $x=y=0$  处的数值  $\phi(0, 0)$ . 不同形式的函数, 只要它在积分中的作用和 (1.2.7) 式相同, 就可认为它们与  $\delta(x, y)$  相等.

### 1.2.2 $\delta$ 函数的性质

$\delta$  函数的常用性质有

#### 1. 筛选性质

设函数  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  点连续, 则有

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) dx dy = f(x_0, y_0) \quad (1.2.8)$$

#### 2. 坐标缩放性质

设  $a, b$  为实常数, 则有

$$\delta(ax, by) = \frac{1}{|ab|} \delta(x, y) \quad (1.2.9)$$

#### 3. 可分离变量性

$$\delta(x, y) = \delta(x) \delta(y) \quad (1.2.10)$$

#### 4. 与普通函数乘积的性质

函数  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  点连续, 则有

$$f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) = f(x_0, y_0) \delta(x - x_0, y - y_0) \quad (1.2.11)$$

### 1.2.3 梳状函数

#### 1. 一维梳状函数

一维梳状函数定义为

$$\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) \quad (1.2.12)$$

这是一个间隔为 1 的  $\delta$  函数的无穷序列, 其图像如图 1.2.1 所示. 显然, 梳状函数也是广义函数, 其性质可由  $\delta$  函数的性质推出.

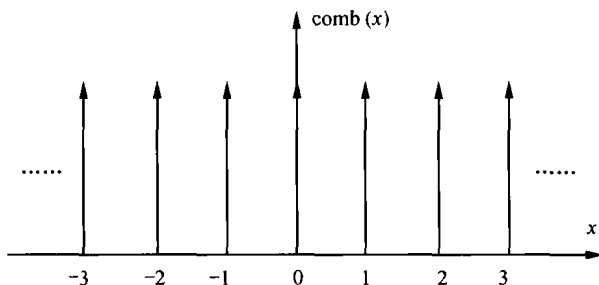


图 1.2.1 梳状函数

## 2. 二维梳状函数

通常总是在直角坐标系内考察二维梳状函数,并将它记为  $\text{comb}(x, y)$ , 其定义式为

$$\text{comb}(x, y) = \text{comb}(x)\text{comb}(y) \quad (1.2.13)$$

式中

$$\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) \quad (1.2.14)$$

$$\text{comb}(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(y-m) \quad (1.2.15)$$

## 1.3 二维傅里叶变换

### 1.3.1 傅里叶级数

一个周期函数  $f(t)$ , 周期  $\tau = \frac{1}{\nu}$ , 它满足狄利克雷条件, 即函数在一个周期内有有限个极值点和第一类间断点(所谓第一类间断点是函数的不连续点, 在该点附近函数的值有限, 其左右极限存在), 则  $f(t)$  可展开成三角级数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n \nu t + b_n \sin 2\pi n \nu t) \quad (1.3.1)$$

其中傅里叶系数

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \cos 2\pi n \nu t dt \\ b_n &= \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \sin 2\pi n \nu t dt \end{aligned} \right\} \quad (1.3.2)$$

也可以等效地把周期函数  $f(t)$  展开成指数傅里叶级数形式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(j2\pi n \nu t) \quad (1.3.3)$$

其中

$$C_n = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \exp(-j2\pi n \nu t) dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.3.4)$$

$C_n$  一般是频率  $\nu$  的复函数, 通常称为频谱函数. 由于周期函数只包含  $0, \pm \nu, \pm 2\nu, \dots$  频率分量, 频率的取值是离散的, 所以周期函数只有离散谱.

### 1.3.2 傅里叶变换

#### 1. 直角坐标系内的二维傅里叶变换

非周期函数  $f(x, y)$  在整个无限  $xy$  平面上满足狄利克雷条件, 且  $\iint_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy$  存在, 则二元函数  $f(x, y)$  的傅里叶变换定义为

$$F(\xi, \eta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{-j2\pi(\xi x + \eta y)\} dx dy \quad (1.3.5)$$

其中  $(\xi, \eta)$  是与函数  $F$  对应的直角坐标系的两个坐标变量,  $(x, y, \xi, \eta)$  都是实变量. 函数

$f(x, y)$  可以是实函数, 亦可以是复函数,  $F(\xi, \eta)$  或实或复由函数  $f(x, y)$  的性态决定. 式中的  $\exp[-j2\pi(\xi x + \eta y)]$  称为二维傅里叶变换的核. 类似地, 定义

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) \exp[j2\pi(\xi x + \eta y)] d\xi d\eta \quad (1.3.6)$$

为二元函数  $F(\xi, \eta)$  的二维逆傅里叶变换. 利用 (1.3.6) 式可以把非周期函数分解为连续频率的余弦分量的积分,  $F(\xi, \eta)$  表示各连续频率成分的权重因子.

## 2. 存在条件

为了保证如上定义的二维傅里叶变换对的存在, 函数  $f(x, y)$  要满足狄利克雷条件和绝对可积条件. 从纯数学观点看, 对这种条件的探讨自然是有意义的. 这里不讨论这个理论问题, 而是从应用的观点指出以下两点.

① 在应用傅里叶变换的各个领域中的大量事实表明, 作为时间或空间函数而实际存在的物理量, 总具备保证其傅里叶变换存在的基本条件. 可以说, 物理上的可能性是保证傅里叶变换存在的充分条件. 因此, 从应用的角度看, 可以认为傅里叶变换实际上总是存在的.

② 在应用问题中, 也会遇到一些理想化的函数, 例如余弦函数、阶跃函数以至最简单的常数等. 它们都是光学中常用的, 但不满足保证其傅里叶变换存在的充分条件; 同时它们在物理上也是不可能严格实现的. 对这类函数难以讨论其经典意义下的傅里叶变换, 然而借助函数序列极限概念或  $\delta$  函数性质可以得到这类函数的广义傅里叶变换. 这种广义傅里叶变换不仅在理论上自治, 而且在应用上也能给出符合实际的结果.

由此可以认为, 今后涉及到的函数都存在着相应的傅里叶变换, 只是有狭义和广义之分罢了.

## 3. 极坐标系内的二维傅里叶变换

### (1) 定义式

设  $xy$  平面上的极坐标为  $r, \theta$ ;  $\xi\eta$  平面上的极坐标为  $\rho, \varphi$ . 显然有以下关系:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta \\ \xi &= \rho \cos \varphi, & \eta &= \rho \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (1.3.7)$$

按照以上关系式, (1.3.5) 式可改写成

$$F(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \exp[-j2\pi r \rho \cos(\theta - \varphi)] r dr d\theta \quad (1.3.8)$$

令

$$G(\rho, \varphi) = F(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \quad (1.3.9)$$

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (1.3.10)$$

于是, 极坐标系内二维傅里叶变换对的定义式可一般地表示为

$$G(\rho, \varphi) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r g(r, \theta) \exp[-j2\pi r \rho \cos(\theta - \varphi)] dr d\theta \quad (1.3.11)$$

$$g(r, \theta) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \rho G(\rho, \varphi) \exp[j2\pi r \rho \cos(\theta - \varphi)] d\rho d\varphi \quad (1.3.12)$$

与直角坐标系内的二维傅里叶变换对的定义式相比, 极坐标形式显得很复杂. 然而, 当函数  $g$  具有圆对称性时, 极坐标将显示其方便之处.

### (2) 傅里叶-贝塞尔变换

设函数  $g(r, \theta)$  具有圆对称性, 即  $g$  与  $\theta$  无关, 于是可以写成  $g(r, \theta) = g(r)$ , 将其代入



(1.3.11)式可得

$$G(\rho, \varphi) = \int_0^{\infty} r g(r) \left\{ \int_0^{2\pi} \exp[-j2\pi r \cos(\theta - \varphi)] d\theta \right\} dr$$

利用贝塞尔函数关系式

$$\int_0^{2\pi} \exp[-ja \cos(\theta - \varphi)] d\theta = 2\pi J_0(a)$$

式中  $J_0(\cdot)$  是第一类零阶贝塞尔函数. 于是

$$G(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} r g(r) J_0(2\pi r \rho) dr \quad (1.3.13)$$

由于上式右端与  $\varphi$  无关, 故已将  $G(\rho, \varphi)$  写成  $G(\rho)$ , 这表明圆对称函数的傅里叶变换仍为圆对称.

类似地, 可写出  $G(\rho)$  的逆傅里叶变换

$$g(r) = 2\pi \int_0^{\infty} \rho G(\rho) J_0(2\pi \rho r) d\rho \quad (1.3.14)$$

对比(1.3.13)式和(1.3.14)式可见, 在极坐标系内, 圆对称函数的傅里叶正变换与逆变换的运算相同. 人们将这种特殊形式的傅里叶变换称为傅里叶-贝塞尔变换.

### 1.3.3 广义傅里叶变换

如果只考虑经典意义(或称狭义的)傅里叶变换, 那么对一些很有用的函数, 都无法确定其傅里叶变换, 这给傅里叶变换带来很大的局限性. 傅里叶变换之所以获得如此广泛的应用, 在很大程度上与引入广义傅里叶变换有关. 所谓广义傅里叶变换, 是指极限意义下的傅里叶变换和  $\delta$  函数的傅里叶变换.

#### 1. 极限意义下的傅里叶变换

设  $f(x)$  是一个无法确定狭义傅里叶变换的函数. 如  $f(x)$  和一个函数序列  $f_n(x) (n=1, 2, \dots, \infty)$  具有以下关系:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (1.3.15)$$

并且对函数序列中的每一个函数  $f_n(x)$  来说, 它的狭义傅里叶变换

$$F_n(\xi) = \mathcal{F}\{f_n(x)\}$$

都存在, 而且当  $n \rightarrow \infty$  时, 函数序列  $F(\xi)$  也有确定的极限, 则称该极限为函数在极限意义下的傅里叶变换. 在应用中, 无需对这种傅里叶变换与狭义傅里叶变换作区分. 仍用  $\mathcal{F}\{\cdot\}$  表示极限意义下的傅里叶变换, 即

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}\{f_n(x)\} \quad (1.3.16)$$

作为例子, 考察符号函数  $\text{sgn}(x)$  的傅里叶变换. 由于  $\text{sgn}(x)$  不满足绝对可积条件, 无法确定其狭义傅里叶变换. 为此选取适当的函数序列

$$f_n(x) = \begin{cases} \exp(-x/n), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\exp(x/n), & x < 0 \end{cases} \quad (1.3.17)$$

式中  $n=1, 2, \dots, \infty$ . 容易看出

$$\text{sgn}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$