TURING 图灵新知

WILEY

The Mathematical Universe

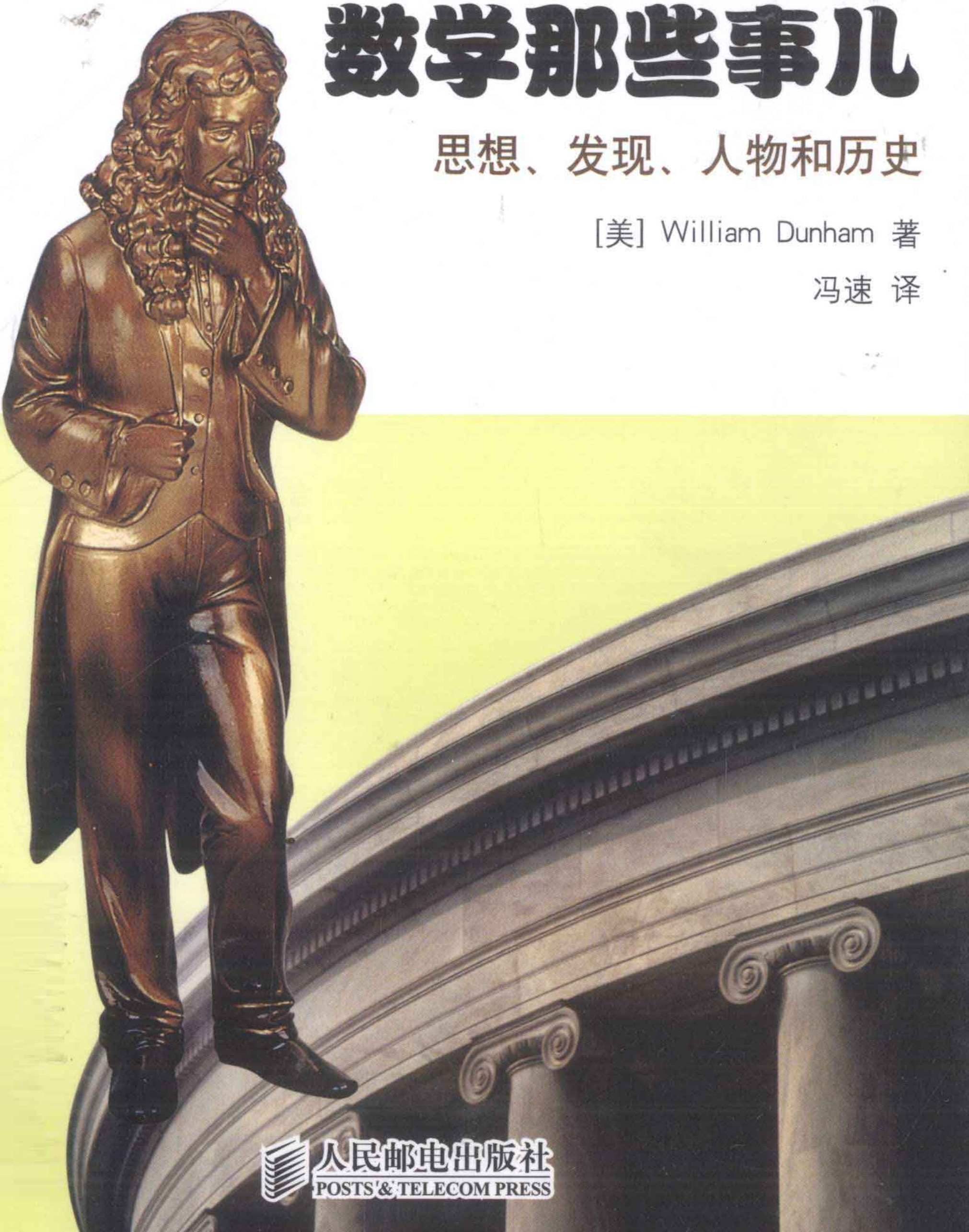
An Alphabetical Journey Through the Great Proofs, Problems, and Personalities

数学那些事儿

思想、发现、人物和历史

[美] William Dunham 著

冯速 译



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

The Mathematical Universe

An Alphabetical Journey Through the Great Proofs, Problems, and Personalities

数学那些事儿

思想、发现、人物和历史

[美] William Dunham 著

冯速 译

人民邮电出版社

北 京

图书在版编目(CIP)数据

数学那些事儿：思想、发现、人物和历史 / (美)邓纳姆(Dunham, W.)著；冯速译. —北京：人民邮电出版社, 2011. 3

(图灵新知)

书名原文：The Mathematical Universe: An Alphabetical Journey Through the Great Proofs, Problems, and Personalities

ISBN 978-7-115-24731-5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①邓… ②冯… Ⅲ. ①初等数学-普及读物 Ⅳ. ①O12-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 000991 号

内 容 提 要

本书依字母 A 到 Z 的顺序组织了一系列小短文，从算术、伯努利试验、圆、微分学讲到 *xy* 平面、复数，全面覆盖了初等数学的内容，展示了魅力无穷的数学的概貌。书中还介绍了数学史上很多有趣的故事和鲜为人知的事实，讨论了一些神秘的事件，并给出了很多伟大的数学家的简短的人物传记。

本书兼具趣味性和学术性，对专业背景要求不高，是贡献给数学爱好者的一道美味佳肴。

图灵新知

数学那些事儿：思想、发现、人物和历史

◆ 著 [美] William Dunham
译 冯 速
责任编辑 明永玲

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址 http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：880×1230 1/32
印张：10.25
字数：281 千字 2011 年 3 月第 1 版
印数：1–5 000 册 2011 年 3 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号 图字：01-2010-1839 号

ISBN 978-7-115-24731-5

定价：39.00 元

读者服务热线：(010)51095186 印装质量热线：(010) 67129223

反盗版热线：(010)67171154

版 权 声 明

前　言

很多孩子都是从简单的字母书开始学习阅读。舒舒服服地坐在大人温暖的大腿上，随着字母表的展开，孩子们从“A 代表 alligator (鳄鱼)”到“Z 代表 zebra (斑马)”，静静地聆听着。这样的书也许不是什么伟大的文学著作，但却是教孩子认识字母、词汇和语言的有效启蒙读物。

效仿孩子们的这些字母读物，本书依字母 A 到 Z 的顺序组织了一系列小短文，以这种形式来尝试解释数学的基本原理。不过，本书的内容相对要深奥一些，D 在这里代表 differential caculus (微积分) 而不是 doggie (小狗)，因而，是不是坐在温暖的腿上也就无所谓了。但是，按照字母顺序周游知识世界的基本思想还是一致的。

这样的组织方式要求极其严格，读者需要一页一页从头读到尾，但数学原理毕竟不可能依照拉丁字母的顺序展开它的逻辑进程。因此，有时候章与章之间的衔接会有些生硬。另外，某些字母可能包含很多题材，而有些字母的题材却相当地生僻。这种状况在孩子们的字母读本中也会出现，比如“C 代表 cat (猫)”而轮到 X 却是“X 代表 xenurus (犰狳)”。读者会发现，有些话题是硬塞进来的，很像把 16 码的大脚硬生生地挤进 8 码的小靴子里。设计一个与字母表顺序一致的主题顺序，确实是对逻辑组织能力的一个不小的挑战。

本书从算术这个 (看似) 简单的主题开始。后面章节依次探讨各个主题，这些主题可能会有所重复，而不同的主题也常常交织在一起。有时候，前后相继的几章会一起讨论同一个领域，例如 G, H, I 这三章讨论的是几何，而 K 和 L 这两章讲述的是 17 世纪牛顿与莱布尼茨这两个死对头。有些章专门讨论某一位数学家，比如 E 章的欧拉，F 章的费马和 R 章的高斯。有些章陈述特定结果，例如，等周问题及球面的曲

面面积的阿基米德确定法; 有的章则关注一些更宽泛的主题, 如数学人物和这一学科中的女性等。无论是什么样的主题, 每一章都讲述了大量的历史事实。

顺着这样一条路线, 我们将展示数学各主要分支的概况 (从代数到几何, 乃至于概率和微积分)。这些章节的设计, 着眼于解释关键数学思想, 采用了不那么正统的教科书的形式, 行文间时而会出现一些实际的证明 (至少是“小证明”)。例如, D 和 L 这两章分别介绍微分和积分, 因此少不了要多涉及一些数学运算。

然而, 在多数章中, 我们会尽力减少过多的技术性推理。事实上, 本书的主题还都是初等数学范畴内的。也就是说, 本书把主要内容框定于高中代数和高中几何。数学专业人士在这些章节中不会发现什么新奇的东西。本书针对的是那些对数学有浓厚的兴趣, 而且还有一定专业背景的人。

有几个中心思想会不断出现。例如, 数学这门学科虽然古老, 但却极为重要; 它既涵盖了人们日常生活的方方面面, 又深入到那些抽象的神秘领域; 数学是一门博大精深的学问。而按照字母表的顺序来组织内容并展示这门大学问的精髓正是本书追求的目标。

在此, 有必要提一下保罗斯 (John Allen Paulos) 的著作《超越数》(*Beyond Numeracy*, Knopf 出版社, 纽约, 1991 年), 保罗斯把这本书描述成“部分是字典, 部分是数学短文集, 还有部分则是数学研究者的思考”。保罗斯这本生动的著作同样从字母 A 到字母 Z 描绘了数学的历程, 他从 algebra (代数) 开始一直写到 (数学家) Zeno (芝诺)。对某些字母他安排了多个条目, 因此他那本书的覆盖面更宽; 而我选择通过少而长的短文来增加深度。我希望这两本都按字母顺序编排但风格各异的书能够相得益彰。

当然, 任何作者都没有办法做到面面俱到, 不可能讨论到所有关键要点、介绍到所有重要人物, 或涉及所有急待解决的数学问题。每次都必须做出选择, 而这些选择又要受到内在一致性、题材的复杂程度、作者的兴趣和专业知识的限制, 还要受到完全人为的字母顺序的限制。

这类书的选题策划方案决定了它难免挂一漏万, 而大量的好素材最终都不得不忍痛割爱了。

这样一来, 本书就成为一个人只身面对浩瀚数学宇宙的感悟。跟随本书在数学知识的海洋中遨游, 只能经历无数条路径中的一条, 而且我也自认为我所选择的由 A 到 Z 的顺序并不是最完美的路径。

抛开限制不谈, 我仍然希望本书至少能够展示这门魅力无穷的学科的概貌。正如 19 世纪数学家索菲亚·柯瓦列夫斯卡娅所说:"许多无缘更深入认识数学的人士, 把数学与算术混为一谈, 而且还误认为它是一门枯燥无味的科学。然而实际上, 它是一门需要最强大想象力的科学。"①也许这本书能够再现 15 世纪希腊哲学家普罗克洛斯 (Proclus) 的高尚情怀:"单凭数学便能重振生机, 唤醒灵魂……赋予其生命, 能够化想象为现实, 能够变黑暗为智慧的光芒。"②

① Ann Hibler Koblitz, *A Convergence of Lives*, Birkhäuser, Boston, 1983, p. 231.

② Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, trans. Glenn R. Morrow, Princeton U. Press, Princeton, NJ, 1970, p. 17.

致　　谢

在本书的编写过程中，我得到了朋友、家人、同事以及编辑们的支持，其中有一些人我需要特别感谢。

要特别感谢达里尔·卡恩思，他第一个向我建议写一本按字母顺序安排的数学书籍。达里尔是一位伟大的生物学教授，一位非常慷慨的艺术家，我还要荣幸地说他是我的一位亲密的朋友。

作为穆伦堡学院的一位新教员，我深深感谢来自阿瑟·泰勒校长和数学系的同事们的热烈欢迎，这些同事是：约翰·梅耶、鲍勃·斯顿普、罗兰·戴德金、鲍勃·瓦格纳、乔治·本杰明和戴夫·纳尔逊。还要感谢穆伦堡学院崔斯勒图书馆的全体馆员，感谢他们在这本书起草的准备过程中所给予的耐心帮助。

除了穆伦堡学院外，我还要感谢我的同事唐·贝利、维克特·卡兹、阿莱恩·帕尔森、巴克·威尔斯，感谢他们在这份手稿的各个准备阶段给予的帮助。在约翰·威立出版社我非常高兴地认识了我的几位编辑：史蒂夫·罗斯，在本书的出版过程中，他就像我的助产士一样；而艾米丽·鲁思和斯科特·伦斯勒，他们则陪同本书度过青春期走向成熟。

我要对我的母亲，还有鲁斯·伊万斯、鲍勃·伊万斯和卡萝尔·邓纳姆深致爱意和特别的感激之情，他们始终不变的爱和鼓励是我动力的源泉。

最后，我特别感谢我的妻子兼同事彭妮·邓纳姆。她对本书内容的选择以及章节轮廓提出了有益的建议。作为苹果公司的艺术师，她制作了本书所含的图表。她对手稿的编辑从根本上提高了最终成书的质量。毫无疑问，彭妮的影响在本书中随处可见。

威廉·邓纳姆

宾夕法尼亚州，阿伦敦，1994 年

目　　录

A 算术 Arithmetic

对我们每一个人来说, 数学都是从算术开始的, 这本书也是一样。如我们所知, 算术研究的是最基础的数量概念, 即整数 1, 2, 3,⋯。谈到最具普遍意义的数学思想, 那就是区分个体数目的思想, 也就是"计数"。

"上帝创造了整数, 其他一切都由人制造。"[1] 利奥波德·克罗内克这句著名论述揭示出整数的内在必然性以及它们无可否认的自然性。如果我们把数学想象成一个庞大的管弦乐队, 那么整数系就应该被比喻成一面大鼓: 简单、直接、反复, 为所有其他乐器提供基础节奏。的确, 也有更加复杂的概念, 可以比作数学双簧管、数学法国号和数学大提琴, 我们将在后面的章节中研究其中的一些概念。但是, 整数总是根基。

数学家称这些无穷无尽的 1, 2, 3,⋯为正整数, 或更形象地称其为自然数。在认识了它们并为它们起好名字之后, 我们的注意力就转向了如何利用一些重要的方法把它们结合起来。最基础的方法就是加法。这一运算不仅基础, 而且很自然, 因为这些数是一个一个累加而成的, 即 2=1+1, 3=2+1, 4=3+1, 以次类推。正如强壮的纯种马"天生就会跑"一样, 自然数也是"天生就会加"。

上小学的时候，我们先是（几乎）无休止地把数加起来，然后做相反的运算，或者说是逆运算：减法。接下来就是乘法和除法，这期间似乎没有一天停止过训练。经过多年这样的教育，孩子们对算术运算的掌握程度仍然参差不齐，尽管花 7.95 美元买来的计算器眨眼功夫就能毫无偏差地完成计算，但人们并没有因此而放弃这种训练。遗憾的是，对大多数年轻人来说，做算术题已变成了操练和苦差事的代名词。

然而，在不久之前，*算术*一词不仅包含加减乘除这些基本运算，而且还包含整数的一些较深层次的性质。例如，欧洲人所说的“高级算术”实际上就是“更难的算术”的意思。今天更贴切的术语是*数论*。

尽管这门学科涉及的范围博大精深，但是它多少还是以素数概念为主的。如果一个整数比 1 大，而且不能写成更小的整数之积，那么这个整数就是**素数**。因此，前十个素数是 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 和 29。这其中任何一个数都没有除了 1 和它本身之外的正整数因子。

爱争论的读者也许说 17 可以写成积，例如，$17=2\times8.5$ 或者 $17=5\times3.4$。但是这些情况下的因子不都是整数。必须记住的是，数论中的主角是由整数来扮演的，整数的那些更复杂、更远房的表亲——分数、无理数和虚数，都只能委身幕后而干着急。

如果一个比 1 大的整数不是素数，也就是说，如果一个数有除了 1 和它本身之外的整数因子，那么我们就称它为**合数**。例如，$24=4\times6$ 或者 $51=3\times17$ 就是合数的例子。我们认为整数 1 既不是素数也不是合数——原因很快就会揭晓。因此最小的素数是 2。

使这些概念形象化的一个简单而且常用的方法，就是想象必须排成矩形的一块块正方形地砖。如果有 12 块这样的地砖，我们就有很多不同的方法把它们排成矩形，如图 A-1 所示。当然，这是因为 $12=1\times12$，或者 $12=2\times6$，或者 $12=3\times4$（这里我们不区分 3×4 和 4×3，因为在这种情况下，最终地板的形状相同，只不过一个是对另一个的旋转）。同样，48 块地砖能够产生 5 种不同的排列方案，其对应的分解方案是 $48=1\times48=2\times24=3\times16=4\times12=6\times8$。

另一方面，如果是 7 块地砖，我们有且只能有一种方案 1×7，如图

A-2 所示。如果有人非要用 7 块地砖来铺一间房, 那么这间房子一定是又窄又长的。根据这个例子我们可以说, 如果一个数只有一种分解方案 $p=1\times p$, 那么这个数就是素数。如果一个数有多种分解方案, 那么这个数就是合数。

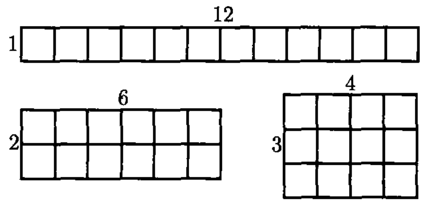


图　A-1

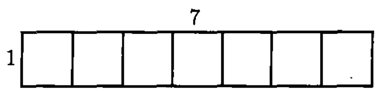


图　A-2

素数虽然是高级算术的核心, 但它们也是导致数学深奥难懂的根源。理由很简单: 尽管整数是通过加法运算逐一构造出来的, 但素数和合数的问题向数学中引入了*乘法*。数论之难 (当然, 还有之美), 就在于数学家试图从乘法运算的角度来理解加法运算的结果。

因此, 自然数就像离开了水的鱼一样。它们是加法运算的产物, 却身处陌生的乘法环境之中。当然, 在我们绝望地放弃整个事业之前, 我们应该回想一下 3 亿 5000 万年前。那时候, 鱼的确离开了水, 而且同样是在一个陌生的世界里徒劳无益地翕动着它们的鳃; 接着, 这些鱼逐渐进化成两栖类、爬行类、鸟类、哺乳动物和数学家。有时候, 一个新的不利的环境能够造就完全不一样的结果。

如果不是因为算术基本定理 (注意这里的*算术*一词使用的是其更广泛的意义) 这个著名的结果, 素数也许不会在数论中占据中心位置。算术基本定理, 顾名思义, 就是整个数学中最基本最重要的一个命题, 其内容如下。

算术基本定理: 任何正整数 (1 除外) 都能够用一种方式且只能用

一种方式写成素数之积。■

这个论断是一把双刃剑，首先，我们可以把任意的整数表示成素数的积，其次，只有一种表示方式。这必然引导我们得出这样的结论：素数是乘法的基本元素，所有整数都是由这些基本元素构成的，其重要性不言而喻。素数的角色与化学元素的角色类似，因为正像任何自然化合物都是元素周期表中的 92 种 (或者 100 多种，其中包括在实验室中制造出来的元素) 自然元素的某种组合一样，任何一个整数都可以分解成它的素数因子之积。我们称之为水的化合物 H_2O 分子可以分解成两个氢原子和一个氧原子。类似地，化合数 (即合数)45 可以分解成两个素数因子 3 和一个素数因子 5 之积。模仿水的化学记法，我可以把 45 写成 $45=3_25$，然而数学家更喜欢指数形式 $45=3^2\times5$。

但是，算术基本定理不仅仅是给出了素数分解。同等重要的是，它能够确保这样分解的唯一性。如果一个人确定 92 365 的素数因子分解为 $5\times7\times7\times13\times29$，那么他的同行，无论在隔壁房间还是在其他国家工作，无论是工作在今天还是工作在距今 1000 个世纪之后，必定给出完全相同的素数分解。

这令数学家非常满意。同样，下面的情况也令化学家感到满意：当一名化学家把一个水分子分解成一个氧原子和两个氢原子时，其他化学家绝不可能把这个水分子分解成一个铅原子和两个钼原子。如同化学元素一样，素数不仅是基本元素，而且是唯一的基本元素。

有必要提一下，因子分解唯一性的愿望要求我们把 1 从素数中排除。因为，如果把 1 归类为素数，那么数 14 可能的素数分解是 $14=2\times7$ 以及不同的素数分解 $14=1\times2\times7$, $14=1\times1\times1\times2\times7$。素数因子分解的唯一性不复存在。所以数学家认为给 1 一个特殊的角色会更好些。它既不是素数也不是合数，被称为**单位**。

面对一个正整数，数学家可能希望确定它是素数还是合数，当它是合数时，接下来就要寻找它的素数因子。有时候，这个问题很简单。任何一个偶数 (大于 2) 显然不是素数，因为它有一个因子 2，任何一个其个位是 5 或 0 的整数也同样是合数。除此之外，确定素数性质问题就

相对比较困难。例如, 谁能确定数 4 294 967 297 和 4 827 507 229 哪个是素数哪个不是素数吗?①

19 世纪的数学家卡尔・弗里德里希・高斯 (1777–1855), 也许是他那个时代最伟大的数论学家, 在 1801 年的一份手稿《算术研究》中非常简洁地描述了这个问题:

素数与合数的区分以及合数的素因子分解的问题是算术中最重要且最有用的问题之一……这门科学本身的高贵性似乎要求人们应该探索每一个能够解决这一巧妙、著名问题的方法。[2]

从古希腊人到现代数论学家的 2 400 多年间, 数学家们义无反顾地扑向这一类问题, 就如同飞蛾扑火, 前仆后继。沿途众学者们创造出关于素数的很多猜测。其中有一些已经解决, 而有一些至今仍悬而未解, 而且有相当数量的问题还没有得到解决。

例如, 法国神学家马林・梅森 (1588–1648) 在 1644 年提出了一个很有趣的问题。梅森在 17 世纪科学中扮演重要的角色, 这不仅是因为他对数论做出了诸多贡献, 而且还因为他承担了数学家之间的信息交换台的角色。当学者们对数学现状比较关心或者对某个问题感到困惑时, 他们就写信给梅森, 而梅森或者知道其答案或者把他们直接引荐给某位可能的权威。在科学会议、专业期刊以及电子邮件出现之前的那个时代, 这样的信息交流通道的价值是无法估量的。

梅森痴迷于形如 2^n-1 的数, 即比 2 的某个幂少 1 的数。今天为了纪念他, 我们把这样的数称为**梅森数**。显然, 所有这样的数都是奇数。更重要的是, 它们之中有一些是素数。

梅森马上发现, 如果 n 是合数, 那么 2^n-1 也一定是合数。例如, 如果 $n=12$, 那么这个梅森数 $2^{12}-1=4095=3\times3\times5\times7\times13$ 是一个合数 (因为 12 是合数); 对于合数 $n=33$, $2^{33}-1=8\,589\,934\,591=7\times1\,227\,133\,513$ 同样不是一个素数。

然而, 当幂是素数时, 情况就不是这么显然了。设 $p=2, 3, 5, 7$, 产

① 641 可整除 4 294 967 297; 另一个数是素数。参见 David Wells, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*, Penguin, New York, p.192。

生的“梅森数”分别是 $2^2-1=3$, $2^3-1=7$, $2^5-1=31$, $2^7-1=127$。但是，如果用素数 $p=11$ 作幂，我们得到 $2^{11}-1=2047$; 而这个数是 23 与 89 的积，因此它是一个合数。梅森充分认识到 p 是一个素数不能保证 2^p-1 也是一个素数。事实上，他断言：“对 2 与 257 之间的素数而言，使 2^p-1 是素数的素数只有 $p=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ 和 257。”[3]

遗憾的是，梅森前辈的结论有不合理和缺失的地方。例如，他漏掉了数 $2^{61}-1$ 是一个素数。另外，已经证明 $2^{67}-1$ 根本不是一个素数。1876 年爱德华·卢卡斯 (1842—1891) 证明了这一事实，他使用了某个论据证明了这个数是合数，这个论据不是很直接，因为它不能很明确地展示出任何因子。因此在某种意义上，$2^{67}-1$ 的故事仍然很不完整，但是对这一故事的最后部分值得再说两句。

那一年是 1903 年，背景是美国数学学会的一次会议。哥伦比亚大学的佛兰克·纳尔逊·柯尔是日程安排的演讲者之一。当轮到他上台时，柯尔走到会议室的前台，静静地把 2 与它自己相乘 67 次，再减去 1，得到一个巨大的结果 147 573 952 588 676 412 927。在见证了这样沉默无语的计算之后，迷迷糊糊的观众们接下来看到柯尔在黑板上写到

$$193\ 707\ 721 \times 761\ 838\ 257\ 287$$

他仍旧是沉默地计算着。这个积不是别的数，正是

$$147\ 573\ 952\ 588\ 676\ 412\ 927$$

柯尔落座。他完美地演出了一幕哑剧。

在座的观众目睹了把梅森数 $2^{67}-1$ 明明白白分解成两个大因子的过程，他们一度像柯尔一样哑口无语。随后，他们送上了热烈的掌声，并站起来向他祝贺！希望这掌声能够温暖柯尔的心，因为后来他承认他为此已经计算了二十年。[4]

尽管有了柯尔的因子分解，但是梅森数仍然是素数的源泉。几乎可以肯定，当一家报纸宣布找到一个新的“最大”素数时，它一定是 2^p-1 的形式。例如 1992 年，已知最大的素数是 $2^{756839}-1$，这是一个有 227 832 位的庞然大物。[5] 但是确定哪些梅森数是素数哪些是合数仍旧是数论的一个未解问题。

梅森数 $2^7-1=127$ 出现在另一个素数故事中。在 19 世纪中期, 法国数学家德波林尼雅克声称:

每一个奇数都可以表示成为 2 的某个幂和一个素数之和。[6]

例如, 15 可以写成 $8+7=2^3+7$, 而 $53=16+37=2^4+37$, $4107=4096+11=2^{12}+11$。尽管德波林尼雅克没有声明已经对他的猜测给出了证明, 但是他表示他已经检验了 300 万以内的所有奇数。

因为 2 的任意幂都不可能在它的素因数分解里有奇数, 这样的幂可以说成是所有数中最纯粹的偶数。德波林尼雅克的陈述说明任意奇数可以由一个素数 (这个基本的构造积木) 加上一个纯偶数的 2 的幂构建而成。这是一个大胆的陈述。

而它也绝对是错误的。如果德波林尼雅克真的花了足够的时间对他的猜测做了上百万次的检验, 那么我们只能同情他, 因为一个相对较小的梅森数 127 就反驳了他的结论 —— 我们没法把 127 写成 2 的幂加上一个素数。如果我们用各种可能的方式把 127 分解成 2 的幂和一个余数, 就会发现这个余数不是素数, 因此说他显然错了。

$$127 = 2 + 125 = 2 + (5 \times 25)$$
$$127 = 4 + 123 = 2^2 + (3 \times 41)$$
$$127 = 8 + 119 = 2^3 + (7 \times 17)$$
$$127 = 16 + 111 = 2^4 + (3 \times 37)$$
$$127 = 32 + 95 = 2^5 + (5 \times 19)$$
$$127 = 64 + 63 = 2^6 + (3 \times 21)$$

(因为 $2^7=128$ 大于 127, 所以我们无需再进一步计算了。) 今天, 德波林尼雅克的猜测已被扔入数论的垃圾堆之中, 因为他没有注意到就在他眼前的一个反例。就如同 19 世纪试图作扑翼飞行的人一样, 他野心勃勃的主张从来就没有飞离地面。

我们已经把化学元素的唯一分解与整数的唯一素数分解对应起来。尽管这种化学类比很有帮助, 但是仅就一点它就失效了, 因为历史上所有化学家的全部实验室的工作成果也不过是提供了区区 100 多种元素, 而素数的全体是无穷的。虽说化学元素周期表能够占满一面墙, 但是类似的素数表则需要可以无限延伸的一面墙。

素数无穷性的最早证明是希腊数学家欧几里得 (大约公元前 300 年) 给出的, 这一证明出现在他的巨作《几何原本》之中。[7] 下面我们给出他的证明的一个修改后的版本, 但是它仍然保留了原来证明的独特优美之处。

为了能够理解这一推导过程, 需要两个数论的预备结果, 它们都不是很难。第一个是对于任意一个整数 n, n 的两个倍数之差本身仍然是 n 的倍数。用符号表示, 如果 a 和 b 是 n 的两个倍数, 那么 $a-b$ 也是 n 的倍数。例如, 70 和 21 都是 7 的倍数, 那么它们的差 70−21=49 也是 7 的倍数; 同样, 216 和 72 都是 9 的倍数, 那么它们的差 216−72=144 也是 9 的倍数。这里没有给出这一事实的一般证明, 但是证明过程真的很简单。

第二个预备结果也同样非常初等。它说的是任意合数至少有一个素数因子。同样, 我们还是用例子加以说明。合数 39 有素数因子 3, 合数 323 有素数因子 17, 合数 25 有素数因子 5。欧几里得在他的《几何原本》第七卷的命题 31 中对这个定理给出了一个非常巧妙的证明。

除此之外, 证明素数无穷性的必备知识是能够理解利用矛盾的证明方法。这种证明方法需要我们理解最基础的逻辑二分法：一个陈述或者为真或者为假。

论证一个命题为真的一个方法就是直接对它加以证明。这是显然的 (也是一种直白的传统方法)。还有一种不同但也同样显然的方法就是所谓的**反证法**, 这种证明是假设陈述为假, 然后从这一假设出发, 利用逻辑规则去得出不可能的结果。这样一个结果的出现表明在整个推理过程中的某个地方出现了错误, 如果我们的推理步骤是正确的, 那么唯一可能出现问题的地方就是最开始的陈述为假的假设。因此我们必须驳回这一假设, 上面说的二分法给我们留下唯一的一种可能性：这个陈述一定是真的。不可否认, 这种间接性似乎让人感觉很奇怪, 而这种迂回策略似乎也让人觉得没必要。为了强调这种间接性, 在证明素数无穷性之前我们先考虑一个例子。

假设我们要研究既是完全平方数又是完全立方数的数, 如 64 是