张景中 / 主编

走进教育数学

Go to Educational Mathematics

绕来绕去的向量法

几何解题综合方法精彩纷呈，
向量运算后来居上更辟蹊径；
巧用回路直奔主题简捷有效，
阐述原理指点诀窍创新集成.

张景中　彭翕成 / 著

科学出版社
www.sciencep.com

"十一五"国家重点图书出版规划项目

走进教育数学

Go to Educational Mathematics

绕来绕去的向量法

张景中　彭翕成／著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书详细论述用向量法解决常见几何问题的方法，特别是基于向量相加的首尾衔接规则的回路法．指出了选择回路的诀窍，用大量的例题展示回路法解题的简洁明快风格；分析了常见资料中同类题目解法烦琐的原因；提出了改进向量解题教学的见解．全书共16章，从向量的基本概念和运算法则入手，由易至难，以简御繁，不仅列出向量法解题要领，还论及向量法与复数法、解析法、质点法等的联系．

本书可供中学和大学的数学师生、数学爱好者，以及数学教育研究者参考．

图书在版编目(CIP)数据

绕来绕去的向量法/张景中，彭翕成著．—北京：科学出版社，2010
(走进教育数学/张景中主编)

ISBN 978-7-03-028674-1

Ⅰ.①绕…　Ⅱ.①张…　②彭…　Ⅲ.①向量（数学）-普及读物
Ⅳ.①O183.1-4

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第161369号

丛书策划：李　敏
责任编辑：李　敏／责任校对：李　影
责任印制：钱玉芬／整体设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2010年9月第　一　版　开本：B5（720×1000）
2010年9月第一次印刷　印张：19 1/2　插页：2
印数：1—6 000　　　　字数：330 000

定价：38.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

张景中

数学家
中国科学院院士

多年从事几何算法和定理机器证明研究，其成果曾获国家发明二等奖，中国科学院自然科学一等奖，国家自然科学二等奖.

热心数学教育，提出教育数学的思想，并从事中学教学改革和微积分教学改革的研究.

热爱科普事业，其所著《教育数学丛书》曾获中国图书奖，《数学家的眼光》等科普作品曾获国家科技进步二等奖、第六届国家图书奖、“五个一”工程奖、全国科普创作一等奖，《好玩的数学》丛书获国家科技进步二等奖.

张景中／主编

总 序

看到本丛书，多数人会问这样的问题：

“什么是教育数学?”

“教育数学和数学教育有何不同?”

简单说，改造数学使之更适宜于教学和学习，是教育数学为自己提出的任务.

把学数学比作吃核桃. 核桃仁美味而富有营养，但要砸开才能吃到它. 有些核桃，外壳与核仁紧密相依，成都人形象地叫它们“夹米子核桃”，如若砸不得法，砸开了还很难吃到. 数学教育要研究的，就是如何砸核桃吃核桃. 教育数学呢，则要研究改良核桃的品种，让核桃更美味，更营养，更容易砸开吃净.

“教育数学”的提法，最早出现在笔者 1989 年所写的《从数学教育到教育数学》中. 其实，教育数学的活动早已有之，如欧几里得著《几何原本》、柯西写《分析教程》，都是教育数学的经典之作.

数学教育有很多世界公认的难点，如初等数学里的几何和三角，高等数学里面的微积分，都比较难学. 为了对付这些难点，

很多数学老师、数学教育专家前赴后继，做了大量的研究，写了很多的著作，进行了广泛的教学实践. 多年实践，几番改革，还是觉得太难，不得不“忍痛割爱”，少学或者不学. 教育数学则从另一个角度看问题：这些难点的产生，是不是因为前人留下来的知识组织得不够好，不适于数学的教与学？能不能优化数学，改良数学，让数学知识变得更容易学习呢？

知识的组织方式和学习的难易有密切的联系. 英语中 12 个月的名字：January，February，……. 背单词要花点工夫吧！如果改良一下：一月就叫 Monthone，二月就叫 Monthtwo，等等，马上就能理解，就能记住，学起来就容易多了. 生活的语言如此，科学的语言——数学——何尝不是这样呢？

很多人认为，现在小学、中学到大学里所学的数学，从算术、几何、代数、三角到微积分，都是几百年前甚至几千年前创造出来的. 这些数学的最基本的部分，普遍认为是经过千锤百炼，相当成熟了. 对于这样的数学内容，除了选择取舍，除了教学法的加工之外，还有优化改革的余地吗？

但事情还可以换个角度看. 这些进入了课堂的数学，是在不同的年代，不同的地方，由不同的人，为不同的目的而创造出来的，而且其中很多不是为了教学的目的而创造出来的. 难道它们会自然而然地配合默契，适宜于教学和学习吗？

看来，这主要不是一个理论问题，而是一个实践问题.

走进教育数学，看看教育数学在做什么，有助于回答这类问题.

随便翻翻这几本书，就能了解教育数学领域里近 20 年来做了哪些工作. 从已有的结果看到，教育数学有事可做，而且能做更多的事情.

比如微积分教学的改革，这是在世界范围内被广为关注的事. 丛书中有两本专讲微积分，主要还不是讲教学方法，而是讲改革微积分本身.

由牛顿和莱布尼茨创建的微积分，是第一代的微积分. 这是

说不清楚的微积分. 创建者说不清楚，使用微积分解决问题的数学家也说不清楚. 原理虽然说不清楚，应用仍然在蓬勃发展. 微积分在说不清楚的情形下发展了 130 多年.

柯西和魏尔斯特拉斯等，建立了严谨的极限理论，巩固了微积分的基础，形成了第二代的微积分. 数学家把微积分说清楚了. 但是由于概念和推理烦琐迂回，对于绝大多数学习高等数学的人来说，是听不明白的微积分. 微积分在多数学习者听不明白的情形下，又发展了 170 多年，直到今天.

第三代的微积分，是正在创建发展的新一代的微积分. 人们希望微积分不但严谨，而且直观易懂，简易明快. 让学习者用较少的时间和精力就能够明白其原理，不但知其然而且知其所以然. 不但数学家说得清楚，而且非数学专业的多数学子也能听得明白.

第一代微积分和第二代微积分，在具体计算方法上基本相同；不同的是对原理的说明，前者说不清楚，后者说清楚了.

第三代微积分和前两代微积分，在具体计算方法上也没有不同；不同的仍是对原理的说明.

几十年来，国内外都有人从事第三代微积分的研究以至教学实践. 这方面的努力，已经有了显著的成效. 在我国，林群院士近 10 年来在此方向做了大量的工作. 本丛书中的《微积分快餐》，就是他在此领域的代表作.

古今中外，通俗地介绍微积分的读物极多，但能够兼顾严谨与浅显直观的几乎没有.《微积分快餐》做到了. 一张图，一个不等式，几行文字，浓缩了微积分的精华. 作者将微积分讲得轻松活泼、简单明了，而且严谨自封，让读者在品尝快餐的过程中进入了高等数学的殿堂.

丛书中还有一本《直来直去的微积分》，是笔者学习微积分的心得. 书中从“瞬时速度有时比平均速度大，有时比平均速度小”这个平凡的陈述出发，不用极限概念和实数理论，“微分不微，积分不积”，直截了当地建立了微积分基础理论. 书中概念

与《微积分快餐》中的逻辑等价而呈现形式不尽相同，殊途同归，显示出第三代微积分的丰富多彩.

回顾历史，牛顿和拉格朗日都曾撰写著作，致力于建立不用极限也不用无穷小的微积分，或证明微积分的方法，但没有成功. 我国数学大师华罗庚所撰写的《高等数学引论》中，也曾刻意求新，不用中值定理或实数理论而寻求直接证明“导数正则函数增”这个具有广泛应用的微积分基本命题，可惜也没有达到目的.

前辈泰斗是我们的先驱. 教育数学的进展实现了先驱们简化微积分理论的愿望.

两本关于微积分的书，都专注于基本思想和基本概念的变革. 基本思想、基本概念，以及在此基础上建立的基本定理和公式，是这门数学的筋骨. 数学不能只有筋骨，还要有血有肉. 中国高等教育学会教育数学专业委员会理事长、全国名师李尚志教授的最新力作《数学的神韵》，是有血有肉、丰满生动的教育数学. 书中的大量精彩实例可能是你我熟悉的老故事，而作者却能推陈出新，用新的视角和方法处理老问题，找出事物之间的联系，发现不同中的相同，揭示隐藏的规律. 幽默的场景，诙谐的语言，使人在轻松阅读中领略神韵，识破玄机. 看看这些标题，“简单见神韵”、“无招胜有招”、“茅台换矿泉”、“凌波微步微积分”，可见作者的功力非同一般！特别值得一提的是，书中对微积分的精辟见解，如用代数观点演绎无穷小等，适用于第一代、第二代和第三代微积分的教学与学习，望读者留意体味.

练武功的上乘境界是“无招胜有招”，但武功仍要从一招一式入门. 解数学题也是如此. 著名数学家和数学教育家项武义先生说，教数学要教给学生“大巧”，要教学生“运用之妙，存乎一心”，以不变应万变，不讲或少讲只能对付一个或几个题目的“小巧”. 我想所谓“无招胜有招”的境界，就是“大巧”吧！但是，小巧固不足取，大巧也确实太难. 对于大多数学子，还要重视有章可循的招式，由小到大，以小御大，小题做大，小中见

大. 朱华伟教授和钱展望教授的《数学解题策略》，踏踏实实地从一招一式一题一法着手，探秘发微，系统地阐述数学解题法门，是引领读者登堂入室之作. 作者是数学奥林匹克领域的专家. 数学奥林匹克讲究题目出新，不落老套. 我看了这本书里的不少例题，看不出有哪些似曾相识，真不知道他是从哪里搜罗来的！

朱华伟教授还为本丛书写了一本《从数学竞赛到竞赛数学》. 竞赛数学当然就是奥林匹克数学. 华伟教授认为，竞赛数学是教育数学的一部分. 这个看法是言之成理的. 数学要解题，要发现问题、创造方法. 年复一年进行的数学竞赛活动，不断地为数学问题的宝库注入新鲜血液，常常把学术形态的数学成果转化为可能用于教学的形态. 早期的国际数学奥林匹克试题，有不少进入了数学教材，成为例题和习题. 竞赛数学与教育数学的关系，于此可见一斑.

写到这里，忍不住要为数学竞赛说几句话. 有一阵子，媒体上面出现不少讨伐数学竞赛的声音，有的教育专家甚至认为数学竞赛之害甚于黄、赌、毒. 我看了有关报道后第一个想法是，中国现在值得反对的事情不少，论轻重缓急还远远轮不到反对数学竞赛吧. 再仔细读这些反对数学竞赛的意见，可以看出来，他们反对的实际上是某些为牟利而又误人子弟的数学竞赛培训. 就数学竞赛本身而言，是面向青少年中很小一部分数学爱好者而组织的活动. 这些热心参与数学竞赛的数学爱好者（还有不少数学爱好者参与其他活动，例如青少年创新发明活动、数学建模活动、近年来设立的丘成桐中学数学奖），估计不超过约两亿中小学生的百分之五. 从一方面讲，数学竞赛培训活动过热产生的消极影响，和升学考试体制以及教育资源分配过分集中等多种因素有关，这笔账不能算在数学竞赛头上；从另一方面看，大学招生和数学竞赛挂钩，也正说明了数学竞赛活动的成功因而得到认可. 对于青少年的课外兴趣活动，积极的对策不应当是限制堵塞，而是开源分流. 发展多种课外活动，让更多的青少年各得其所，把各种活动都办得像数学竞赛这样成功并且被认可，数学竞赛培训

活动过热的问题自然就化解或缓解了.

回到前面的话题. 上面说到"大巧"和"小巧",自然想到还有"中巧". 大巧法无定法,小巧一题一法. 中巧呢,则希望用一个方法解出一类题目. 也就是说,把数学问题分门别类,一类一类地寻求可以机械执行的方法,即算法. 中国古代的《九章算术》,就贯穿了分类解题寻求算法的思想. 中小学里学习四则算术、代数方程,大学里学习求导数,学的多是机械的算法. 但是,自古以来几何命题的证明却千变万化,法无定法. 为了找寻几何证题的一般规律,从欧几里得、笛卡儿到希尔伯特,前赴后继,孜孜以求. 我国最高科技奖获得者、著名数学家吴文俊院士指出,希尔伯特是第一个发现了几何证明机械化算法的人. 在《几何基础》这部名著中,希尔伯特对于只涉及关联性质的这类几何命题,给出了机械化的判定算法. 由于受时代的局限性,希尔伯特这一学术成果并不为太多人所知. 直到 1977 年,吴文俊先生提出了一个新的方法,可以机械地判定初等几何中等式型命题的真假. 这一成果在国际上被称为"吴方法",它在几何定理机器证明领域中掀起了一个高潮,使这个自动推理中最不成功的部分变成了最成功的部分.

吴方法和后来提出的多种几何定理机器证明的算法,都不能给出人们易于检验和理解的证明,即所谓可读证明. 国内外的专家一度认为,机器证明的本质在于"用量的复杂克服质的困难",所以不可能机械地产生可读证明.

笔者基于 1974 年在新疆教初中时指导学生解决几何问题的心得,总结出用面积关系解题的规律. 在这些规律的基础上,1992 年提出消点算法,和周咸青、高小山两位教授合作,创建了可构造等式型几何定理可读证明自动生成的理论和方法,并在计算机上实现. 最近在网上看到,面积消点法也多次在国外的不同的系统中实现了. 本丛书中的《几何新方法和新体系》,包括了面积消点法的通俗阐述,以及笔者提出的一个有关面积方法的公理系统,由冷拓同志协助笔者整理而成. 教育数学研究的副产

品解决了机器证明领域中的难题，对笔者而言实属侥幸.

基于对数学教育的兴趣，笔者从1974年以来，在30多年间持续地探讨面积解题的规律，想把几何变容易一些. 后来发现，国内外的中学数学教材里，已经把几何证明删得差不多了. 于是“迷途知返”，把三角作为研究的重点. 数学教材无论如何改革，三角总是删不掉的吧. 本丛书中的《一线串通的初等数学》，讲的是如何在小学数学知识的基础上建立三角，从三角的发展引出代数工具并探索几何，把三者串在一起的思路.

在《一线串通的初等数学》中没有提到向量. 其实，向量早已下放到中学，与传统的初等数学为伍了. 在上海的数学教材里甚至在初中就开始讲向量. 讲了向量，自然想试试用向量解决几何问题，看看向量解题有没有优越性. 可惜在教材里和刊物上出现的许多向量例题中，方法略嫌烦琐，反而不如传统的几何方法简捷优美. 如何用向量法解几何题？能不能在大量的几何问题的解决过程中体现向量解题的优越性？这自然是教育数学应当关心的一个问题. 为此，本丛书推出一本《绕来绕去的向量法》. 书中用大量实例说明，如果掌握了向量解题的要领，在许多情形下，向量法比纯几何方法或者坐标法干得更漂亮. 这要领，除了向量的基本性质，关键就是“回路法”. 绕来绕去，就是回路之意. 回路法是笔者的经验谈，没有考证前人是否已有过，更没有上升为算法. 书稿主要由彭翕成同志执笔，绝大多数例子，也是他采集加工的.

谈起中国的数学科普，谈祥柏的名字几乎无人不知. 老先生年近八旬，从事数学科普创作超过半个世纪，出书50多种，文章逾千篇. 对于数学的执著和一生的爱，洋溢于他为本丛书所写的《数学不了情》的字里行间. 哪怕仅仅信手翻上几页，哪怕是对数学知之不多的中小学生，也会被一个个精彩算例所显示的数学之美和数学之奇深深吸引. 书中涉及的数学知识似乎不多不深，所蕴含的哲理却足以使读者掩卷遐想. 例如，书中揭示出高等代数的对称、均衡与和谐，展现了古老学科的青春；书中提到

海峡两岸的数学爱好者发现了千百年来从无数学者、名人的眼皮底下滑过去的"自然数高次方的不变特性"，这些生动活泼的素材，兼有冰冷的思考与火热的激情，无论读者偏文偏理，均会有所收益.

沈文选教授长期从事中学数学研究、初等数学研究、奥林匹克数学研究和教育数学的研究. 他的《走进教育数学》和本丛书同名，是一本从学术理论角度探索教育数学的著作. 在书中他试图诠释"教育数学"的概念，探究"教育数学"的思想源头与内涵；提出"整合创新优化"、"返璞归真优化"等优化数学的方法和手段；并提供了丰富的案例. 笔者原来杜撰出"教育数学"的概念，虽然有些实例，但却凌乱无序，不成系统. 经过文选教授的旁征博引，诠释论证，居然有了粗具规模的体系框架，有点学科模样了. 这确是意外的收获.

本丛书中的《情真意切话数学》，是张奠宙教授和丁传松、柴俊两位先生合作完成的一本别有风味的谈数学与数学教育的力作. 作者跳出数学看数学，以全新的视角，阐述中学数学和微积分学中蕴涵的人文意境；将中国古诗词等文学艺术和数学思想加以连接，既有数学的科学内涵，又有丰富的人文素养，把数学与文艺沟通，帮助读者更好地理解和亲近数学. 在这里，老子道德经中"道生一，一生二，二生三，三生万物"被看成自然数公理的本意；"前不见古人，后不见来者，念天地之悠悠，独怆然而涕下"，解读为"四维时空"的遐想；"满园春色关不住，一枝红杏出墙来"用来描述无界数列的本性；而"孤帆远影碧空尽，惟见长江天际流"则成为极限过程的传神写照. 书中把数学之美分为美观、美好、美妙和完美 4 个层次，观点新颖精辟，论述丝丝入扣. 在课堂上讲数学如能够如此情深意切，何愁学生不爱数学？

浏览着这风格不同并且内容迥异的 11 本书，教育数学领域的现状历历在目. 这是一个开放求新的园地，一个蓬勃发展的领域. 在这里耕耘劳作的人们，想的是教育，做的是数学，为教育

而研究数学，通过丰富发展数学而推进教育.在这里大家都做自己想做的事，提出新定义新概念，建立新方法新体系，发掘新问题新技巧，寻求新思路新趣味，凡此种种，无不是为教育而做数学.

为教育而做数学，做出了些结果，出了这套书，这仅仅是开始.真正重要的是进入教材，进入课堂，产生实效，让千千万万学子受益，进而推动社会发展，造福人类.这才是作者们和出版者的大期望.切望海内外同道者和不同道者指正批评，相与切磋，共求真知，为数学教育的进步贡献力量.

张景中

2009 年 7 月

前　言

向量进入高中数学教材已经好几年了．在上海，初中已开始学习向量．关于向量法，近年数学教学期刊上的文章很多，讨论甚为热烈．

为体现向量方法的先进性和优越性，最有说服力的当然是举出用其解几何题的例子．各种教材里都有这样的例题和习题，期刊上发表的文章中有关向量解几何题的讨论更多．但仔细品味所见诸例的解法，却不免困惑：为何用向量解题往往比学生知道的其他方法更烦琐更笨拙？是否因为向量法过于高级，本不适合解初等几何问题？

正是这些例题及其解法，促使笔者对向量解题方法进行较深入的思考，并大胆将一得之见写成此书，以期抛砖引玉，为繁荣数学教学改革之讨论竭尽绵薄．

先看一个简单的例题．

【例 1】 如图 1，D 和 E 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 的中点，求证：$\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 共线，并将 $\overrightarrow{DE}$ 用 $\overrightarrow{BC}$ 线性表示．

某教材提供的证明：因为 D 和 E 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 的

中点，所以 $DE /\!/ BC$，即 $\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 共线．又 $DE=\frac{1}{2}BC$，且 $\overrightarrow{DE}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 同向，所以 $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

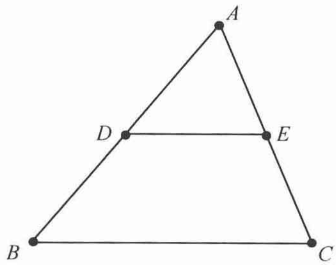

图 1

这种解法要求学生具备“三角形中位线定理”这一预备知识；更让人不解的是，向量在这里根本没起到任何作用，仅仅用来解释平面几何中已学过的知识，纯粹是“为向量而向量”．既然学生已经学习了向量的加法，就直接写出

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

岂不痛快？

考查此式，虽然仅仅一行，却包含了 4 个等式，有丰富的内容．其中第一个等式 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$ 用了向量相加的首尾衔接法，写出这样的等式不必看图，只看字母即可；第二个等式 $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ 用了题设的中点条件和数乘向量的几何意义；第三个等式 $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$ 用了数乘向量对向量加法的分配律；最后的等式 $\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ 又一次用到向量相加的首尾衔接法．几个等式串联，不仅回答了问题，而且简洁严谨地给出了三角形中位线定理的向量证法．