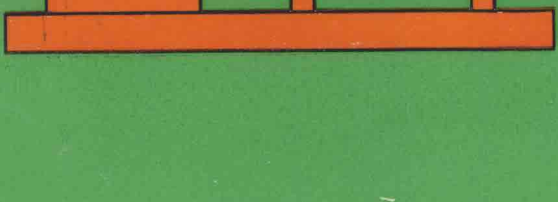
组合数学

陈小亘



东方出版中心

组 合 数 学

陈小亘

东方出版中心

内容简介

组合数学在近几十年来发展迅速，应用日趋广泛。本书首先简单介绍 *Ramsey* 定理，第二至七章主要介绍组合数学中组合计数的基础理论，其中包括基本计数函数，生成函数，递推关系，容斥原理，*Möbius* 反演原理和 *Polya* 定理。最后介绍组合矩阵论中的 *Hall* 定理和相异代表系。每一章后配备一定量的习题。

本书叙述条理清楚，由浅入深，文字流畅。可作为高等院校组合数学及计算机科学等有关专业的高年级课程的教材，也可供高等院校理工科教师，数学工作者和爱好者参考。

组合数学　　陈小亘　编著

出版：东方出版中心　　开本：850×1168(毫米)1/32
（上海仙霞路 335 号　邮编 200335）　　印张：7.56
发行：东方出版中心　　字数：183 千
经销：新华书店　　版次：1997 年第 1 版第 1 次印刷
印刷：东方出版中心　东煤技校印刷厂　　印数：1000

ISBN7－80627－031－0/F·72·2
定价：18.20 元

前　　言

组合数学又称组合学，是一个古老而又年青的数学分支．早在四千多年前，我们的祖先禹就观察到神龟背上的幻方

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

此幻方的特点是它的每行每列以及两条对角线上的数的和均为15．这是一个古老的组合问题．公元前二百多年希腊著名的科学家 *Archimedes* 发现了公式 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 和 $1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$．但是对于 $1^4+2^4+\cdots+n^4$ 的公式则是在一千多年后（公元十一世纪）阿拉伯数学家才知道．古代有关这方面的知识往往隐含着数的神秘主义．近几个世纪以来，人们又从数学游戏的角度去触及这一课题．由于娱乐及其美学上的魅力而被研究的许多组合问题，现在无论是在纯粹科学或应用科学上都有很重要的价值，从而这样的具有魅惑力的古老课题仍然吸引着不少现代的数学家．

然而，这门学科的发展是极其缓慢的．最近几十年来，这一学科发展迅速．一方面，它受到了许多新兴的应用和理论学科的推动，诸如计算机科学，数学通讯理论，规划论等；另一方面，它自身内部的因素促使它不断地前发展．因而，这门古老的学科涣发青春，日新月异，硕果累累．

组合数学历史以来是很驳杂的．它与许多数学分支相交叉，因此很难给它下一个精确的定义．但是大都认为它主要是研究按

一定的规则来安排一些元素成各种集合的问题．若要求的安排并非显然存在，则须证明其存在性；若符合要求的安排已知存在，则要求出这样的安排的个数，同时把这样的安排构造出来；若给出最优化标准，则要找出最优的安排；如此等等．前述的几个方面分别被称为存在性问题，计数问题，构造问题和最优化问题．

本书着重论述计数问题，但对其他问题也有所提及．作为组合数学的重要组成部分的图论，由于篇幅的限制在此没有论及．

本书思路清晰，推理严密．毋需很多高深的数学知识就可以阅读．当然，倘若具备了分析学和代数学等数学知识，阅读起来就显得顺利了．书中有 * 号的内容，读者可以跳过，这并不影响本书的系统．

限于水平，书中错误和不妥之处难免，敬请读者不吝指正．

陈小豆

1997 年 11 月

符号与缩写

$\mathbf{Z}$	整数集合
$\mathbf{N}$	自然数集合
$\mathbf{N}_0$	非负整数集合
$\mathbf{R}$	实数集合
$\mathbf{C}$	复数集合
$[n]$	$=\{1,2,\cdots,n\}$
$n!$	n 的阶乘 $=1\cdot 2\cdot 3\cdots n$ 的积
$(x)_k$	$=x(x-1)\cdots(x-k+1)$
$(x)^k$	$=x(x+1)\cdots(x+k-1)$
$\lceil x\rceil$	$\geqslant$ 实数 x 的最小整数
$\lfloor x\rfloor$	$\leqslant$ 实数 x 的最大整数
$\langle x\rangle$	当实数 $x\neq$ 整数 $+\frac{1}{2}$ 时与 a 最接近的整数
$\binom{n}{k}$	二项式系数 $=\frac{(n)_k}{k!}$
$\left(\binom{n}{k}\right)$	$=\frac{(n)^k}{k!}$
$s(n,k)$	第一类 *Stirling* 数
$S(n,k)$	第二类 *Stirling* 数
$\overline{A}$	子集 A 的补集
$detA$	矩阵 A 的行列式
$perA$	矩阵 A 的积和式

目　　录

第一章 *Ramsey* 定理

Ramsey 定理是英国数学家、哲学家、逻辑学家 *F.P.Ramsey* 在1928年提出的，它是一个重要的又是基本的组合原理.

下面先介绍其简单形式.

§1.1 鸽笼原理

这个原理有各种称呼，最常用的名称是抽屉原理、*Dirichlet* 原理和鞋盒原理.

定理1.1(鸽笼原理的简单形式) 若 $n+1$ 件物体放入到 n 个盒子里，则至少有一个盒子包含2或更多件物体.

证明(反证) 若无一盒含两个或两个以上的物体，亦即每盒至多含一物体，则 n 个盒里的物体总数小于 n，与原设 $n+1$ 件物体矛盾. □

例1.1 在13个人中至少有两个人是在同一个月份出生的. 366个人中至少有两个人的生日相同.

例1.2 在边长为2的正三角形中任放5点，证明：至少有两点的间距不大于1.

证明 如图1.1所示，在正三角形三条边的中点之间连线，把整个三角形划分成四个边长为1的正三角形. 由鸽笼原理，5个点中至少有两个点落入同一个小三角形中，而这两个点的距离不大于1.

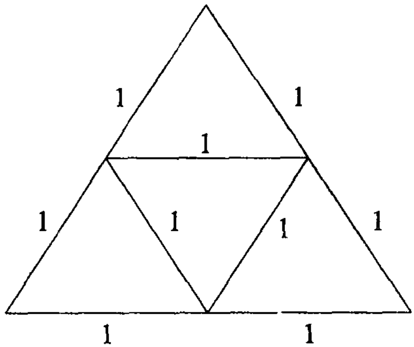


图 1.1

例 1.3 在[$2n$]中任取 $n+1$ 个不同的数,证明:至少有一个数是另一个数的倍数.

证明 对任意的 $m \in \mathbf{N}$,都可表示为

$$m = 2^{\alpha} \cdot \beta \quad 其中\ \alpha \in \mathbf{N}_0, \beta\ 为奇数.$$

设在[$2n$]中选出的 $n+1$ 个数为 $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}$,它们可依次表为:$2^{\alpha_1}\beta_1, 2^{\alpha_2}\beta_2, \cdots, 2^{\alpha_n}\beta_n, 2^{\alpha_{n+1}}\beta_{n+1}$.其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1} \in \mathbf{N}_0$, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n, \beta_{n+1}$ 是 $n+1$ 个奇数,依条件,它们取值只有 n 种可能,即值 $1, 3, \cdots, 2n-1$.由鸽笼原理,至少有两个(设为 β_i 和 β_j)相等,亦 $\beta_i = \beta_j$. $a_i = 2^{\alpha_i}\beta_i$, $a_j = 2^{\alpha_j}\beta_j$,设 $\alpha_i > \alpha_j$.于是 $\dfrac{a_i}{a_j} = 2^{\alpha_i - \alpha_j} \in \mathbf{N}$,即 a_i 是 a_j 的倍数.

注:上例中,$n+1$ 是使得命题成立的最小的数,若把 $n+1$ 改为 n,即"[$2n$]中任取 n 个不同的数,…"结论不成立.反例:$n=10$ 时,取 10 个数 11,12,…,20,则其中任何一个数都不是另一个数的倍数.

例 1.4 一棋手准备参加为时 11 周的比赛,每天至少赛一局,

但为免过于疲劳,他在每连续 7 天内不超过 12 局.证明:必有连续若干天恰好赛 21 局.

证明 设 a_i 表示棋手前 i 天比赛的总局数,依题有 $1 \leqslant i \leqslant 7 \cdot 11 \leqslant 77$,数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{77}$ 严格递增.因每天至少赛一局且每周不超过 12 局,故有 $1 \leqslant a_1$, $a_{77} \leqslant 11 \cdot 12 = 132$.

考察数列 $a_1 + 21, a_2 + 21, \cdots, a_{77} + 21$,则此数列也严格递增,且 $a_{77} + 21 \leqslant 153$.数列

$$a_1, a_2, \cdots, a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, \cdots, a_{77} + 21$$

有 154 项,仅有至多 153 个相异值,由鸽笼原理,154 个数中至少有两个数相等,但由于 $a_1, a_2, \cdots, a_{77}$ 和 $a_1 + 21, \cdots, a_{77} + 21$ 严格递增,故存在自然数 i, j(设 $i < j$),使得 $a_j = a_i + 21$,即 $a_j - a_i = 21$,这表明第 $i + 1$ 天至第 j 天恰好赛 21 局.

§ 1.2 鸽笼原理的加强形式

定理 1.2(鸽笼原理的加强形式) 设 $q_1, q_2, \cdots, q_n \in \mathbf{N}$.若把 $q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n + 1$ 件物体分放入 n 个盒子里,则第一个盒子至少包含 q_1 件物体,或第二个盒子至少包含 q_2 件物体,…,或第 n 个盒子至少包含 q_n 件物体.

证明(反证) 若不然,则有第 i 个盒子至多含 $q_i - 1$ 件物体,$i = 1, 2, \cdots, n$.故物体个数的总和不超过 $q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n$,与题设矛盾. □

定理 1.2 中,取 $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 2$, $q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n + 1 = n + 1$,可得到定理 1.1,即定理 1.1 是定理 1.2 的特款.

系 1 若 $n(r - 1) + 1$ 件物体放入 n 个盒里,则至少有一个盒有不少于 r 件的物体.

证明　在定理 1.2 中取 $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = r$ 可得 □

系 2　设 n 个正整数 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 满足不等式

$$\frac{1}{n}(m_1 + m_2 + \cdots + m_n) > r - 1.$$

则 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 中至少有一个不小于 r.

证明　由 $\frac{1}{n}(m_1 + m_2 + \cdots + m_n) > r - 1$ 得

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n > (r - 1)n \geqslant n(r - 1) + 1,$$

由系 1 得 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 中至少有一个不小于 r. □

系 3　m 件物体放入 n 个盒子中,则至少有一盒子有不少于 $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor + 1$ 件物体.

证明　在系 1 中取 $r = \lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor + 1$ 可得. □

例 1.5　设 n 是一个不小于 3 的正奇数,证明:在任意给定的 $n^2 - 2n + 2$ 个整数中,必存在 n 个数使得这 n 个数的和被 n 整除.

证明　由于一个整数被 n 除后的余数只可能是 $0, 1, \cdots, n - 1$ 中的一个,因而可以把 $0, 1, \cdots, n - 1$ 这 n 个数看成是 n 个盒子,而把 $n^2 - 2n + 2$ 个整数中取出 n 个数看成 $n^2 - 2n + 2$ 件物体放入 n 个盒子.另外,n 个数的余数(被 n 除)的和被 n 整除,则这 n 个数的和必被 n 整除.

现对盒子的状态分两种情形论证:

(ⅰ) n 个盒子中每一个盒子都不空,则从每一盒子中取出一个整体共 n 个整数,它们的余数(被 n 除)分别为 $0, 1, \cdots, n - 1$,而这 n 个余数的和等于 $0 + 1 + \cdots + (n - 1) = \frac{(n-1)n}{2}$.因 n 是不小于 3 的正奇数,从而 $n - 1$ 是大于等于 2 的偶数,$\frac{n-1}{2}$ 是一个整

数,n 整除$\frac{(n-1)n}{2}$,从而 n 能整除这 n 个整数.

(ⅱ)n 个盒子至少有一个空,则 n^2-2n+2 件物体放进至多 $n-1$ 个盒子,由系 3 一定有一个盒子至少有 $\lfloor \frac{n^2-2n+2-1}{n-1} \rfloor + 1 = n$ 件物体,即至少有 n 个整数被 n 除后的余数相同,自然 n 能整除这 n 个余数的和,故这 n 个数的和被 n 整除.

下面的例子,是由两位匈牙利数学家 *P. Erdös* 和 *A. Szekeres* 发现的.

例 1.6 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$ 是 n^2+1 个不同实数序列,证明:至少可选出一组 $n+1$ 个数的子序列 $a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_{n+1}}$ 使得这个子序列为递增或递减.

证明 若原序列中有长为 $n+1$ 的递增子序列,则命题成立.故只须证明不存在长为 $n+1$ 的递增子序列,必存在长为 $n+1$ 的递减子序列.

从原序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$$

中的每一个 $a_i(i=1,2,\cdots,n^2+1)$ 向后选出若干个递增子序列,其中从 a_i 开始的递增序列的最大长度为 $m_i(i=1,2,\cdots,n^2+1)$.于是得到序列

$$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$$

由假设有 $1 \leqslant m_i \leqslant n, \quad i=1,2,\cdots,n^2+1$.

即有 n^2+1 个数取 n 个数值,依系 3,至少有一个 $l \in [n]$ 使得 $\lfloor \frac{n^2+1-1}{n} \rfloor + 1 = n+1$ 个 m_i 等于 l.设这 $n+1$ 个数为 $m_{k_1} = m_{k_2} = \cdots = m_{k_{n+1}} = l$,其中 $1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_{n+1} \leqslant n^2+1$,因

此对应的 $a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_{n+1}}$ 必然有

$$a_{k_1} \geqslant a_{k_2} \geqslant \cdots \geqslant a_{k_{n+1}}$$

否则,若有某 $a_{k_i} < a_{k_{i+1}}$,则可把 a_{k_i} 加到从 $a_{k_{i+1}}$ 开始的长为 l 的递增子序列的前面,构成了从 a_{k_i} 开始长度为 $l+1$ 的递增子序列,这与从 a_{k_i} 开始的递增子序列的最大长度是 l 矛盾.

这就证明了原序列中可选出 $n+1$ 个数的递减子序列

$$a_{k_1} \geqslant a_{k_2} \geqslant \cdots \geqslant a_{k_{n+1}}.$$

例 1.6 的一个有趣的提法是:若 n^2+1 个人并肩排成一行,则总能从他们中挑选出 $n+1$ 个并令他们向前走一步,这时他们的身高自左而右递增或递减.

§ 1.3 Ramsey 定理

Ramsey 定理是鸽笼原理的深刻而重要的推广. 它的一般形式比较复杂.

Ⅰ 完全图 k_n 的染色

给出 n 个相异点,无三点共线,任意两点恰有一条边相连构成的图称为完全图,记为 K_n. 可见,K_n 有 n 个顶点和 $\binom{n}{2}$ 条边. 给定完全图 K_n,给每条边染色,这样的图就是边染色的完全图.

若给 K_n 的边任意染红色和蓝色,考虑是否一定包含一个同色的多边形(如三角形、四边形等等).

K_3, K_4 不一定能够包含一个同色的三角形. K_5 也有同样的结论.

图 1.2　给 K_5 的边染色，但它不含同色的三角形．其中虚线表示红色，实线表示蓝色．

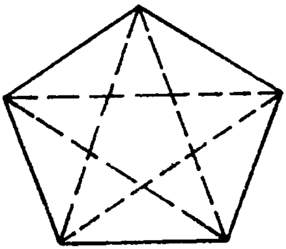


图 1.2　K_5

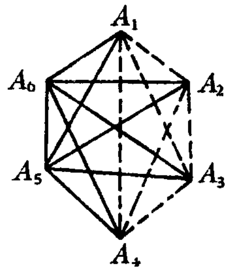


图 1.3　K_6

例 1.7　给 K_6 的边任意染红色或蓝色，证明：K_6 至少含有一个同色的三角形．

证明　如图 1.3，虚线表示红色，实数表示蓝色．任取一顶点记为 A_1，其余 5 个顶点与 A_1 的连线不是红色就是蓝色，由定理 1.2 的系 3，至少有 $\left\lfloor \frac{5-1}{2} \right\rfloor + 1 = 3$ 个顶点与 A_1 的连线同色，不妨设为红色，并记这三个顶点为 A_2, A_3, A_4．

$\triangle A_2A_3A_4$ 只能出现二种情形：

其一，$\triangle A_2A_3A_4$ 无一边是红色，则 $\triangle A_2A_3A_4$ 是同色（蓝色）三角形．

其二，$\triangle A_2A_3A_4$ 至少有一边是红色，比如 A_2A_3 是红边，则 $\triangle A_1A_2A_3$ 是同色（红色）三角形．

易见，对于 $n \geqslant 6$ 时，K_n 上述的结论显然成立．因而 6 是使任意染二种颜色的完全图 K_n 至少包含一个同色三角形的最小的顶点数．

类似地，对 K_{10} 的边染两种颜色（红色或蓝色），则在 K_{10} 中至