主编 杨勇 杜道渊 周锋

高等数学学习指导

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导 / 杨勇，杜道渊，周锋主编．—成都：西南交通大学出版社，2010.10
ISBN 978-7-5643-0926-8

Ⅰ．①高… Ⅱ．①杨…②杜…③周… Ⅲ．①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 198603 号

高等数学学习指导

主编 杨 勇 杜道渊 周 锋

责任编辑	张宝华
特邀编辑	孟秀芝
封面设计	何东琳设计工作室
出版发行	西南交通大学出版社 （成都二环路北一段 111 号）
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮编	610031
网址	http: //press.swjtu.edu.cn
印刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	170 mm × 230 mm
印张	18.875
字数	338 千字
版次	2010 年 10 月第 1 版
印次	2010 年 10 月第 1 次
书号	ISBN 978-7-5643-0926-8
定价	33.00 元

前　言

高等数学是一门针对理工科学生的非常重要的基础学科，随着当前授课时间的减少，学科后续专业课对高等数学的要求不断增强；学生考研人数逐年不断增多，对高等数学的要求也越来越高。为了更好地满足学生对所学内容的理解和掌握，培养学生综合运用知识解决问题的能力，更有利于考研学生对高等数学内容与能力的把握，为此编写了本书。

本书是根据“高等数学课程教学基本要求”与西南交通大学出版社出版的《高等数学》（第二版）教材配套编写的《高等数学学习指导》。

该书由西南交通大学出版社出版的《高等数学》（第二版）教材的主要编写者，根据自己多年的教学经验进行了编写，这对把握教材要求与促进学生学习有很大帮助。该书每章由学习目的与要求、解题方法、典型例题解析、同步练习题、教材习题答案及提示、考研试题精选六个部分组成，书后附录还提供了几套期末考试真题与答案。这些都有利于读者学习高等数学知识与拓展高等数学能力，是学生必备的辅导用书。

本书编写人员有：许文俊（第一章），周锋（第二章），岳健民（第三章），李永明（第四章），余成恩（第五章），杜道渊（第六章），谢巍（第七章），曾光菊（第八章），谭丽、张润石（第九章），杨勇（第十章），全书由杨勇、杜道渊、周锋负责统编。

由于编者水平有限且时间仓促，书中难免有疏漏与不足之处，敬请读者批评指正。

编　者

2010 年 8 月

目　录

第一章 函数、极限与连续

一、学习目的与要求

1. 理解函数、反函数和复合函数的概念.
2. 理解函数的有界性、单调性、周期性、奇偶性等性质.
3. 熟悉基本初等函数及其图形.
4. 理解数列极限与函数极限的概念.
5. 掌握极限的四则运算，了解极限的存在准则，会用重要极限求极限.
6. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较.
7. 理解函数连续的概念，会判断间断点的类型.
8. 理解初等函数的连续性，熟悉闭区间上连续函数的性质.

二、解题方法

1. 求极限：

（1）利用单调有界数列法；

（2）利用夹逼准则；

（3）利用重要极限；

（4）有理化分子或分母以消去不确定因子；

（5）利用等价无穷小替代法；

（6）利用数列极限与函数极限的关系；

（7）利用已知结果.

2. 判断函数的连续性及间断点的类型：

（1）利用连续的定义；

（2）初等函数在定义区间上连续；

（3）确定常数，使分段函数在分段点处连续；

（4）判断间断点的类型.

3. 利用零点存在定理判断根的存在性.

三、典型例题解析

例 1 对于数列$\{x_n\}$，若$x_{2k-1}\to a\,(k\to\infty)$，$x_{2k}\to a\,(k\to\infty)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证明 对$\forall\varepsilon>0$，由于

$$x_{2k-1}\to a\,(k\to\infty)$$

故$\exists N_1$，当$k>N_1$时，有

$$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$$

又由于

$$x_{2k}\to a\,(k\to\infty)$$

故$\exists N_2$，当$k>N_2$时，有

$$|x_{2k}-a|<\varepsilon$$

取$N=\max\{2N_1-1,2N_2\}$，当$n>N$时，有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

例 2 利用夹逼定理求极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

解 （1）因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$$

（2）因为

$$0\leqslant\frac{n!}{n^n}\leqslant\frac{1}{n}\quad 且\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

例 3 证明数列$\sqrt{a}$，$\sqrt{a+\sqrt{a}}$，$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$，…，（$a>0$）极限存在.

证明 记
$$x_1=\sqrt{a}\ ,\quad x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$$

由数学归纳法，可得x_n单调增加，即
$$x_{n+1}>x_n$$

又
$$\sqrt{a+x_n}>x_n>0\ ,\quad x_n^2-x_n-a<0$$

可得
$$0<x_n<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

即数列x_n单调有界，则数列x_n的极限存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a+x_{n-1}}$$

则
$$A=\sqrt{a+A}\Rightarrow A=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

即数列的极限存在.

例 4 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ （a，b为常数）.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}\dfrac{bx}{\sin bx}\dfrac{ax}{bx}=1\cdot\dfrac{a}{b}\cdot 1=\dfrac{a}{b}$

例 5 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}x\dfrac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}=x$

例 6 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{-\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{4x}\cdot(-4)}=\mathrm{e}^{-4}$

例 7 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x^2+1}\right)^{\left(-\frac{x^2+1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2x^2}{x^2+1}\right)}=e^{-2}$

注：例 5 ~ 例 7 是用重要极限求解，用重要极限时，一定要注意形式上的一致性.

例 8 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{x}=3$

注：当 $x\to0$ 时，$e^x-1\sim x$.

例 9 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^3}-1}{x+x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^3}-1}{x+x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}(x+x^3)}{x+x^3}=\dfrac{1}{2}$

注：当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$.

例 10 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}$.

解
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x(e^{\sin x-x}-1)}{\sin x-x}$$
$$=\lim_{x\to0}e^x\cdot\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x-x}-1}{\sin x-x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{\sin x-x}=1$$

注：（1）当 $x\to0$ 时，$e^x-1\sim x$.

（2）例 8 ~ 10 都是用等价无穷小求极限.

（3）常用的等价无穷小：

当 $x\to0$ 时，

$$x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1,$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2，\text{等}.$$

例 11 讨论当 $x\to0$ 时，$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 是 x 的几阶无穷小.

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^{\frac{1}{8}}}=1$$

所以当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 是 x 的 $\dfrac{1}{8}$ 阶无穷小.

例 12　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\cos x}{x-\sin x}$.

解　$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\cos x}{x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{\cos x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=2$$

注：本题不能用洛比达法则求解.

例 13　已知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax+b-4}{x-2}=4$，求 a，b.

解　当 $x\to 2$ 时，$x-2\to 0$，因为

$$\lim_{x\to 2}\frac{ax+b-4}{x-2}=4$$

可知　$$\lim_{x\to 2}(ax+b-4)=2a+b-4=0$$

即　$$b=4-2a$$

则　$$\lim_{x\to 2}\frac{ax+b-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{ax-2a}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{a(x-2)}{x-2}=a=4$$

所以　$$a=4,\quad b=-4$$

例 14　已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，试确定 a, b 的值.

解　$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x-1+\frac{2}{x+1}-ax-b\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[(1-a)x-(1+b)+\frac{2}{x+1}\right]=0$$

则　$$1-a=0,\quad 1+b=0$$

得　$$a=1,\quad b=-1$$

例 15　证明函数 $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时极限不存在.

分析　只要找两个子列分别收敛于不同的极限即可.

证明 取

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

当 $x_n \to 0$ 且 $x_n \neq 0$ 时，有

$$f(x_n) = 0$$

又取

$$y_n = \frac{1}{2n\pi}$$

当 $x_n \to 0$ 且 $x_n \neq 0$ 时，有

$$f(x_n) = 1$$

故可知，$f(x)$ 当 $x \to 0$ 时极限不存在.

例 16 证明：当 $a > 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

证明 （1）当 $a > 1$ 时，令

$$\sqrt[n]{a} = 1 + h_n \quad (h_n > 0)$$

则

$$a = (1 + h_n)^n = C_n^0 h_n^0 + C_n^1 h_n^1 + C_n^2 h_n^2 + \cdots + C_n^n h_n^n \geqslant nh_n$$

则

$$0 < h_n < \frac{a}{n}$$

由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

（2）当 $a = 1$ 时，显然成立.

（3）当 $0 < a < 1$ 时，令 $b = \frac{1}{a} > 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$.

因

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

综上所述，只要 $a > 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

注：同理可证 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

例 17　求极限 $\lim_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{3}}{x^2+x-2}$.

解

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{3}}{x^2+x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt{1-x}-\sqrt{3})(\sqrt{1-x}+\sqrt{3})}{(x^2+x-2)(\sqrt{1-x}+\sqrt{3})}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{-(x+2)}{(x+2)(x-1)(\sqrt{1-x}+\sqrt{3})}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{-1}{(x-1)(\sqrt{1-x}+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{-1}{[(-2)-1]\left\{\left[\sqrt{1-(-2)}\right]+\sqrt{3}\right\}}=\frac{1}{6\sqrt{3}}$$

例 18　求 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\alpha}-\sqrt{\alpha}}{x}\quad(\alpha>0)$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+\alpha}-\sqrt{\alpha}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\alpha}-\sqrt{\alpha})(\sqrt{x+\alpha}+\sqrt{\alpha})}{x(\sqrt{x+\alpha}+\sqrt{\alpha})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+\alpha-\alpha}{x(\sqrt{x+\alpha}+\sqrt{\alpha})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\alpha}+\sqrt{\alpha}}=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

例 19　求 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2})$.

解

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2})(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2})}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}=0$$

注：例 17～19 的特点是分子或分母有根式，出现分母为零或分子为无穷大的情况. 对于这类问题，通常用分子有理化、分母有理化或分子、分母同时有理化，消去分子、分母中的“零因子”或“无穷大因子”.

例 20　设 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{nx}}{1+e^{nx}}$，讨论 $f(x)$ 的连续性.

分析 这样的问题首先需要确定 $f(x)$，再讨论.

解 当 $x>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} e^{nx}=+\infty$；当 $x<0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} e^{nx}=0$.

则
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{nx}}{1+e^{nx}}=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$$

所以，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内除了 $x=0$ 点外处处连续，$x=0$ 是第一类间断点.

例 21 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}, & x\neq 0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$，确定常数 α 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

解 要使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，只须

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3=f(0)$$

所以当 $\alpha=3$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例 22 证明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必有界.

证明 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有

$$|f(x)-a|<\varepsilon$$

特别取 $\varepsilon=1$，则

$$a-1<f(x)<a+1$$

又 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[-X,X]$ 上必连续，设 $f(x)$ 在 $[-X,X]$ 上的最大值为 M，最小值为 m，则有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,\quad x\in[-X,X]$$

取
$$Q=\max\{|M|,|m|,|a+1|,|a-1|\}$$

则当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，

$$|f(x)|\leqslant Q$$

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有界.

例 23 设 $f(x)$，$g(x)$ 都在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)>g(a)$，$f(b)<g(b)$，

证明　存在 $\xi \in (a, b)$，使得 $f(\xi) = g(\xi)$.

分析　由结论 $f(\xi) = g(\xi)$，作辅助函数 $H(x) = f(x) - g(x)$.

证明　令

$$H(x) = f(x) - g(x)$$

则 $H(x) = f(x) - g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且

$$H(a) = f(a) - g(a) > 0,\quad H(b) = f(b) - g(b) < 0$$

由零点存在定理，$\exists \xi \in (a, b)$，使得 $H(\xi) = 0$，即 $\exists \xi \in (a, b)$，使得

$$f(\xi) = g(\xi)$$

例 24　设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $a < c < d < b$，证明：$\exists \xi \in (a, b)$，使得 $pf(c) + qf(d) = (p+q)f(\xi)$，其中 p, q 是任意正常数.

提示　令 $F(x) = pf(c) + qf(d) - (p+q)f(x)$，在 $[c, d]$ 上用零点存在定理.

注：对于闭区间上连续函数的命题，可以根据结论作辅助函数，再利用零点定理. 而作辅助函数的方法：首先把结论中的 ξ 换成 x，其次移项，使等式的右边为零，令左边式子为 $F(x)$，$F(x)$ 即为所求.

四、同步练习题

1. 求极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n+1}$；　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}$；

（3）$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$；　（4）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$；

（5）$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$；　（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)\left(3-\dfrac{1}{x^2}\right)$；

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$；　（8）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4n^3}$；

（9）$\lim\limits_{x\to0}x^3\sin\dfrac{2}{x}$；　（10）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 7x}$；

（11）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\tan x}$；　（12）$\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

2. 根据定义证明：

（1）$\dfrac{x^2-4}{x+2}$为当$x\to 2$时的无穷小；

（2）$y=x\sin\dfrac{1}{x}$为当$x\to 0$时的无穷小；

（3）$y=x^2\cos\dfrac{1}{x}$为当$x\to 0$时的无穷小.

3. 函数$y=x\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内是否有界？该函数是否为$x\to+\infty$时的无穷大？为什么？

4. 利用极限存在准则证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

5. 当$x\to 0$时，$2x-x^2$与x^2-x^3相比，哪一个是高阶无穷小？

6. 下列函数在指出的点处间断，说明这些间断点属于哪一类. 如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使其连续.

（1）$y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$，　$x=1$，　$x=2$；

（2）$y=\begin{cases} x-1, & x\leqslant 1 \\ 3-x, & x>1 \end{cases}$，　$x=1$.

7. 讨论函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$的连续性，若有间断点，判别其类型.

8. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ a+x^2, & x\leqslant 0 \end{cases}$$

要使$f(x)$在$(-\infty,\ +\infty)$上连续，应当怎样选择数a？

9. 证明方程$x=\sin x+b$（其中$a>0$，$b>0$）至少有一个正根且不超过$a+b$.

10. 若$f(x)$在$[a,\ b]$上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在$(x_1,\ x_n)$上至少有一点ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

11. 证明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

12. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且其值域也是 $[a, b]$，则在区间 $[a, b]$ 上存在一点 ξ，使 $f(\xi)=\xi$.

答案及提示

1.（1）$\frac{2}{3}$　（2）1　（3）-6　（4）2

（5）$\frac{2}{3}$　（6）6　（7）$\frac{1}{2}$　（8）$\frac{1}{4}$

（9）0　（10）$\frac{3}{7}$　（11）2　（12）e^{-2}

2.（1）$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x+2}=0$，故 $\frac{x^2-4}{x+2}$ 为当 $x\to 2$ 时的无穷小；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$，故 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 为当 $x\to 0$ 时的无穷小；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x}=0$，故 $y=x^2\cos\frac{1}{x}$ 为当 $x\to 0$ 时的无穷小.

3. 取 $x=2k\pi$，当 $k\to\infty$ 时，$y\to\infty$，可知 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界；

取 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，当 $k\to\infty$ 时，$y=0$，可知函数当 $x\to+\infty$ 时不是无穷大.

4.（1）$n\cdot\frac{n}{n^2+n\pi}\leqslant n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)\leqslant n\cdot\frac{n}{n^2+\pi}$

（2）$x\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)\leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant x\cdot\frac{1}{x}$

5. 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^3}{2x-x^2}=0$$

所以当 $x\to 0$ 时，$2x-x^2$ 是比 x^2-x^3 低阶的无穷小.

6.（1）$x=1$ 是可去间断点；$x=2$ 是无穷间断点.

（2）$x=1$ 是跳跃间断点.