学会解题

XUE HUI JIE TI

中学数学解题思想方法技巧

ZHONGXUESHUXUEJIETISIXIANGFANGFAJIQIAO

初中

主编 马小为

陕西师范大学出版社
陕西师范大学中学数学教学参考杂志社

学会解题

中学数学解题思想方法技巧

ZHONGXUESHUXUEJIETI
SIXIANGFANGFAJIQIAO

初中

主　　编：马小为

副 主 编：石生民　段养民

特约主编：张卫明

特约副主编：罗全民　陈　锋　王尧兴

编　　者：张卫明　薛文庄　罗全民　李正义　庞彦福　阚延宇　王　晨　张应朝
杨秀庆　陈世周　张　宇　刘立红　赵云飞　王国宏　孙学东　邹守文
徐伟建　许生友　陈秀春　付长有　王竞进　潘纯平　陈　冬　段春炳
陈开龙　贾保柱　[illegible]　余献虎　张宏政
柯厚宝　汤文卿　[illegible]　王云峰　夏建平
倪先德　王同启　[illegible]　刘玉波　张　锋
杨家林　任建法　武九保　刘　鑫

审 稿 者：陈　锋　薛　莺　张向红　冯　英　朱　亮　韩旭东　洪昌林　汪莲开
熊　波　邢成云　蔡世英　孙琪斌　韩永华　张启成　祁　斌　张大华
陈开金　邵潇野　刘金波　苏建强　曾庆丰　张　淼　李　印　吕小保
顾广林　闵耀明

陕西师范大学出版社
陕西师范大学中学数学教学参考杂志社

前言 QIANYAN

数学学习的过程少不了解题环节，其目的就是提高解题能力，但是并不是所有的同学通过解题做题都能提升自己的解题能力，有的时间花了不少，收效却甚微，究其原因，方法不对，基础不牢，对数学解题思想方法技巧的理解掌握运用不够灵活。要提高解题能力必须注意下面四点：

1 加强对典型题目的研究

这里所说的典型题目是指在解法上具有代表性、典型性，应用广泛的范例，学后真正能达到举一反三、触类旁通的效果。许多同学在学习的过程中只注重了对陌生题的研究，而忽略了对具有通性通法的典型题目的探究与思考，这种做法其实是本末倒置。典型题目是提高解题能力的“源”和“本”，积累多了，提高能力就有了坚实的基础。需要注意的是，对典型题目的探究，重点应放在分析思路、探究演变上，而不要去死记一个题目的结论、答案。

2 注意联想能力的培养

联想在解题中起着重要的作用。所谓解题其实就是根据题意展开联想，从自己的大脑知识仓库中找出与题目接近或很相似的原理、方法或结论，变通使用这些知识，使问题得以解决。

3 掌握常用的数学思想方法

数学反映在解题技巧上的思想和方法有配方法、换元法、判别式法、消元法、待定系数法、反证法等等，比它们更具普遍意义的思想和方法还有转化与化归思想、数形结合思想、归纳猜想、分类讨论、函数与方程思想等等。在学习的过程中要养成对常用的数学思想和方法进行归纳总结的习惯，强化应用这些思想方法的意识。

4 沿着“看—学—熟—变”的阶梯去攀登

解题能力的提高，要经历一个“看－学－熟－变”的渐变过程，我们应该不断提高对自己的要求，使自己的解题水平提升到更高的层面。同样做一道题，花5分钟和10分钟解出，水平显然不在一个层面上。所以我们要在探究典型题目的过程中学会学以致用，在会解题的基础上，还要问一问自己是否熟练了，还能不能用此规律方法解决其他问题。只要注意总结规律，就一定能从解题中学会解题，使自己的解题能力得到较大的提高。

目　录

第一部分　数学思想篇

第二部分　数学方法篇

第三部分　数学技巧篇

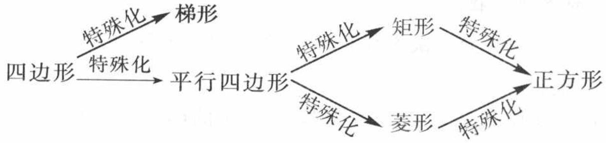
第一部分 数学思想篇

SHUXUESIXIANGPIAN

一、特殊与一般思想

从特殊到一般，再由一般到特殊，这是认识的一个基本规律，这一规律在数学的认识活动中有着重要的应用. 事物的一般性（普遍性）存在于事物的特殊性中，因此，可以从特殊性去探索一般性. 另一方面，事物的一般性又包含着事物的特殊性，因此，从事物的一般性中又可以认识事物的特殊性. 向前推进的是人们认识事物的自然趋向，数学知识的发展和命题的形成无一不是一个前进的过程. 但是，这种趋势和进程又是不平坦的，有时要以退为进，有时要先进后退，恰当运用进退互化正是辩证思维的一条重要策略. 具体到一个数学问题，如果直接解决有困难，就应该转而考虑一个更特殊的问题，或一个更一般的问题. 一般来说，发现新结论更多用“进”，而寻找解题思路更多用“退”.

数学学习就是要培养学生发现问题、提出问题以及解决问题的能力. 发现问题、提出问题、解决问题需要一定的方法，而特殊化与一般化正是问题解决的重要策略.



对于在一般情况下难以求解的问题，可运用特殊化思想，通过取特殊值、特殊图形等，找到解题的规律和方法，进而推广到一般情况，从而使问题顺利求解. 特殊化就是从特殊推测一般，特殊化方法叫做“退法”，就是从“一般”退到“特殊”，一般化方法叫做“进法”.

第1讲 用字母表示数

思想精髓

《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》明确指出：“要发展学生的符号感，符号感主要表现在：能从具体情境中抽象出数量关系和变化规律，并用符号来表示；理解符号所代表的数量关系和变化规律；会进行符号间的转换；能选择适当的程序和方法解决用符号所表达的问题.”用字母表示数是代数的基本特征，它可以把数或数量关系简明地表示出来，也可以使一些复杂的运算变得比较简便. 它是初中数学从具体数字到抽象符号的一次质的飞跃，是发展符号意识，进行量化刻画的基础，也是从常量研究过渡到变量研究的基础. 从“用字母表示数”到用字母表示未知元、表示待定系数、表示函数 $y=f(x)$、表示字母变换等，是一整套的代数方法. 列方程、解方程、解不等式、待定系数法、根与系数的关系等，都是用字母表示数的思想的推广和体现.

在运用本讲知识解决问题时应注意以下几点：

1. 字母可以表示任意的数；

2. 用字母表示实际问题中的某一数量时，必须说明字母的取值范围；

3. 在同一问题中，不同的数量要用不同的字母来表示.

应用示范

例 1 一组按规律排列的式子：$-\frac{b}{a}$，$\frac{b^3}{a^2}$，$-\frac{b^5}{a^3}$，$\frac{b^7}{a^4}$，…（$ab\neq0$），其中第 7 个式子是________，第 n 个式子是________（n 为正整数）.

绿色通道

$-\frac{b^{13}}{a^7}$，$(-1)^n\cdot\frac{b^{2n-1}}{a^n}$. 观察给出的一列数，发现其分母 a 的指数分别是 1，2，3，4，…，与这列数的项的序号相同，故第 7 个式子的分母是 a^7，第 n 个式子的分母是 a^n；其分子 b 的指数分别是 1，3，5，7，…，即第 1 个数是 $2\times1-1=1$，第 2 个数是 $2\times2-1=3$，第 3 个数是 $2\times3-1=5$，第 4 个数是 $2\times4-1=7$，…，每个数都比项数的 2 倍少 1，故第 7 个式子的分子是 $b^{2\times7-1}=b^{13}$，第 n 个式子的分子是 b^{2n-1}.

红色警示

这列式子每一项的符号是有规律的，其规律是奇数项为负，偶数项为正，故第 7 个式子的符号为负，第 n 个式子的符号为 $(-1)^n$. 若将第 2 个空写成 $\pm\frac{b^{2n-1}}{a^n}$，便分不清每一项为正还是为负了. 本题的设置，充分的体现了由“特殊”到“一般”的思维过程.

例 2 （2008 年北京）已知：关于 x 的一元二次方程 $mx^2-(3m+2)x+2m+2=0(m>0)$.

(1)求证：方程有两个不相等的实数根；

(2)设方程的两个实数根分别为 x_1，x_2（其中 $x_1<x_2$）. 若 y 是关于 m 的函数，且 $y=x_2-2x_1$，求这个函数的解析式；

(3)在(2)的条件下，结合函数的图象回答：当自变量 m 的取值范围满足什么条件时，$y\leqslant2m$？

绿色通道

(1)∵ $mx^2-(3m+2)x+2m+2=0$ 是关于 x 的一元二次方程，

∴ $\Delta=[-(3m+2)]^2-4m(2m+2)=m^2+4m+4=(m+2)^2$.

∵ 当 $m>0$ 时，$(m+2)^2>0$，即 $\Delta>0$.

∴ 方程有两个不相等的实数根.

(2)由求根公式，得 $x=\frac{(3m+2)\pm(m+2)}{2m}$，∴ $x=\frac{2m+2}{m}$ 或 $x=1$.

∵ $m>0$，∴ $\frac{2m+2}{m}=\frac{2(m+1)}{m}>1$.

∵ $x_1<x_2$，∴ $x_1=1$，$x_2=\frac{2m+2}{m}$. ∴ $y=x_2-2x_1=\frac{2m+2}{m}-2\times1=\frac{2}{m}$，

即 $y=\frac{2}{m}(m>0)$ 为所求函数的解析式.

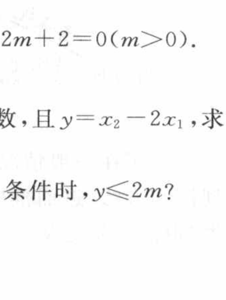


图 1-1-1

(3)在同一平面直角坐标系中分别画出 $y=\frac{2}{m}(m>0)$ 与 $y=2m(m>0)$ 的图象（如图 1-1-1）.

由图象可得，当 $m\geqslant1$ 时，$y\leqslant2m$.

红色警示

本题是一道以方程知识为载体的代数综合题，解答时容易出现如下错误：(1)证明的思路不明确，直接用$\Delta>0$来说明$\Delta>0$，判别式的计算错误；(2)求出$x=\frac{(3m+2)\pm(m+2)}{2m}$不能化简，用求根公式时出错；(3)求出两根后，没有区分大小；(4)第(3)问不会用图象解决问题.

挑战思维

图 1-1-2

1. (2008年福州)实数a、b在数轴上的位置如图1-1-2所示，下列各式正确的是(　　)

A. $a>0$　　　　B. $b<0$

C. $a>b$　　　　D. $a<b$

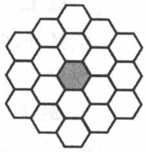


图 1-1-3

2.(2008年山西)如图1-1-3所示的图案是由正六边形密铺而成，黑色正六边形周围的第一层有六个白色正六边形，则第n层有________个白色正六边形.

3.(2008年济南)数学的美无处不在，数学家们研究发现，弹拨琴弦发出声音的音调高低，取决于弦的长度，绷得一样紧的几根弦，如果长度的比能够表示成整数的比，发出的声音就比较和谐. 例如，三根琴弦长度之比是15∶12∶10，把它们绷得一样紧，用同样的力弹拨，它们将分别发出很调和的乐声“do、mi、so”. 研究15、12、10这三个数的倒数发现：$\frac{1}{12}-\frac{1}{15}=\frac{1}{10}-\frac{1}{12}$. 我们称15、12、10这三个数为一组调和数，现有一组调和数：x、5、3($x>5$)，则x的值是________.

答案连接

1. D　提示：在数轴上，从左到右所表示的数依次增大，所以$a<0$，$b>0$，$a<b$，故选D.

2. $6n$　提示：寻找数字规律，可以发现：第1层6个，第2层12个，$12=2\times6$，第3层$3\times6=18$个，则第n层为$6n$个.

3. 15　提示：由15、12、10的倒数间的规律可得x、5、3的倒数间满足$\frac{1}{5}-\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$，解得$x=15$. 经检验知$x=15$是原方程的根.

第2讲　特殊值的应用

思想精髓

特殊能在一定范围内反映或体现一般，在数学问题的解决中，也往往是先分析特殊情形，再归纳出一般情况，即根据题目中的条件，选取某个符合条件的特殊值或作出特殊图形进行计算、推理的方法. 这类问题通常具有一个共性：题目中给出一些一般性的条件，而要求出某些特定的结论或数值. 在解决时可将问题提供的条件特殊化，使之成为具有特殊性的问题，而这些特殊问题的答案往往就是原题的答案.

在运用特殊值解决问题时要注意以下几点：

1. 题目的答案必须是唯一确定的；
2. 特殊值的选取必须符合题设条件；
3. 特殊值的选取应尽可能简单，以便运算和比较；
4. 当题目中含有多个字母时，各字母间也可取特殊的倍数关系以助求解.

应用示范

例 1　(2008 年长沙)二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 1-1-4 所示，则下列关系式不正确的是(　　)

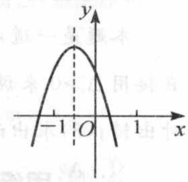


图 1-1-4

A. $a<0$　　　　B. $abc>0$

C. $a+b+c>0$　　　　D. $b^2-4ac>0$

绿色通道

由图象可以看出抛物线与 x 轴的交点位于 y 轴的两侧，且右侧交点在 $0\sim1$ 之间，$x=1$ 时，图象在 x 轴的下侧，所以当 $x=1$ 时，$y<0$，即 $a\times1^2+b\times1+c=a+b+c<0$，故 C 错误.

红色警示

观察并理解二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象中 y 与 x 的关系，是本题能够用特殊值解决的关键. 在其他场合下当然也可用其他方法去解.

例 2　已知 a,b,c 是正实数，且方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 与 $x^2+2cx-b^2=0$ 有一个非零的公共根，则 a,b,c 满足的关系式是(　　)

A. $a^2+b^2=c^2$　　B. $a^2+c^2=b^2$　　C. $b^2+c^2=a^2$　　D. $a^2+b^2+c^2=0$

绿色通道

取特殊值构造两个方程：

方程①：$(x+1)(x+2)=0$，即 $x^2+3x+2=0$，从而 $a=\frac{3}{2}$，$b^2=2$.

方程②：$(x-1)(x+2)=0$，即 $x^2+x-2=0$，从而 $c=\frac{1}{2}$.

于是 $b^2+c^2=2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=a^2$. 故选 C.

红色警示

本题若考虑运用一元二次方程的求根公式分别表示出两根，再对两根是否相等进行讨论、变形，解题过程将十分烦琐.

挑战思维

1. 如图 1-1-5，分别以等腰直角三角板的直角边、斜边为旋转轴旋转，所形成的旋转体的全面积依次记为 S_1、S_2，则 S_1 与 S_2 的大小关系为(　　)

A. $S_1>S_2$　　B. $S_1<S_2$　　C. $S_1=S_2$　　D. 无法确定

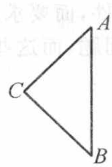


图 1-1-5

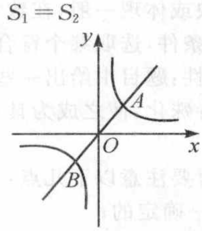


图 1-1-6

2. 如图 1-1-6，直线 $y=kx(k>0)$ 与双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 交于 A、B 两点，且 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，则

$2x_2y_1-7x_1y_2$ 的值为________.

3. 若 a、b 是两个不同的正数，记 $A=\frac{a+b}{2}$，$B=\sqrt{ab}$，$C=\frac{2ab}{a+b}$，$D=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，则其中最大的是________.

答案连接

1. A　提示：取等腰 Rt$\triangle ABC$ 的三边分别为 $1,1,\sqrt{2}$，则以 AC 为旋转轴，所得旋转体为圆锥，其全面积 $S_1=\pi\cdot BC^2+\pi\cdot BC\cdot AB=(1+\sqrt{2})\pi$；以 AB 为旋转轴，得到如图 1-1-7 所示的两个同底圆锥，则全面积为 $S_2=2\pi\left(\frac{CD}{2}\right)\cdot AC=\sqrt{2}\pi$，所以 $S_1>S_2$.

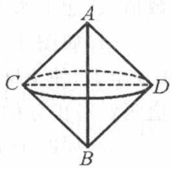


图 1-1-7

2. 20　提示：取 $k=1$，可求得 $A(2,2)$，$B(-2,-2)$，进而求得 $2x_2y_1-7x_1y_2=20$. 其实，k 取正数范围内的任意数，求出的值都为 20.

3. D　提示：取 $a=2b$，则 $A=\frac{3}{2}b$，$B=\sqrt{2}b$，$C=\frac{4}{3}b$，$D=\frac{\sqrt{10}}{2}b$. 因为 b 为正数，故 D 最大.

第 3 讲　特殊图形的应用

思想精髓

在解决几何问题的过程中，对于图形中的线(包括直线、射线或线段)或角，在一般的位置关系下，往往不易发现它们之间的联系，从而可能导致探究的思路受阻. 若把所给的图形特殊化，即通过取特殊点、特殊角或特殊的几何图形等，就容易发现待求问题与已知条件之间的联系，从而使问题轻松获解.

在构造特殊图形时，一般从以下几方面来考虑：

1. 线段上的特殊点一般选线段的中点或端点，圆上的特殊点一般选弧的中点或端点；
2. 特殊角一般选取 30°、45°、60°、90°的角，也可选已知角的半角、等角或倍角；
3. 线与线的位置关系可特殊化为平行、垂直或重合；
4. 任意三角形可特殊化为直角三角形、等腰三角形、等边三角形，任意四边形可特殊化为平行四边形、矩形、正方形等.

在应用特殊图形解决问题时，一定要注意特殊图形的选取要符合题设条件，且问题的答案必须是唯一确定的，否则就会导致错误结论的产生.

例 1　如图 1-1-8，E 是边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上一点，且 $BE=BC$，P 为 CE 上任意一点，$PQ\perp BC$，垂足为 Q，$PR\perp BE$，垂足为 R，则 $PQ+PR$ 的值是(　　)

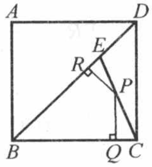


图 1-1-8

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

绿色通道

当取点 P 与 E 重合时 $PQ+PR$ 的值为 $BE\cdot\sin\angle DBC=BC\cdot\sin 45°=1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

红色警示

点 P 为线段 CE(包括两个端点)上任意一点,其中包括 P 为 CE 的中点,计算都不是最简,只有当点 P 与端点 E 或 C 重合时才易于计算.

例 2 数学兴趣小组的同学在探究锐角三角函数值时发现,除了能求一些特殊角的三角函数值,还能求像 15°、22.5°、36°等角的三角函数值.下面是两位同学探究 15°角、36°角时用到的图形.

(1)如图 1-1-9(1),在$\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,$\angle ABC=30°$,延长 CB 至 D,使 $BD=BA$,连结 AD,则$\angle D=15°$.你能求出 15°角的正切值吗?写出你的求解过程.

(2)如图 1-1-9(2),顶角为 36°的等腰三角形是一种特殊的三角形,若作$\angle PMN$的平分线,则$\triangle MNQ$与$\triangle PMN$就相似了.你能通过构造直角三角形来求出 36°角的余弦值吗?写出你的求解过程.你还能求出 18°角的正弦值吗?请写出求解过程.

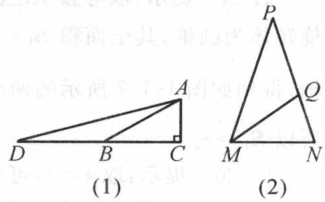


图 1-1-9

绿色通道

(1)在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ABC=30°$,设 $AC=1$,则 $AB=2$,$BC=\sqrt{3}$.

$\because BD=BA$,$\therefore \angle D=\frac{1}{2}\angle ABC=15°$.

在 Rt$\triangle ACD$ 中,$CD=BC+BD=\sqrt{3}+2$,

$\therefore \tan D=\tan 15°=\frac{AC}{CD}=\frac{1}{\sqrt{3}+2}=2-\sqrt{3}$.

(2)设 $MN=x$,令 $PM=1$,则 $MQ=PQ=MN=x$,$NQ=1-x$.

$\because \triangle MNQ\backsim\triangle PMN$,$\therefore \frac{MN}{PM}=\frac{NQ}{MN}$,即$\frac{x}{1}=\frac{1-x}{x}$,化简得 $x^2+x-1=0$,

解得 $x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,$x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$(舍去).

$\therefore NQ=1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

如图 1-1-10,过 M 作 $MR\perp PN$,垂足为 R,则 $QR=\frac{1}{2}NQ=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$,

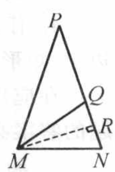


图 1-1-10

$PR=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

$\therefore \cos P=\cos 36°=\frac{PR}{PM}=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{1}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

由等腰三角形知识可知,$\angle NMR=\frac{1}{2}\angle NMQ=\frac{1}{2}\times 36°=18°$.

在 Rt$\triangle MNR$ 中,$MN=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,$NR=QR=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$.

$\therefore \sin\angle NMR=\sin 18°=\frac{NR}{MN}=\frac{\frac{3-\sqrt{5}}{4}}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

红色警示

求非特殊角的三角函数，一要将这些角转化为直角三角形中的角；二要借助特殊三角形先求出该直角三角形相应的边，进而应用锐角三角函数求出所需要的值. 第(1)问中，设 AC 为其他数或字母不影响其结果，第(2)问不设 PM 为 1 也不影响结果的值，但要注意运算的简便性.

挑战思维

1. $\triangle ABC$ 中，a、b、c 分别为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边，若$\angle B=60°$，则$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{c+b}$的值为(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

2. (2007 年乐山)如图 1-1-11，MN 是$\odot O$ 的直径，$MN=2$，点 A 在$\odot O$ 上，$\angle AMN=30°$，B 为弧 AN 的中点，P 是直径 MN 上一动点，则 $PA+PB$ 的最小值为(　　)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

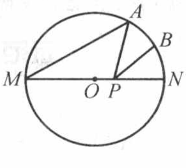


图 1-1-11

3. 两个圆都以点 O 为圆心，大圆的半径为 1，小圆的半径为$\frac{4}{5}$，在大圆上任取三点 A、B、C，使$\angle ACB=30°$，则直线 AB 与小圆的位置关系为________.

答案连接

1. C　提示：将$\triangle ABC$ 特殊化为正三角形，则 $a=b=c$，$\therefore \frac{c}{a+b}+\frac{a}{c+b}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

2. B　提示：如图 1-1-12，作 A 关于 MN 的对称点 A'. 连结 $A'B$ 交 MN 于 P，则 $A'B$ 就是 $PA+PB$ 的最小值. 易证$\angle A'OB=90°$. 又 $OA'=OB=1$，$\therefore A'B=\sqrt{2}$.

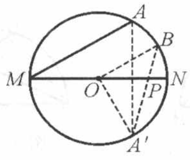


图 1-1-12

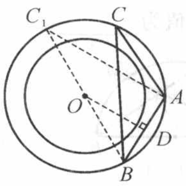


图 1-1-13

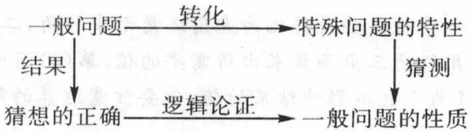
3. 相离　提示：不妨求当 BC(图 1-1-13 中 BC_1)为大圆直径这一特殊情况时，直线 AB 与小圆的位置关系. 易知$\angle AC_1B=\angle ACB=30°$，作 $OD\perp AB$，垂足为 D，可得 $OD=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{75}}{10}$，$\frac{4}{5}=\frac{8}{10}=\frac{\sqrt{64}}{10}$，$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{4}{5}$. $\therefore$ 直线 AB 与小圆相离.

第 4 讲　用特殊化方法探求定值

思想精髓

特殊化方法是对于一个待解的一般问题，首先从特殊情况入手，以求得问题的部分解决，然后建

立一般情况与特殊情况的某种联系，把一般情况转化为特殊情况加以解决的解题思想. 特殊化方法的一般模式是：



有许多数学问题，由于抽象、概括程度较高，直接发现或论证这些性质往往感到困难. 这时，可以先试探它的特殊、局部情况的特性，从中发现规律与解答方法. 在某些几何图形中，有些点或线的位置是在不断变化的，在这个变化过程中，却有一些位置关系或数量关系（如线段的长度、角的大小、弧的大小、线段的比等）始终保持不变，这就是几何定值的问题. 在探求几何定值的问题时，多用特殊化方法，特殊到最容易看清楚的地方，认透了，钻深了，然后再一般化，这是解决难题的一个诀窍. 特殊化的作用是解题的突破口，寻找解题思路的策略，完成解题的方法.

应用示范

例 1 一次函数 $y=ax+b$，若 $a+b=1$，则它的图象必经过点（　　）

A.（-1，-1）　B.（-1，1）　C.（1，-1）　D.（1，1）

绿色通道

因为已知条件中有 $a+b=1$，故考虑令 $x=1$，便得到 $y=a+b=1$. 也就是说，不论 a、b 为何值，这个一次函数图象都过点(1,1). 故选 D.

红色警示

对 $y=ax+b$ 特殊化，给 x 取值时，要考虑 $a+b=1$ 这一特殊条件，否则就会使问题复杂化.

例 2 如图 1-1-14，在直径为 6 的半圆 AB 上有两动点 M、N，弦 AM、BN 相交于点 P，则 $AP \cdot AM + BP \cdot BN$ 的值为________.

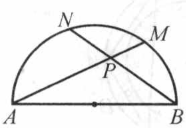


图 1-1-14

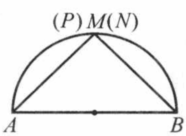


图 1-1-15

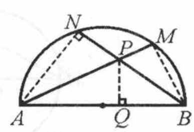


图 1-1-16

绿色通道

如图 1-1-15，取$\overset{\frown}{AB}$的中点 M，使 N 与 M 重合，则弦 AM、BN 的交点 P 也即点 M，因此得 $AP \cdot AM + BP \cdot BN = AM^2 + BM^2 = AB^2 = 6^2 = 36$.

如图 1-1-16，从一般性出发证明，可过点 P 作 $PQ \perp AB$，垂足为 Q，则由相似三角形知识可证得 $AP \cdot AM = AQ \cdot AB$.

同理可得 $BP \cdot BN = BQ \cdot BA$.

$\therefore AP \cdot AM + BP \cdot BN = AQ \cdot AB + BQ \cdot BA = AB^2 = 36$.

红色警示

通过连结 AN、BM 也能得出结果，但过程较复杂. 如果只取$\overset{\frown}{AB}$的中点情况，而不以一般性出发去证明，则显得不全面.