工科数学分析

Gongke Shuxue Fenxi

下册

主　编　彭　放　刘安平

副主编　刘小雅　李　星　吴振远　刘鲁文

中国地质大学出版社

ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

工科数学分析

GONGKE SHUXUE FENXI

（下册）

主　编：彭　放　刘安平

副主编：刘小雅　李　星

吴振远　刘鲁文

中国地质大学出版社

ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析(下册)/彭放、刘安平主编,刘小雅、李星、吴振远、刘鲁文副主编.
—武汉:中国地质大学出版社,2010.10
ISBN 978-7-5625-2549-3

Ⅰ.①工…
Ⅱ.①彭…②刘…③刘…④李…⑤吴…⑥刘…
Ⅲ.①数学分析-高等学校-教材
Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 215674 号

工科数学分析(下册)

彭　放　刘安平　主　编
刘小雅　李　星　吴振远　刘鲁文　副主编

责任编辑:段连秀　策划编辑:毕克成　责任校对:张咏梅

出版发行:中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路 388 号)　邮政编码:430074
电　话:(027)67883511　传真:67883580　E-mail:cbb @ cug. edu. cn
经　销:全国新华书店　http://www. cugp. cn

开本:787 毫米×960 毫米 1/16　字数:430 千字　印张:22.25
版次:2010 年 12 月第 1 版　印次:2010 年 12 月第 1 次印刷
印刷:武汉市教文印刷厂　印数:1—3 000 册

ISBN 978-7-5625-2549-3　定价:38.00 元

前　言

随着信息科学与计算技术的发展,数学课程在理论和应用两方面的重要性越来越突出,同时使得一些专业对数学基础课程在内容的深度和广度上都提出了更高的要求.目前出版的《数学分析》教材,大多数是为数学类本科专业编写的.而信息科学、计算机科学与技术、通信工程、系统工程、软件工程、地理信息系统、地质工程等有关本科专业,它们对于数学分析的内容和方法的要求及教学时数都不同于数学类本科专业.因此,本书是为这些专业的数学基础课程编写的.

本书是以教育部工科数学课程指导委员会颁布的高等工科院校本科《高等数学课程教学基本要求》为纲,在多年开设工科数学分析课程的基础上,广泛吸取国内外知名大学的教学经验而编写的《工科数学分析》课程教材.它是一门重要的基础理论必修课,不仅包含了一般理工科"高等数学"的全部内容,而且加强和拓宽了微积分的理论基础,注重无穷小分析思想的应用,在数学逻辑性、严谨性及抽象性方面也有一定的要求和训练.

本书可作为理工科院校对数学要求较高的非数学类专业本科生教材,但如果略去理论性较强的部分和带*号的内容,其他专业也可以使用.

编写本书的宗旨是:①通过这门课的学习,使学生系统地获得一元与多元微积分及其应用、向量代数与空间解析几何、无穷级数与常微分方程等方面的基本概念、基本理论、基本方法和运算技能,为学习后续课程和知识的自我更新奠定必要的数学基础;②在传授知识的同时,培养学生比较熟练的运算能力、抽象思维和形象思维能力、逻辑推理能力、自主学习能力以及一定的数学建模能力,正确领会一些重要的数学思想方法,使学生受到用数学分析的基本概念、理论、方法解决几何、物理及其他实际问题的初步训练,以提高抽象概括问题的能力和应用数学知识分析解决实际问题的能力.

本书在体现教材内容的深度和广度方面有一定拓宽、加强,在课程体系方面有一些改革与创新,在内容详略和增减、编写次序等方面有所变动与革新,特说明如下:

1.本教材的课堂教学时数(包括习题课)为170～210学时.以篇、章、节为单位编写,全书上、下册共分三篇十五章.带*号的内容为选学内容,教师可根据专业需要和教学时数选择讲授内容或者安排学生自学.

2.本教材拓宽和加强了数学基础.在实数完备性基础上讲解极限理论,增加了

关于实数基本理论、一致连续、一致收敛、函数可积性、矢量分析和含参变量积分的内容，以加强对学生的逻辑思维训练.

3. 在结构上进行了精心编排和重组. 本书内容按照向量代数与空间解析几何、一元函数微积分学、级数理论、多元函数微积分学、常微分方程的顺序进行编写.

4. 由于本教材不仅包含了一般"高等数学"的全部内容，而且拓宽和加强了数学基础，因此篇幅会有所扩大，编写者采用了集中表达、有所偏重(主要篇幅用于典型情况，类似情况简单交待)、简化(如排除完全类似的证明)等手段尽量做到精炼.

5. 本教材在加强高等数学内容中一些重要的数学思想方法和实际应用方面做了一些尝试. 对现行教材中的例题和习题作了较大变更和调整，加深、扩大了应用实例和习题的范围. 通过典型例题的介绍突出数学思想方法的讲解；配以相应习题，加强应用数学能力的训练，培养学生运用高等数学的思想方法和思维方式解决实际问题能力.

6. 关于习题的配置：本教材每节及每章后均配有一定数量的习题，任课教师可从中酌情选择布置学生练习. 所配习题力争做到反映各节内容的基本要求，并在一般高等数学的基础上有所加深.

每节的习题分为A、B两类：A类为基本练习，其中第一题一般为思考题或讨论题，用于巩固基础知识和基本技能；B类为加深和拓宽练习，用于扩大视野和熟练技巧.

每章配总习题，这部分习题综合性较强，既反映基本内容又有一定难度，增加一些考研的习题，题型多样，供学生综合练习和复习使用.

书末附有习题和总习题的答案与提示.

7. 本教材附有常用曲线、行列式和积分表的附录，以备教师和学生查阅.

8. 本教材中所有外国人名均用英文表示(如泰勒公式写为Taylor公式、洛必达法则写为L'Hospital法则等等).

本书上册由朱小宁(第一、二章及附录一)、赵晶(第三章)、张益群(第四章)、韩世勤(第五章)、马晴霞(第六章、附录二及附录三)、李宏伟(第七章)编写，赵晶、李宏伟统稿. 下册由刘安平(第八章)、刘小雅(第九章)、李星(第十章)、吴振远(第十一、十二章)、刘鲁文(第十三章)、彭放(第十四、十五章)编写，彭放统稿. 我们在编写出版过程中得到了中国地质大学数理学院领导和教师的大力支持与帮助. 段连秀编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动. 谨在此向他们表示衷心的感谢.

在此次编写过程中参考了大量的有关教材，其中对本书影响较大的书目均列在书后的参考文献中，但由于编者水平所限，不足和疏漏之处在所难免，恳请读者和专家学者批评指正.

编　者

2010年9月

目　录

第二篇　微积分

第三篇 常微分方程

第二篇　微积分

本篇介绍微积分学，内容包括一元函数微积分学(上册)、多元函数微积分学和级数(下册).

第八章　无穷级数

无穷级数是表示函数及进行数值运算的一个重要工具，在理论上及实际问题中都有广泛的应用.本章的主要内容是数项级数、幂级数和 Fourier 级数.

首先介绍数项级数的一些基本概念，如级数的收敛与发散、收敛级数的基本性质，以及各种数项级数收敛与发散的判别法，为后面进一步研究函数项级数，特别是幂级数、Fourier 级数做准备.我们接着将讨论函数项级数，主要讨论幂级数和 Fourier 级数.这是许多实际问题及理论中经常遇到的级数.本章将研究这两类级数的收敛性质及应用.

§8.1　数项级数的收敛与发散

8.1.1　基本概念

人们认识事物在数量方面的特征，往往有一个由近似到精确的过程.在这种认识过程中会遇到由有限个数量相加到无穷个数量相加的问题.

例如计算半径为 R 的圆的面积 A，具体做法如下：作圆的内接正六边形，算出这六边形的面积 a_1，它是圆面积 A 的一个粗糙的近似值.为了比较精确地计算出 A 的值，我们以这个正六边形的每一边为底做一个顶点在圆周上的等腰三角形，算出这六个等腰三角形的面积之和 a_2.那么 a_1+a_2(即内接正十二边形的面积)就是

A 的一个较好的近似值. 同样地,在这正十二边形的每一边上分别作一个顶点在圆周上的等腰三角形,算出这十二个等腰三角形的面积之和 a_3. 那么 $a_1+a_2+a_3$(即内接正二十四边形的面积)是 A 的一个更好的近似值. 如此继续下去,内接正 3×2^n 边形的面积就逐步逼近圆面积:

$$A\approx a_1, A\approx a_1+a_2, A\approx a_1+a_2+a_3, \cdots,$$

$$A\approx a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

如果内接正多边形的边数无限增多,即 n 无限增大,则和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的极限就是所要求的圆面积 A. 这时和式中的项数无限增多,于是出现了无穷多个数量一次相加的数学式子.

一般地,如果给定一个数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$,则由这数列构成的表达式

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \tag{8.1}$$

称为数项无穷级数,简称为数项级数,记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots,$$

其中第 n 项 a_n 称为级数(8.1)的一般项.

上述级数的定义只是一个形式上的定义,怎样理解无穷级数中无穷个数量相加呢? 联系上面关于计算圆面积的例子,我们可以从有限项的和出发,观察它们的变化趋势,由此来理解无穷多个数量相加的含义.

作(常数项)级数(8.1)的前 n 项的和

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i \tag{8.2}$$

S_n 称为级数(8.1)的部分和. 当 n 依次取 1,2,3,…时,它们构成一个新的数列

$$S_1=a_1, S_2=a_1+a_2, S_3=a_1+a_2+a_3, \cdots$$

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n, \cdots.$$

根据这个数列有没有极限,我们引进无穷级数(8.1)的收敛与发散的概念.

定义 8.1 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S,即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

则称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,这时极限 S 叫做这级数的和,并写成

$$S=a_1+a_2+\cdots+a_n,+\cdots;$$

如果 $\{S_n\}$ 没有极限,则称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

显然，当级数收敛时，其部分和 S_n 是级数的和 S 的近似值，它们之间的差值 $r_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$ 叫做级数的余项. 用近似值 S_n 代替 S 所产生的误差是这个余项的绝对值，即误差是 $|r_n|$.

例 8.1　无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \tag{8.3}$$

叫做等比级数（又称为几何级数），其中 $a \neq 0$，q 叫做级数的公比. 试讨论级数(8.3)的收敛性.

解　如果 $q \neq 1$，则部分和

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

当 $|q| < 1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$，因此这时级数(8.3)收敛，其和为 $\frac{a}{1-q}$.

当 $|q| > 1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$，这时级数(8.3)发散.

如果 $|q| = 1$，则当 $q = 1$ 时，$S_n = na \to \infty$，因此级数(8.3)发散；当 $q = -1$ 时，级数(8.3)成为

$$a - a + a - a + \cdots,$$

显然 S_n 随着 n 为奇数或为偶数而等于 a 或等于零，从而 S_n 的极限不存在，这时级数(8.3)发散.

综合以上结果，我们得到：如果等比级数(8.3)的公比的绝对值 $|q| < 1$，则级数收敛；如果 $|q| \geqslant 1$，则级数发散.

例 8.2　证明级数

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots \tag{8.4}$$

收敛，并求和.

证　级数(8.4)的部分和为

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

从而　$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$，所以这级数收敛，它的和是 1.

例 8.3　证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 发散.

证　部分和为 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k})=\sum\limits_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k]$

$$=\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)\to\infty\quad(n\to\infty),$$

因此,该级数发散.

从定义 8.1 可知,级数和数列有着密切的联系.给定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,就有部分和数列 $\{S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i\}$;反之,给定数列 $\{S_n\}$,就有以 $\{S_n\}$ 为部分和数列的级数

$$S_1+(S_2-S_1)+\cdots+(S_n-S_{n-1})+\cdots=S_1+\sum_{n=2}^{\infty}(S_n-S_{n-1})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

其中 $a_1=S_1,a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$,按定义,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与数列 $\{S_n\}$ 同时收敛或同时发散,且在收敛时,有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$.因此,有关数列极限的一些结果都可以搬到对应的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 上来. 反之亦然. 下面根据数列极限的 Cauchy 准则,给出判别数项级数是否收敛的 Cauchy 准则.

定理 8.1(Cauchy 准则)　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是:$\forall\varepsilon>0,\exists N$, $\forall m,n>N,m>n$,有

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m|<\varepsilon.\tag{8.5}$$

证　必要性. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则其部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限.根据数列极限存在的 Cauchy 准则,$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall m,n>N$,有

$$|S_m-S_n|<\varepsilon.\tag{8.6}$$

不妨设 $m>n$,则有

$$|(a_1+a_2+\cdots+a_m)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)|<\varepsilon,$$

由此得到式(8.5).

充分性. 设条件(8.5)成立,则式(8.6)成立,根据数列极限存在的 Cauchy 准则知,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. ▌