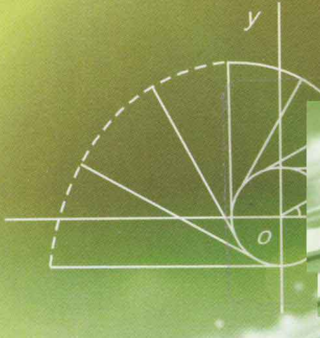
高等学校经典教材“三点”丛书

高等数学

（同济·第六版）上册

重点 难点 考点辅导与精析

主编 王香柯



西北工業大學出版社

高等学校经典教材“三点”丛书

高 等 数 学

（同济·第六版）上册

重点 难点 考点 辅导与精析

西北工業大學出版社

【内容简介】 本书是与同济大学数学系编写的《高等数学》(第六版)教材相配套的学习辅导书。全书分上、下两册。上册内容为函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程等7章;下册内容为空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等5章。每章均由重点及知识点辅导与精析、难点及典型例题辅导与精析、考点及考研真题辅导与精析、课后习题解答等4个部分组成,具有概念清晰、方法多样、综合性强等特点,可帮助读者掌握高等数学的知识要点,学会解题的技巧与一般规律,提高分析问题和解决问题的能力。

本书可作为高等学校本科生学习高等数学的辅导书,也可供从事高等数学教学的教师、报考硕士研究生或自学高等数学的广大读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学重点难点考点辅导与精析/王香柯主编. —西安:西北工业大学出版社,2011.1

(高等学校经典教材"三点"丛书)

ISBN 978-7-5612-2958-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第230488号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路127号 **邮编**:710072
电 话:(029)88493844 88491757
网 址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西向阳印务有限公司
开 本:727 mm×960 mm 1/16
印 张:52.875
字 数:906千字
版 次:2011年1月第1版 2011年1月第1次印刷
定 价:72.00元(本册:39.00元)

前　言

高等数学是高等学校理工科专业的一门重要的理论基础课程，同时也是全国硕士研究生入学考试的一门统考科目。为了帮助广大读者牢固掌握高等数学的精髓和解题技巧，提高解答各种题型的能力，我们根据多年的教学经验，依据我国工科类本科数学基础课程教学要求和最新全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲（高等数学部分），与国内高校广泛采用的由同济大学数学系编写的《高等数学》（第六版）教材配套，编写了《高等数学重点难点考点辅导与精析》（上、下册）。

本书结合教材按章同步编写，各章内容按 4 个部分展开，具有以下特点。

1. 重点及知识点辅导与精析

本部分指出各章的重点概念、重点理论和方法，帮助读者理顺各章核心知识和内容，使读者对各章重点一目了然。

2. 难点及典型例题辅导与精析

本部分就本章的学习难点及学生容易出错的知识点，选取具有代表性的典型例题，通过“分析”讲述解题思路的源头，给出详细的解题过程及解题技巧，部分题目列举了多种解法，并以“注”的形式，指出容易出错的知识点，归纳总结具有共性题目的解题方法。旨在引导读者思考问题、拓展思路，使读者思路畅达，所学知识融会贯通。

3. 考点及考研真题辅导与精析

本部分精选了近 5 年部分重点高校的高等数学课程考试和考研真题，这些题目反映了不同层次高等数学的教学

要求及考核水平。我们对这些题目进行分类、分析和讲解,帮助读者掌握本课程考试和考研的常见知识点和题型。

试题按先本科题后考研题的顺序编排。每道试题后面标注了试题的年份、学校或类型,如“2009 年武汉大学”表示该题是 2009 年武汉大学本科期末考试题,“2009 年数学一”表示该题目是 2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题。

4. 课后习题解答

教材中课后习题层次多、内容丰富、难易适度,比较准确地反映了学习高等数学课程应达到的水平。我们对课后习题给出解题过程或提示,难度较大的习题给出详细的解题步骤,帮助读者理解掌握每一知识点,有效地提高解题能力。

参加本书编写的教师均来自高等数学教学第一线,有着丰富的教学实践经验。上册第 1 章由高玉芬编写,第 2,3 章由姬兴民编写,第 4～6 章由雷敏茹编写,第 7 章由仝秋娟编写,全书由王香柯统稿并担任主编。

本书在编写过程中,参阅了大量的相关教材、教学参考书以及部分高校本科、考研试题,在此谨向各位作者及试题的命题人表示衷心的感谢。

限于水平,疏漏和不足之处在所难免,恳请广大读者批评指正。

编　者

2010 年 4 月

目　录

第 1 章

函数与极限

1.1 重点及知识点辅导与精析

1.1.1 函数

1. 定义

(1) 映射. 设 X,Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得对 X 中每个元素 x,按法则 f,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记做

$$f:X\to Y$$

其中,x 称为元素 y 的原像;y 称为元素 x 的像,并记做 $f(x)$,即 $y=f(x)$.

(2) 函数. 设数集 $D\subset R$,则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的函数,记为

$$y=f(x)\ ,\ x\in D$$

其中 x 称为自变量;y 称为因变量;D 称为定义域,记做 D_f,即 $D=D_f$.

(3) 反函数. 设函数 $f:D\to f(D)$ 是单射,则称它的逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$ 为函数 f 的反函数. 习惯上自变量、因变量分别用 x,y 表示,记做

$$y=f^{-1}(x)$$

2. 函数的特性

(1) 有界性. 设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义,若存在 $M>0$,当 $x\in D$ 时,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数;若不存在这样的 M,则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

(2) 单调性. 设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义,若对于任意的 $x_1,x_2\in D$,且

$x_1 < x_2$，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$（$f(x_1) > f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在 D 上是单调增（减）函数.

(3) 奇偶性. 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x \in D$，有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任一 $x \in D$，有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

(4) 周期性. 设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义，若存在 $l > 0$，使得对于任一 $x \in D$，有 $(x \pm l) \in D$，且 $f(x \pm l) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，称 l 为 $f(x)$ 的周期. 通常周期函数的周期是指最小正周期.

3. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u = g(x)$ 的定义域为 D_g，且其值域 $R_g \subset D_f$，则函数 $y = f[g(x)]$ 称为由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数. 它的定义域为 D_g，变量 u 称为中间变量.

4. 初等函数

(1) 基本初等函数.

幂函数：$y = x^\mu$ （$\mu \in \mathbf{R}$ 是常数）；

指数函数：$y = a^x$（$a > 0$ 且 $a \neq 1$）；

对数函数：$y = \log_a x$（$a > 0$ 且 $a \neq 1$）；

三角函数：如 $y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \tan x$ 等；

反三角函数：如 $y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，$y = \arctan x$ 等.

(2) 初等函数. 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

1.1.2 极限

1. 定义

(1) 数列的极限.

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \varepsilon$.

(2) 函数的极限.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

左极限：$f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$0<x_0-x<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

右极限：$f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$0<x-x_0<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

2. 性质

(1) 唯一性. 变量若存在极限，则极限唯一.

(2) 有界性. 有极限的变量必有界.

(3) 保号性.

如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且$a>0$(或$a<0$)，那么存在正整数$N>0$，当$n>N$时，就有$x_n>0$(或$x_n<0$).

如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且$A>0$(或$A<0$)，那么存在$x_0$的某去心邻域，当$x\in\mathring{U}(x_0)$时，就有$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

3. 无穷小与无穷大

(1)$\alpha(x)$为某一过程中的无穷小$\Leftrightarrow\lim\alpha(x)=0$；

$f(x)$为某一过程中的无穷大$\Leftrightarrow\lim f(x)=\infty$；

同一过程中无穷小与无穷大互倒(0除外).

(2) 无穷小的比较. 设α,β为同一过程中两个无穷小，且$\alpha\neq0$.

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记做$\beta=o(\alpha)$；

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小；

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq0,k>0$，则称$\beta$是关于$\alpha$的$k$阶无穷小；

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq0$，则称$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小；

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记做$\alpha\sim\beta$.

(3) 常用的等价无穷小. 当$x\to0$时，有

$$\sin x \sim x,\quad \tan x \sim x,\quad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2},\quad \ln(1+x) \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x,\quad \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n},\quad \arcsin x \sim x,\quad \arctan x \sim x$$

4. 极限的计算

(1) 运算法则. 若 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$, 则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$$

(2) 极限存在准则: 夹逼准则, 单调有界数列必有极限.

(3) 两个重要极限.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

(4) 利用无穷小计算极限. 利用等价无穷小代换; 有限个无穷小的和(或积) 仍为无穷小; 有界函数与无穷小的乘积为无穷小.

1.1.3 连续

1. 定义

$f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

左连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$;

右连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)\\ \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

2. 极限与连续

$f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在, 反之不然.

3. 间断点及其分类

(1) 间断点. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $f(x)$ 有下列3种情形之一：

1) 在 $x=x_0$ 无定义；

2) 在 $x=x_0$ 有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

3) 在 $x=x_0$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，或者称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的间断点.

(2) 间断点的分类. 若 x_0 为 $f(x)$ 的间断点，则有：

1) x_0 为第一类间断点 $\Leftrightarrow f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 均存在.

$$\text{第一类间断点}\begin{cases} x_0 \text{ 为可去间断点 } \Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+) \\ x_0 \text{ 为跳跃间断点 } \Leftrightarrow f(x_0^-)\neq f(x_0^+) \end{cases}$$

2) x_0 为第二类间断点 $\Leftrightarrow f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 中至少有一个不存在.

无穷间断点和振荡间断点均为第二类间断点.

4. 性质

(1) 运算性质.

有限个在某点连续的函数之和(或积)，仍在该点连续；

两个在某点连续的函数之商(分母不为零)，仍在该点连续.

(2) 反函数、复合函数、初等函数的连续性.

1) 若 $f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续，则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y \mid y=f(x), x\in I_x\}$ 上单调增加(或单调减少)且连续；

2) 若函数 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $g(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 $x=x_0$ 处也连续；

3) 基本初等函数在其定义域内都是连续的；

4) 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

(3) 闭区间上连续函数的性质.

最值定理：在闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值和最小值；

有界定理：在闭区间上连续的函数在该区间上一定有界；

零点定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则必有 $\xi\in(a,$

$b)$，使得 $f(\xi)=0$；

介值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意一个数 C，必有 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=C$.

1.2 难点及典型例题辅导与精析

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$； (2) $y=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}+\arcsin\frac{2x}{1+x}$.

解 (1) 由 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\geqslant 0$ 可推出

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}-x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

即
$$2k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{4}$$

故定义域为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right](k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

(2) $$\begin{cases}2x-x^2>0\\ \left|\frac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1,1+x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<2\\ -\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow 0<x\leqslant 1$$

故定义域为 $(0,1]$.

例 2 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求函数 $\varphi(x)$ 的定义域.

解 因为 $f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，所以 $[\varphi(x)]^2=\ln(1-x)$. 又 $\varphi(x)\geqslant 0$，得

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$$

故当 $\ln(1-x)\geqslant 0$，即 $x\leqslant 0$ 时，$\varphi(x)$ 有意义，因此 $\varphi(x)$ 的定义域为 $x\leqslant 0$.

例 3 设 $k>0$ 为常数，且 $f(x+k)=-f(x)$，证明 $f(x)$ 为周期函数，并求其周期.

证明 由 $f(x+k)=-f(x)$，可知

$$f[(x+k)+k]=-f(x+k)=-[-f(x)]=f(x)$$

即
$$f(x+2k)=f(x)$$

故 $f(x)$ 为周期函数，且其周期为 $2k$.

例 4 判定下列函数的奇偶性.

(1) $y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$; (2) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(3) $y=(e^{x+|x|}-1)\cdot\ln(1+|x|-x)$.

分析 由定义直接判定:偶函数 $\Leftrightarrow f(-x)=f(x)$,奇函数 $\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$.

解 (1) $$f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}=-\frac{2^x-1}{2^x+1}=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

(2) $$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=$$

$$-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

(3) $$y=(e^{x+|x|}-1)\ln(1+|x|-x)=$$

$$\begin{cases}(e^{x+x}-1)\ln(1+x-x),x\geqslant 0\\(e^{x-x}-1)\ln(1-x-x),x<0\end{cases}\Rightarrow y=0$$

所以 $f(x)$ 既是奇函数,又是偶函数.

例5 求 $f(x)=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$ 的反函数 $f^{-1}(x)$.

分析 通常求反函数的方法为:先由 $y=f(x)\Rightarrow x=f^{-1}(y)$,再对换变量 x,y 的位置,得反函数 $y=f^{-1}(x)$,其定义域为 $y=f(x)$ 的值域.若求分段函数的反函数,需分段求出反函数.

解 由

$$f(x)=(1+x^2)\operatorname{sgn}x \quad 及 \quad \operatorname{sgn}x=\begin{cases}1,x>0\\0,x=0\\-1,x<0\end{cases}$$

得 $$f(x)=\begin{cases}1+x^2,x>0\\0,x=0\\-(1+x^2),x<0\end{cases}$$

当 $f(x)=(1+x^2)(x>0)$ 时,其反函数为

$$x=\sqrt{y-1}\quad(y>1)$$

当 $f(x)=-(1+x^2)(x<0)$ 时,其反函数为

$$x=-\sqrt{-(y+1)}\quad(y<-1)$$

因此,所求反函数为

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}, x>1\\0, x=0\\-\sqrt{-(x+1)}, x<-1\end{cases}$$

例 6 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\leqslant 4\\e^x, x>4\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}1+x, x\leqslant 0\\\ln x, x>0\end{cases}$，求 $\varphi(f(x))$.

分析 分段函数的复合函数一般需分段进行讨论.

解 由于

$$\varphi(f(x))=\begin{cases}1+f(x), f(x)\leqslant 0\\\ln f(x), f(x)>0\end{cases} \quad 及 \quad f(x)=\begin{cases}x^2, x\leqslant 4\\e^x, x>4\end{cases}$$

因此有：

当 $x\leqslant 4, x\neq 0$ 时，$f(x)=x^2>0$，得 $\varphi(f(x))=\ln x^2$；

当 $x=0$ 时，$f(x)=x^2=0$，得 $\varphi(f(0))=1$；

当 $x>4$ 时，$f(x)=e^x>0$，得 $\varphi(f(x))=\ln e^x=x$.

所以

$$\varphi(f(x))=\begin{cases}\ln x^2, x\leqslant 4, x\neq 0\\1, x=0\\x, x>4\end{cases}$$

例 7 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{2n^2+n+9}=\dfrac{1}{2}$.

证明 $$\left|\frac{n^2+n}{2n^2+n+9}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{n-9}{4n^2+2n+18}\right|<\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n} \qquad (当 n\geqslant 9)$$

$\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{n^2+n}{2n^2+n+9}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，只需 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 因此，取

$$N=\max\left\{9,\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$$

则当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{n^2+n}{2n^2+n+9}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2+n+9}=\frac{1}{2}$$

注 通常当不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 求解困难时，可以将 $|x_n-a|$ 适当"放大"，以便于求出 N，但要求放大后的式子必须趋于 0（当 $n\to\infty$）.

例 8 用定义证明 $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$.

证明 $$|x^2-4|=|x-2|\,|x+2|$$

限制 $$|x-2|<1\Rightarrow 1<x<3$$
则有 $$|x^2-4|=|x-2||x+2|<5|x-2|$$

$\forall\varepsilon>0$,要使$|x^2-4|<\varepsilon$,只需$|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$,则取

$$\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{5}\}$$

当$|x-2|<\delta$时,恒有 $|x^2-4|<\varepsilon$,故$\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$.

注 根据$x\to 2$,限制自变量x在$|x-2|<1$的范围是可行的,当然也可以限制为$|x-2|<\dfrac{1}{3}$等.由此适当地放大$|x^2-4|$,以避免求解繁琐的不等式过程,能方便找到δ.

例 9 证明极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{x}{|x|}\right)$存在,并求此极限值.

分析 当$x\to 0$时,因函数中含有$e^{\frac{1}{x}}$和$|x|$这样的表达式,故求此函数的极限应分别求出其左、右极限.再由极限存在的充要条件——左、右极限存在且相等,得出结论.

证明 因为

$$\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x}=-1$$

所以 $$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{x}{|x|}\right)=2-1=1$$

又因为

$$\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=1$$

所以

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{x}{|x|}\right)=0+1=1$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{x}{|x|}\right)$存在,极限值为1.

例 10 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}$.

分析 函数为$\dfrac{0}{0}$型未定式,先分子有理化,然后约去公因式.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(3-x)-(1+x)}{(x-1)(x+2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=$

$$\lim_{x\to1}\frac{-2}{(x+2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{\sqrt{2}}{6}$$

例 11 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times5}+\dfrac{1}{2\times6}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+4)}\right]$.

分析 先拆项求和，再求极限.

解 因为 $\dfrac{1}{n(n+4)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+4}\right)$，所以

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{25}{48}$$

例 12 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\tan 3x$.

分析 先作变量代换 $t=\dfrac{\pi}{6}-x$，再利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

解 令 $t=\dfrac{\pi}{6}-x$，得

$$\text{原式}=\lim_{t\to0}\sin t\cdot\cot 3t=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{3t}{\sin 3t}\cdot\frac{\cos 3t}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

例 13 求 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/\sin^2 x}$.

分析 函数为 1^∞ 型未定式，可考虑化为重要极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 形式求极限.

解 **方法一**

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{1/\sin^2 x}=\lim_{x\to0}(\cos^2 x)^{1/2\sin^2 x}=$$

$$\lim_{x\to0}\left[(1-\sin^2 x)^{-1/\sin^2 x}\right]^{-\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

方法二

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{1/\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}}=$$

$$\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$