计算机类硕士研究生入学考试

——高等数学考研辅导

清华大学出版社

计算机类
硕士研究生入学考试
——高等数学考研辅导

甘　泉　编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

这本书浓缩了作者二十年教学生涯中的高等数学解题的全部精华，在此书中，你可以学到许多有关高等数学解题的新颖独特又富于想象力的方法，并随着你对这些方法的了解和掌握，你的解题能力将会有一个巨大的提升，从此你将不再对数学感到畏难乃至于厌倦，相反，它将会让你感受到乐趣、喜悦和成功的自信。

如果你是一个考研的学生，那么“以不变的方法应万变的题型”应该是你迈向成功的不二法门。

如果你是一个年轻的数学教师，那么从这本书中你也可以学到许多有关高等数学教学的独到的处理方式。

人和书是要有缘分的，当你拿着这本书翻看时，相信它不会让你失望。

图书在版编目(CIP)数据

计算机类硕士研究生入学考试——高等数学考研辅导/甘泉编著. —北京：清华大学出版社，2011.5

ISBN 978-7-302-23964-2

Ⅰ. ①计…　Ⅱ. ①甘…　Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料
Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 202486 号

责任编辑：梁　颖　柴文强
责任校对：时翠兰
责任印制：王秀菊
出版发行：清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
社　总　机：010-62770175
投稿与读者服务：010-62795954,jsjjc@tup.tsinghua.edu.cn
质　量　反　馈：010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座
邮　　编：100084
邮　　购：010-62786544
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×260　**印　张**：17　**字　数**：404 千字
版　　次：2011 年 5 月第 1 版　**印　　次**：2011 年 5 月第1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：29.00 元

产品编号：037383-01

前言

本书是作者的心力之作，该书最大的特点在于强调并且注重高等数学解题的“思维方法”和“解题思路”，使读者在把握各种“解题心法”的前提下深入触及到解题方法与技巧的核心，达到事半功倍的学习功效。

对于准备赴考研究生的学生，由这本书所提供的方法将会使你的解题能力有一个迅速的和大幅度的提升。

对于年轻的数学教师，这本书也能够给你许多有益的启示。

本书共分 12 章，第 1 章讲解了求解数学题所常用的一些思维方法，以及所应遵循的思维指导原则；第 2 章详细讲解了有关极限的各个方面，特别对于“递归定义的数列”以及“不定型极限”等内容给出了一些独特的解题方法；第 3 章是导数与微分；第 4 章详细讲解了中值定理的各种应用，其中的一些内容是在别的书中难以看到的；第 5 章是函数单调性和不等式；第 6 章与第 7 章分别讲解不定积分和定积分，对“定积分的对称性与对称化”等内容以及它们在解题中所呈现出的重要性作了详细讲解；第 8 章是有关多元函数的内容；第 9 章讲解了二重积分和三重积分，特别强调了这两种积分的“对称性与对称化”的技巧和方法；第 10 章讲解了曲线积分与曲面积分，对于曲面积分（特别是第二型曲面积分）给出了一些只有这本书才提供的解题方法和解题公式；第 11 章和第 12 章则分别讲解了无穷级数和常微分方程。

全书给出了大量的例题，其中大部分例题提供了“解”或“证”，即单纯地给出了解题过程（中心是“题”），还有一部分例题只提供了“解题思路”，其目的是展示解题思路的脉络（中心是“法”，即“解题方法”），书中还有少量的例题仅仅提供了“提示”，即指出了思路的线索，要求读者自己解决问题。

本书每一章的后面均附有一些练习题，书后有提示和答案。

作者特别要感谢张素诚先生，在曾跟随张素诚先生学习数学三年的经历中，先生的教诲，以及先生严谨的治学作风，均无不使作者获益良多（每每感念于此，仍清晰如历于昨日）——谨将此书题献给张素诚先生。

欢迎读者提出对此书的看法和意见，更欢迎读者指出书中的纰漏与谬误，以携作者日后改进，甚谢!

与作者的联系方式为：GaoDengMath@126.com。

编著者

2011 年 2 月

目录

第 1 章　求解数学题常用的思维方法 …… 1

1.1　第一、二种思维方法 …… 1
1.2　第三、四种思维方法 …… 13
1.3　求解数学题的原则 …… 16

第 2 章　极限与连续 …… 31

2.1　有关极限的一些基本命题 …… 31
2.2　极限的基本性质 …… 32
2.3　极限存在性定理与存在准则 …… 35
2.4　函数不定型极限的求法 …… 43
2.5　渐近线 …… 56
2.6　函数的连续性 …… 58

第 3 章　导数与微分 …… 60

3.1　导数的基本性质 …… 60
3.2　函数的求导方法 …… 62
3.3　高阶导数 …… 65
3.4　函数微分的概念 …… 66
3.5　导数的应用例题 …… 68

第 4 章　中值定理 …… 73

4.1　Rolle中值定理 …… 73
4.2　带积分因子的原函数 …… 78
4.3　Lagrange中值定理 …… 85
4.4　Cauchy中值定理 …… 87
4.5　积分中值定理与广义积分中值定理 …… 93
4.6　Taylor公式 …… 99

第 5 章　函数的单调性与不等式 ······ 111

5.1　函数的单调性、极值与最值 ······ 111
5.2　函数不等式 ······ 115
5.3　常量的变量化 ······ 118
5.4　方程根的个数 ······ 121

第 6 章　不定积分 ······ 126

6.1　不定积分的计算 ······ 126
6.2　一些特殊函数的不定积分求解 ······ 130

第 7 章　定积分与广义积分 ······ 136

7.1　定积分的基本概念 ······ 136
7.2　定积分的计算 ······ 139
7.3　定积分的对称性与对称化 ······ 146
7.4　定积分不等式 ······ 153
7.5　广义积分 ······ 159

第 8 章　多元函数的极限与微分学 ······ 161

8.1　二元函数的极限 ······ 161
8.2　多元函数的偏导数 ······ 165
8.3　多元函数的全微分 ······ 167
8.4　方向导数与梯度 ······ 169
8.5　多元函数微分学在几何上的简单应用 ······ 171
8.6　多元函数的极值和最值 ······ 173

第 9 章　二重积分与三重积分 ······ 177

9.1　二重积分的基本性质 ······ 177
9.2　二重积分的计算 ······ 178
9.3　二重积分的对称性与对称化 ······ 181
9.4　二重积分的变量代换 ······ 186
9.5　三重积分的计算 ······ 189
9.6　三重积分的对称性和对称化 ······ 202

第 10 章　曲线积分与曲面积分 ······ 206

10.1　曲线积分 ······ 206
10.2　曲线积分的计算 ······ 208
10.3　Green公式的应用 ······ 215

10.4 曲面积分的一些基本概念 ········ 219
10.5 曲面积分的计算 ········ 222
10.6 曲面积分例题 ········ 228

第 11 章 无穷级数 ········ 235

11.1 基本概念 ········ 235
11.2 无穷级数收敛性的判别 ········ 237
11.3 幂级数 ········ 244

第 12 章 常微分方程 ········ 251

12.1 一阶微分方程 ········ 251
12.2 可降阶的方程 ········ 255
12.3 二阶常系数线性方程 ········ 256
12.4 函数方程 ········ 257

附录 各章练习题的提示与答案 ········ 261

第 1 章
求解数学题常用的思维方法

当你遇到一道比较困难的数学题，特别是证明题时，如果你不知道该从何处入手，那么下面将要讲述的一些思维方法或许能够帮助你克服困难并赢得你所面临的挑战；这些思维方法也可以说是求解数学题的思维指导原则，它们不仅对我们解数学题有效，实际上数学家们在解决各种各样复杂的数学难题的过程中也经常地并纯熟地使用它们。

1.1 第一、二种思维方法

> **第一种思维方法是：**
>
> **先考虑原问题的某种特殊情形，并加以证明，然后再返过来证明原问题本身。**

例如设想我要证明“三角形三内角之和是 180°”这样一道题，而我却始终找不到一个证明的切入点，这时候我就可以试着考虑先证明该问题的某种特殊情形，例如我可以考虑是否能证明这样的问题：“**直角**三角形三内角之和是 180°”。假如我很幸运地证明了这个问题，这当然很不错，但是读者可能会问：“你虽然证明了这个问题的特殊情形，但原问题本身却仍没有得证。”的确如此，不过我对该问题的思考并没有结束，那么下一步我将做什么呢？这时候有三个途径可供我进一步思考。首先是对已证明了的特殊问题的证明过程进行仔细分析，考查在这一证明过程中其“直角三角形”这个条件是否是至为关键的，换句话说，是否缺少了这一条件要素，其证明过程的某些步骤就不能通过；如果不是这样，那么很显然，只要我对证明过程稍加修改，去除掉“直角三角形”这个不必要的条件要求，实际上我就已经完成了对原问题的求证。但如果证明过程确实依赖于“直角三角形”，那么我会接着考虑：虽然我在证明过程中必须借助于“直角三角形”这个条件，但我是否能从证明思路中获得启发和借鉴，从而提炼出一个针对“一般三角形”的问题的解题思路？如果这一努力获得成功，那么原问题也就得到了论证。但如果这一点也没能做到怎么办？这时候我还有最后一个思考途径：我会考虑以“直角三角形三内角之和是 180°”这个已证的命题作为一个新的前题和出发

点，并试图利用它来对原问题进行求证，例如我也许想到了引一条辅助线将（任意）三角形划分成两个直角三角形，由于“直角三角形三内角之和是 180°”是已经被证明了的，因此利用这个命题，并经过细致的分析，我也许最终就能够完成对原问题的论证。

显然，从“直角三角形”这一特殊情形的成功论证出发，进而证明“任意三角形”的原问题，需要建立某种“过渡”（上面提到的引辅助线将一般三角形划分成两个直角三角形就是这样的过渡），而这种过渡正是最终完成对原问题的证明的关键。当然我仍有可能找不到这种“由特殊情形返回到原问题的过渡”，如果是这样，那么至此必须承认，我对原问题证明的努力最终归于失败，但即便如此，至少我还是证明了原问题的一部分（即至少证明了“直角三角形三内角之和是 180°”的结论），这样即使是从考试（例如考研）的角度讲，也多少能获得该题的一些分数（这应该是可以肯定的）。

下面再以一道高等数学例题来讲解这一思维方法。

例 1.1 设 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 连续，于 (a,b) 二阶可导，且 $f''(x)>0$，证明

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-c}\int_c^x f(u)\mathrm{d}u > f(c)(b-a)$$

其中 $c=\dfrac{a+b}{2}$。

由 $f''(x)>0$ 可知 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凹函数，但仅从这一点考虑我们还是不能够找到一个证明的有效途径，因此我们便试着从一个特殊情形入手：设函数曲线在 $x=c$ 点处与 x 轴相切，即 $f(c)=f'(c)=0$，这样就有 $f(x)$ 于 $[a,c]$ 单调减，而于 $[c,b]$ 单调增（注意这里讨论的几何背景），并且原不等式在这一特殊情形下转化为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-c}\int_c^x f(u)\,\mathrm{d}u > 0$$

设 $x\in[a,b]$ 且 $x\neq c$，利用积分中值定理（参见第 4 章 4.5 节）有

$$\frac{1}{x-c}\int_c^x f(u)\,\mathrm{d}u = f(\xi), \qquad x<\xi<c \quad 或 \quad c<\xi<x$$

由于 $f(x)$ 于 $[a,c]$ 单调减，及于 $[c,b]$ 单调增，因此当 $x\neq c$ 时即有

$$f(x)>f(\xi)>f(c)=0$$

或

$$f(x) > \frac{1}{x-c}\int_c^x f(u)\,\mathrm{d}u > 0$$

积分后即得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-c}\int_c^x f(u)\,\mathrm{d}u > 0$$

由于 $x=c$ 是函数 $\dfrac{1}{x-c}\displaystyle\int_c^x f(u)\,\mathrm{d}u$ 的可去间断点，因此对它进行积分的可积性没有问题，这样就证明了在特殊情形下不等式的正确性。

原问题的这一特殊情形很容易得到了证明，但原问题本身（即原不等式）又如何证明呢？如前所述，建立一个由特殊情形到原问题的有效过渡是证明原问题的关键所在。我们现构造

一个辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-\left[f(c)+f'(c)(x-c)\right]$$

它就是 $f(x)$ 在 $x=c$ 处的一阶 Taylor 展开的余项，说得更明确一点，

$$L(x)=f(c)+f'(c)(x-c)$$

是 $f(x)$ 在 $x=c$ 处的切线。显然 $\varphi''(x)=f''(x)>0$，从而 $\varphi(x)$ 为凹函数，另一方面显然有 $\varphi(c)=\varphi'(c)=0$，因此由上面已证明过的结论，有

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x>\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-c}\int_c^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u>0$$

但

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x&=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-f(c)(b-a)-f'(c)\int_a^b (x-c)\,\mathrm{d}x\\&=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-f(c)(b-a)\end{aligned}$$

$\left[注意\quad \int_a^b (x-c)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=0\right]$，及

$$\begin{aligned}\int_c^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u&=\int_c^x f(u)\,\mathrm{d}u-f(c)(x-c)-f'(c)\int_c^x (u-c)\,\mathrm{d}u\\&=\int_c^x f(u)\,\mathrm{d}u-f(c)(x-c)-\frac{1}{2}f'(c)(x-c)^2\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-c}\int_c^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u&=\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-c}\left[\int_c^x f(u)\,\mathrm{d}u-f(c)(x-c)-\frac{1}{2}f'(c)(x-c)^2\right]\\&=\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-c}\int_c^x f(u)\,\mathrm{d}u-f(c)(b-a)\end{aligned}$$

从而

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-f(c)(b-a)>\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-c}\int_c^x f(u)\,\mathrm{d}u-f(c)(b-a)>0$$

或

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-c}\int_c^x f(u)\,\mathrm{d}u>f(c)(b-a)$$

这样原问题就得到了彻底证明。

现在对这一思维方法作一个总结：

如果面对一道证明题而不知道该从何处入手，这时候就可以试着先就原问题的某个特殊情形（当然也应是较为简单的情形）进行证明，然后再寻找这一特殊情形到原问题的一个有效过渡，从而使原问题得到完全论证。

下面再给出一个经典的例题，从中可以清楚地看到其

原问题 $\longrightarrow$ 转为特殊问题 $\longrightarrow$ 再过渡到原问题

的这一思维过程是如何进行的。

例 1.2 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均 $>0\quad(n\geqslant 2)$，证明

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

先证明 $n=2$ 时成立，即

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1a_2}$$

（评注：这是 $n=2$ 时的特殊情形）。两端平方后化为等价不等式：

$$\frac{(a_1+a_2)^2}{4} \geqslant a_1a_2\,, \qquad \text{或} \qquad a_1^2+2a_1a_2+a_2^2 \geqslant 4a_1a_2$$

或 $$a_1^2-2a_1a_2+a_2^2 \geqslant 0\,, \qquad (a_1-a_2)^2 \geqslant 0$$

但最后的不等式是显然的，从而证明了 $n=2$ 时不等式的正确性。现在再证明当

$$n=4\,,\ 8\,,\ 16\,,\ \cdots$$

时不等式成立（评注：注意下面的证明是如何由 $n=2$ 过渡的）。由于

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} &= \frac{(a_1+a_2)/2+(a_3+a_4)/2}{2}\\ &\geqslant \frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}} = \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\end{aligned}$$

从而证明了 $n=4$ 成立；同理可证 $n=8\,,16\,,\cdots$ 的正确性，例如

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_8}{8} &= \frac{(a_1+\cdots+a_4)/4+(a_5+\cdots+a_8)/4}{2} \geqslant \frac{\sqrt[4]{a_1\cdots a_4}+\sqrt[4]{a_5\cdots a_8}}{2}\\ &\geqslant \sqrt{\sqrt[4]{a_1\cdots a_4}\,\sqrt[4]{a_5\cdots a_8}} = \sqrt[8]{a_1a_2\cdots a_8}\end{aligned}$$

等。现在再来证明当 n 为任意自然数时不等式成立（评注：这一次要由 $n=2\,,4\,,8\cdots$ 过渡到 n 为任意自然数时的情形，即原问题本身）。

设 $2^m>n$，并设

$$c=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

因此有 $$c=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+(2^m-n)\cdot c}{2^m} \geqslant (a_1a_2\cdots a_n\cdot c^{2^m-n})^{\frac{1}{2^m}}$$

或 $$c^{2^m} \geqslant a_1a_2\cdots a_n\cdot c^{2^m-n}\,, \qquad c^n \geqslant a_1a_2\cdots a_n\,, \qquad \text{或} \qquad c \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

即 $$\frac{a_1+a_2\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

从而完成了证明。

注 这个十分优美的证明是由数学家 Cauchy 给出的。

下面的一道例题由读者自己试着用这一思维方法完成其证明。

例 1.3 设 $f(x)$ 于 $(a\,,b)$ 二阶可导且 $f''(x)>0$，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，及 $c_1\,,c_2\,,\cdots\,,c_n$ 均 >0，证明

$$f\left(\frac{c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n}{c_1+c_2+\cdots+c_n}\right) < \frac{c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}$$

（Jensen 不等式）。

提示 设 $c=\dfrac{c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n}{c_1+c_2+\cdots+c_n}$。

注 如果在 x 轴上 $x=x_i$ 的位置放置一个质量为 $c_i\ (>0)$ 的质点 $(i=1,\cdots,n)$，则 c 即是由这些质点组成的质点系的质心坐标，因此它当然应介于最左边与最右边的质点之间，换言之，应有 $x_1<c<x_n$（当然也可以直接通过证明得到这一结论）。

以上讲解了两道应用“第一种思维方法”的典型例题，这些例题都或多或少有一些复杂性，但读者若因此认为该思维方法的使用也很复杂那就错了，实际上这种思维方法还可以非常简单，简单到我们可以随处加以运用的地步，甚至于不用考虑前面所谓的“过渡”这件事（这在前面虚构的证明“三角形三内角之和”的问题中已作过讲解）。更明确地说，有时候一道题表面看起来很复杂而不知道该怎样入手，这时候如考虑问题的某种特殊情形，由于特殊情形的相对简单性，我们很容易就将它解出；但解出后我们很快发现，其解法（即解题思路）实际上完全适用于原问题本身，因此在这里解决特殊问题的全部意义就在于它给我们提供了一个解决原问题的提示和思路线索，而不是过渡的起点。

现在再来考查一道例题。

设 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，证明存在 $\xi\in[x_1,x_n]$ 使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

下面是一个教师和一个学生在探讨该题解法时所进行的一场“苏格拉底式”的对话（设 T = 教师，S = 学生）。

T：这道题你理解了没有？

S：理解了。

T：其中的 n 等于几？

S：不知道。

T：我们是不是可以这样理解：由于没有给定 n 等于几，因此它可以是任何一个自然数？

S：是。

T：好，这道题看起来的确有些复杂，因此你不知道该怎样入手，对不对？

S：对。

T：既然这样，那么你能不能试着先就一个简单情形进行考虑，比如说 $n=2$ 时的情形？（特殊情形）；当然我们也可以考虑 $n=1$ 的情形，但这个情形的论证太简单了，不会对我们有任何启发。这样吧，你先把该题当 $n=2$ 时的情形写在纸上。

S：写出来是：存在 ξ 使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$。

T：这就是说，若 $a<x_1<x_2<b$，要证明存在 $\xi\in[x_1,x_2]$ 使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，是这样吗？

S：是的。

T：好，你对这个问题能给出证明吗？

S：（思考了一段时间后）不会。

T：现在让我们换一个思考的角度，设 $C=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，这样即是要证明 $f(\xi)=C$，对不对？

S：对。

T：如果再换一个思考的角度，即要证明方程 $f(x)=C$ 在 $[x_1,x_2]$ 内有一个根 ξ ，是不是?

S：是的。

T：很好，现在让我们来分析一下，在我们学过的知识当中，有哪些内容最有可能支持我们作出 $f(x)=C$ 有根的断言呢?

S：(想了一会) 好像要用连续函数介值定理。

T：非常好，现在你能不能叙述一下介值定理?

S：能 (找到高等数学教材中的相关内容，并叙述了一遍)。

T：我们能不能这样理解连续函数介值定理：假定 $f(x)$ 连续，要证明方程 $f(x)=C$ 根的存在性，只要能找到一点 p 使 $f(p)<C$ ，并找到另一点 q 使 $f(q)>C$ ，即只要 $f(p)<C<f(q)$ ，这样就一定有一点 ξ 介于 p 与 q 之间使 $f(\xi)=C$ ，因此 $x=\xi$ 就是一个根，是不是这样?

S：是的。

T：连续函数介值定理的几何意义你能理解吗?

S：能理解。

T：非常好。现在让我们回过来再思考一下 $n=2$ 时的那个问题。

S：(想了一段时间后) 我似乎有了一些想法，但我不知道 $f(x_1)$, $f(x_2)$ 和 $C=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 三个数之间的大小关系。

T：不要紧，让我们再考虑一个特殊情形：如果 $f(x_1)<f(x_2)$ 那会怎样?

S：哦，我明白了，如果 $f(x_1)<f(x_2)$ ，那么就一定有 $f(x_1)<C<f(x_2)$ ，因为 $C=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 是 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的算术平均值。但我不知道为什么会有 $f(x_1)<f(x_2)$?

T：在 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 两个数之间， $f(x_1)<f(x_2)$ 是一个特殊情形，也就是说，它只是真理的一部分，而从逻辑上讲，全部的可能性应该是 $f(x_1)<f(x_2)$ ，或 $f(x_1)>f(x_2)$ ，或者 $f(x_1)=f(x_2)$ 。

S：老师，我明白了，当 $f(x_1)<f(x_2)$ 时，有 $f(x_1)<C<f(x_2)$ ；当 $f(x_1)>f(x_2)$ 时，有 $f(x_1)>C>f(x_2)$ ；而当 $f(x_1)=f(x_2)$ 时，有 $f(x_1)=C=f(x_2)$ 。对于前两种情况，必存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使 $f(\xi)=C$ ，但对于最后一种情况……?

T：好极了，前两种情况你回答得非常好，而对于最后一种情况，即 $C=f(x_1)=f(x_2)$ 时，问题则更简单：只要令 $\xi=x_1$ 或 $\xi=x_2$ ，当然就有 $f(\xi)=C$ ，而此时 $\xi\in[x_1,x_2]$ 。现在你是不是也理解了为什么 ξ 应该在闭区间 $[x_1,x_2]$ 内而不是开区间 (x_1,x_2) ?

S：我理解了，如果 $f(x_1)=f(x_2)$ ，则有 $C=f(x_1)=f(x_2)$ ，在这种情况下，可能只有当 $\xi=x_1$ 或 $\xi=x_2$ 时 $f(\xi)=C$ 才成立。

T：很好。现在你能不能用刚讨论过的解题思路来分析一下当 n 为任意自然数时的情形?(原问题)。

S：好像可以，那就是 $C=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$ 也应该在最小和最大的数之间，因为它也是一个算术平均值，但我不知道 $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\cdots$, $f(x_n)$ 中哪个是最小的哪个又

是最大的。

T：你可以设 $f(x_i)$ 最小，$f(x_j)$ 最大。

S：哦，老师，我终于会做这道题了，只要设

$$f(x_i)=\min\left\{f(x_1)\,,\,f(x_2)\,,\,\cdots\,,\,f(x_n)\right\}$$

及

$$f(x_j)=\max\left\{f(x_1)\,,\,f(x_2)\,,\,\cdots\,,\,f(x_n)\right\}$$

则一定有

$$f(x_i)<C<f(x_j)$$

或

$$f(x_i)=C=f(x_j)$$

如果 $f(x_i)<C<f(x_j)$ ，那么必有 ξ 介于 x_i 与 x_j 之间，使 $f(\xi)=C$ ；而如果 $f(x_i)=C=f(x_j)$，那么就有 $C=f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)$ ，因此当 $n>2$ 时，只要取 $\xi=x_2$ ，则 $\xi\in(x_1\,,\,x_n)$ ，并且 $f(\xi)=C$ ；而当 $n=2$ 时，则必须 $\xi\in[x_1\,,\,x_2]$ ，即不排除 $\xi=x_1$ 或 $\xi=x_2$ 的可能性，使 $f(\xi)=C$ 。

T：好极了！你不仅做完了这道题，你甚至还把这道题做到了极致。最后还有一点，原题假设 $f(x)$ 于闭区间 $[a\,,\,b]$ 连续，这个假设是不是有些多余的部分，也就是说，实际上只要 $f(x)$ 于开区间 $(a\,,\,b)$ 连续，则这道题的结论仍然成立？

S：是的，因为只要保证 $f(x)$ 于 $[x_1\,,\,x_n]$ 连续就可以。老师，这道题我已经完全弄懂了，而且我不仅学会了做这道题，我还学会了一种思考问题的方式，谢谢老师！

T：不用谢，希望你把这种思考方式好好作一个总结，最后希望你不断取得进步。

S：谢谢！

第二种思维方法是：

考虑原问题的某种更为一般的形式，并加以证明，从而使原问题自然得到论证。

显然这一思维方法与第一种思维方法正好相反。说到这里，读者可能会产生疑虑：原问题本身就足够复杂，再考虑其更一般的问题形式不是更加困难吗？这个疑虑不是没有道理，但有时候原问题细节中的一些关键因素与非关键因素混合在一起，使我们难以抓住问题的实质和关键所在，从而干扰我们产生明确和清晰的解题思路；而对原问题以更一般的形式进行考查，正是起到了将关键因素突显出来而将非关键因素滤除掉的作用（这里所谓的“关键因素”，是指对问题结论的成立起到某种关键作用，或者具有某种关键含义的因素）。

例如设想我要“证明”人保持体温恒定的生理机制问题，那么可供我考虑的细节因素很多，包括人的体表没有毛发，人的皮下具有脂肪，甚至于还包括人是社会性动物，人有语言，人有思想，等等，那么哪些是我论证所需的关键因素而哪些又不是呢？这时候我如果尝试着考虑更为一般的问题，例如考虑哺乳动物保持体温恒定的生理机制问题，显然这样做就把问题的关键性因素浓缩到了一个更小的范围之内，从而有助于思索与推证（这使我们朝着对问题本质的揭示迈出了有意义的一步）。

下面再以一些数学例题对这一思维方法作详细讲解。

例 1.4 设 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 连续，$f(x)>0$ ，且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=1$ ，证明

$$\left[\int_a^b f(x)\cos\omega x\,\mathrm{d}x\right]^2+\left[\int_a^b f(x)\sin\omega x\,\mathrm{d}x\right]^2<1 \qquad (\omega\neq 0 \text{ 为常数})$$

条件 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=1$ 对于不等式意味着什么？——如何才能够有效地利用它？不等式右端的 1 与该条件是否有什么关系？如果有关系，这个关系又是什么？这些疑问（以及种种可能性）使我们很难清理出一个明确的解题思路。现在让我们设想，如果 $\omega=0$ ，那么不等式左端即转化为

$$\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$$

因此我们猜测不等式右端的 1 可能不是别的而正是 $\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$ （它们都是 1 ），有了这些考虑，现在就让我们试着证明这样的不等式：

$$\left[\int_a^b f(x)\cos\omega x\,\mathrm{d}x\right]^2+\left[\int_a^b f(x)\sin\omega x\,\mathrm{d}x\right]^2<\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$$

而并不要求 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=1$（因此困扰我们“如何利用这一条件”的问题便迎刃而解）。显然这一不等式是原不等式的更一般的形式，并且下面将可以看到，这种一般形式反倒使解题思路变得清晰自然。

由于
$$\begin{aligned}\left[\int_a^b f(x)\cos\omega x\,\mathrm{d}x\right]^2&=\int_a^b f(x)\cos\omega x\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(y)\cos\omega y\,\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_D f(x)f(y)\cos\omega x\cos\omega y\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

D 为平面区域：$a\leqslant x\leqslant b$，$a\leqslant y\leqslant b$ ；同理有

$$\left[\int_a^b f(x)\sin\omega x\,\mathrm{d}x\right]^2=\iint\limits_D f(x)f(y)\sin\omega x\sin\omega y\,\mathrm{d}\sigma$$

以及
$$\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2=\iint\limits_D f(x)f(y)\,\mathrm{d}\sigma$$

因此不等式转化为等价形式

$$\iint\limits_D f(x)f(y)\cos\omega x\cos\omega y\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D f(x)f(y)\sin\omega x\sin\omega y\,\mathrm{d}\sigma<\iint\limits_D f(x)f(y)\,\mathrm{d}\sigma$$

或
$$\iint\limits_D f(x)f(y)(\cos\omega x\cos\omega y+\sin\omega x\sin\omega y)\,\mathrm{d}\sigma<\iint\limits_D f(x)f(y)\,\mathrm{d}\sigma$$

或
$$\iint\limits_D f(x)f(y)\cos\omega(x-y)\,\mathrm{d}\sigma<\iint\limits_D f(x)f(y)\,\mathrm{d}\sigma$$

或
$$\iint\limits_D f(x)f(y)\left[1-\cos\omega(x-y)\right]\mathrm{d}\sigma>0$$
但由于 $f(x)>0$ ，以及 $1-\cos\omega(x-y)\geqslant 0$ ，并且至少存在一点 $(x,y)\in D$ 使
$$1-\cos\omega(x-y)>0$$
再由于函数的连续性，因此证得最后的不等式成立，从而原问题得证。

注 原不等式也可通过积分形式的 Cauchy 不等式直接求证，但要证明其严格不等式成立恐怕多少会有些繁琐；另一方面，即使将条件 $f(x)>0$ 改为 $f(x)\geqslant 0$ ，$x\in[a,b]$，其结论的严格不等式也仍然成立，只要对上面的证明过程稍微增加一些细致的分析就能够看到这一点。还必须指出的是，由于“一般形式”是通过猜测得到的，因此在完成证明之前，其正确与否是不得而知的，换言之，我们将一些因素作为其关键因素［在这里就是条件 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=1$ 在原不等式中的含义］的判断的正确性（在完成证明之前）不得而知。

例 1.5 设 $f(x)$ 于 $[0,+\infty)$ 连续，且 $f(x)>0$ ，证明函数
$$\varphi(x)=\frac{\displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$$
于 $(0,+\infty)$ 单调增。

这道题的证明并不困难，因此将其作为解释正在讲述的思维方法的例题可能不是十分合适，但我们不妨仍然坚持考虑该问题的某种更为一般的形式，并通过对这种一般形式的证明从而使原问题得证。虽然就该题本身的求证而言，这种做法显得多余而不明智，但这样做的结果却给我们带来一个意外的发现。

仔细考查这道题的结论以及条件后，我们猜测分子上的积分 $\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ 其被积式中的因子 t （它是单调增的）可能是 $\varphi(x)$ 单调增的关键因素之一，因此我们可以考虑证明
$$\varphi(x)=\frac{\displaystyle\int_0^x h(t)f(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$$
单调增，只要 $h(t)$ 单调增；我们还可以尝试着再向前走一步并分析：分子分母上的积分形式（即变上限积分——它们是上限的函数）对问题而言果真是关键的吗? 这一点很让人怀疑，为此我们便试着考虑更为一般的函数形式
$$\varphi(x)=\frac{F(x)}{G(x)}$$
并且假定 $F(x)$ 与 $G(x)$ 于 $[0,+\infty)$ 连续，$(0,+\infty)$ 可导，以及

$F(0)=G(0)=0$ （原题分子分母上的积分就是如此），

再假定 $G'(x)>0,\quad x\in(0,+\infty)$ （原题分母上的积分其导数为 $f(x)>0$ ），

最后假定 $\dfrac{F'(x)}{G'(x)}$ 于 $(0,+\infty)$ 单调增 （原题也正是如此）。

作了以上所有的假设之后，现在我们就试着证明 $\varphi(x)=\dfrac{F(x)}{G(x)}$ 于 $(0,+\infty)$ 单调增，显然这也是原问题的更一般的形式。

因为
$$\varphi'(x)=\frac{F'(x)G(x)-F(x)G'(x)}{G^2(x)}=\frac{G(x)G'(x)}{G^2(x)}\left[\frac{F'(x)}{G'(x)}-\frac{F(x)}{G(x)}\right]=\frac{G'(x)}{G(x)}\left[\frac{F'(x)}{G'(x)}-\frac{F(x)}{G(x)}\right]$$

又由于 $G'(x)>0$，所以 $G(x)$ 单调增，从而有 $G(x)>G(0)=0$，$x\in(0,+\infty)$，因此 $\varphi'(x)$ 的正负性 (>0 或 <0) 实际上由
$$\frac{F'(x)}{G'(x)}-\frac{F(x)}{G(x)}$$
的正负性决定。由于 $F(0)=G(0)=0$，所以由 Cauchy 中值定理，有
$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(0)}{G(x)-G(0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}\,,\qquad 0<\xi<x$$
从而
$$\frac{F'(x)}{G'(x)}-\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F'(x)}{G'(x)}-\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}\,,\qquad 0<\xi<x$$
但由于 $\dfrac{F'(x)}{G'(x)}$ 单调增，从而上式必大于 0，因此 $\varphi'(x)>0$，这样就证得 $\varphi(x)$ 单调增。既然更一般的问题被证明成立，从而原问题成立。

以上的证明清晰而优美，并且由于该问题形式的一般性，它不仅证明了原问题本身，甚至它还可以有更广泛的应用，例如设
$$F(x)=x\,,\qquad G(x)=\sin x$$
由于这两个函数也［至少在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内］满足我们所有的条件假设，特别是“导数比”
$$\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{1}{\cos x}$$
于 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调增，因此原“函数比”
$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{x}{\sin x}$$
也于 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调增[注]，又由于
$$\lim_{x\to+0}\frac{x}{\sin x}=1\,,\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{x}{\sin x}=\frac{\pi}{2}$$
从而有
$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{\pi}{2}\,,\qquad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

[注]：如果把这里的结论与 L'Hospitale 法则作一个对比，就能够看到它们之间有趣的相似性，由于这一结论在“函数比”单调性判别的重要性，作者建议将其称之为“函数比单调性判别法”，更详细的叙述及例题参见第 4 章 4.4 节。