

机械优化 设计及应用

JIXIE YOUHUA SHEJI JI YINGYONG JIXIE YOUHUA SHEJI JI YINGYONG



◎ 樊军庆 主编

 **机械工业出版社**
CHINA MACHINE PRESS

机械优化设计及应用

主 编 樊军庆
副主编 马庆芬 张宝珍



机械工业出版社

本书内容主要分为三大部分：第一部分是优化设计的基本概念及数学基础；第二部分是具体的优化设计方法，包括一维搜索方法、无约束优化方法、线性规划、约束优化方法等；第三部分是著名的优化软件 LINGO 的介绍。

本书从应用实际出发，注重理论教学与实际应用相结合。因此通过本书的学习，不仅能使设计者掌握优化设计理论，而且可以使设计者很容易地将该理论应用到实践中。

本书可作为高等工科院校机械设计类专业的本科生、研究生教材，也可供有关专业的学生、教师及工程技术人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

机械优化设计及应用/樊军庆主编. —北京:机械工业出版社, 2011.4
ISBN 978-7-111-33753-9

I. ①机… II. ①樊… III. ①机械设计: 最优设计 IV. ①TH122

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 042552 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号, 邮政编码100037)
策划编辑: 黄丽梅 责任编辑: 黄丽梅 版式设计: 张世琴
责任校对: 刘志文 封面设计: 赵颖喆 责任印制: 杨 曦
北京圣夫亚美印刷有限公司印刷
2011年6月第1版第1次印刷
169mm × 239mm · 17.5印张 · 337千字
0001—3000册
标准书号: ISBN 978-7-111-33753-9
定价: 38.00元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

社服务中心 : (010)88361066

销售一部 : (010)68326294

销售二部 : (010)88379649

读者购书热线: (010)88379203

策划编辑: (010)88379770

网络服务

门户网: <http://www.cmpbook.com>

教材网: <http://www.cmpedu.com>

封面无防伪标均为盗版

前 言

机械优化设计是 20 世纪 60 年代迅速发展起来的一种新的设计方法。它应用近代数学规划理论和电子计算机，能使一项设计在一定的技术和物质条件下寻求一个技术经济指标最佳的设计方案。它使传统的机械设计方法产生重大的变革，促进现代机械设计理论和方法的发展，获得日益显著的技术和经济效益。

机械优化设计是机械设计类专业的一门必修课程，其目的是使设计者树立优化设计的思想，掌握优化设计的基本概念和基本方法，获得解决机械优化设计问题的初步能力。本书作者在高校中长期从事机械优化设计教学工作，感觉现在的教材普遍以机械优化设计的理论教学为主，很多学生学完后不会应用，感觉是一头雾水。本书从应用实际出发，在理论教学的基础上，又介绍了著名的优化软件 LINGO，因此通过本书的学习，不仅能使设计者掌握优化设计理论，而且可以很容易地将该理论应用到实践中。

全书分为三大部分：第一部分是优化设计的基本概念及数学基础；第二部分是具体的优化设计方法，包括一维搜索方法、无约束优化方法、线性规划、约束优化方法等；第三部分是著名的优化软件 LINGO 的介绍。本书内容的选择贯彻“少而精”和“理论联系实际”的原则。内容的编排由浅入深，注意逻辑性与系统性，强调物理概念及几何解释，便于工程应用。

本书由海南大学樊军庆教授任主编并统稿，海南大学马庆芬博士、张宝珍副教授任副主编。参加本书编写的全部作者为云南大学赵越副教授（绪论、第 2 章），海南大学樊军庆教授（第 1、3、4 章），马庆芬博士（第 5、6 章），天津科技大学呼英俊副教授（第 7 章），海南大学张宝珍副教授（第 8 章）。

本书由内蒙古农业大学教授杨晓清博士任主审，参加审稿的还有大连理工大学刘培启博士、河北科技大学蒋静智博士，审稿人对本书提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢！

由于编者水平有限，书中难免有疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

作 者

目 录

前言	
绪论	1
0.1 什么是机械优化设计	1
0.2 传统设计与优化设计	2
0.3 机械优化设计的特点	4
0.4 优化设计在机械设计中的作用	4
0.5 机械优化设计的发展概况	5
0.6 本课程的主要内容	7
第1章 机械优化设计概述	8
1.1 工程中的机械优化设计问题	8
1.2 机械优化设计中的数学模型	10
1.3 优化设计问题的基本解法	19
思考题	22
第2章 极值理论简介	23
2.1 多元函数的方向导数与梯度	23
2.2 多元函数的泰勒展开式	27
2.3 无约束优化问题的极值条件	30
2.4 函数的凸性	33
2.5 等式约束优化问题的极值条件	36
2.6 不等式约束优化问题的极值条件	40
思考题	50
第3章 一维搜索方法	52
3.1 概述	52
3.2 搜索区间的确定与区间消去法原理	53
3.3 一维搜索的试探方法	55
3.4 一维搜索的插值方法	58
思考题	65
第4章 无约束优化方法	66
4.1 概述	66
4.2 最速下降法	68
4.3 牛顿型方法	72
4.4 共轭方向及共轭方向法	75
4.5 共轭梯度法	80
4.6 变尺度法	84
4.7 鲍威尔法	93
4.8 坐标轮换法	100
4.9 单形替换法	102
思考题	107
第5章 线性规划	108
5.1 线性规划的数学模型	108
5.2 线性规划的基本原理	112
5.3 单纯形法	116
5.4 修正单纯形法	130
思考题	140
第6章 约束优化方法	142
6.1 概述	142
6.2 随机方向法	145
6.3 复合形法	149
6.4 可行方向法	155
6.5 惩罚函数法	165
6.6 二次规划法	173
思考题	174
第7章 多目标及离散变量优化方法简介	177
7.1 多目标优化问题	177
7.2 多目标优化方法	180
7.3 离散变量优化问题	186
7.4 离散变量优化方法	187
第8章 LINGO 优化软件包	201
8.1 LINGO 快速入门	201
8.2 LINGO 中的集	203
8.3 模型的数据部分和初始部分	208
8.4 LINGO 函数	212
8.5 LINGO WINDOWS 命令	229
8.6 LINGO 的命令行命令	246
8.7 综合举例	251
参考文献	273

绪 论

优化设计 (Optimal Design) 是一门新学科, 是从 20 世纪 60 年代初期开始, 最优化技术和计算技术在设计领域中应用的结果。优化设计为工程设计提供了一种重要的科学设计方法, 使得在解决复杂设计问题时, 能从众多的设计方案中寻到尽可能完善的或最适宜的设计方案。因而采用这种设计方法能大大提高设计效率和设计质量。

在设计过程中, 常常需要根据产品的设计要求, 合理确定各种参数, 例如重量、成本、性能、承载能力等, 以期达到最佳的设计目标。这就是说, 一项工程设计总是要求在一定的技术和物质条件下, 取得一个技术经济指标为最佳的设计方案。优化设计就是在这样一种思想指导下产生和发展起来的。

目前优化设计方法在结构设计、化工系统设计、电气传动设计、制造工艺设计等方面都有广泛的应用, 而且取得了不少成果。在机械设计中, 对于机构、零件、部件、工艺设备等的基本参数, 以及一个分系统的设计, 也有许多运用优化设计方法取得了良好的经济效果的实例。实践证明, 在机械设计中采用优化设计方法, 不仅可以减轻机械设备自重, 降低材料消耗与制造成本, 而且可以提高产品的质量与工作性能。因此, 优化设计已成为现代机械设计理论和方法中的一个重要领域, 并且越来越受到从事机械设计的科学工作者和工程技术人员的重视。

优化方法包括解析方法和数值计算方法两种。利用微分学和变分学的解析方法, 已经有几百年的历史了, 这种经典的优化方法, 只能解决小型的和简单的问题, 对于大多数工程实际问题是无能为力的。数值计算方法是利用已知的信息, 通过迭代计算过程来逼近最优化问题的解, 这种思想也是古已有之, 但由于其运算量大, 直至电子计算机出现和发展后才成为现实, 并为数值优化方法的发展提供了重要的基础。特别是近 40 多年来, 优化方法取得了巨大的进展, 得到了广泛的应用, 形成了一门从实践中产生, 在实践中发展起来的新兴的学科。

0.1 什么是机械优化设计

机械优化设计是使某项机械设计在规定的各种设计限制条件下, 优选设计参数, 使某项或几项设计指标获得最优值。工程设计上的最优值 (Optimum) 或“最佳值”, 是指在满足多种设计目标和约束条件下所获得的最令人满意和最适宜的值。它反映了人们的意图和目的, 这不同于表示事物本身规律的极值——最

大值和最小值，但是在很多情况下，也可以用最大值和最小值来代表最优值。最优值的概念是相对的，随着科学技术的发展及设计条件的变动，最优化的标准也将发生变化，也就是说，优化设计反映了人们对客观世界认识的深化，它要求人们根据事物的客观规律，在一定的物质基础和技术条件之下，充分发挥人的主观能动性，得出最优的设计方案。

机械优化设计就是对所求问题建立数学模型，利用数学规划理论，通过计算机求得设计最佳值，亦即解决设计方案参数的最佳选择问题。这种选择不仅保证多参数的组合方案满足各种设计要求，而且也使设计指标达到最优值。因此，求解优化设计问题需要采用优化方法。简言之，就是在一些等式或不等式约束条件下求多变量函数的极小值或极大值。优化设计又称为最优化设计。

可靠性设计、机械优化设计和计算机辅助设计构成了现代设计方法。

0.2 传统设计与优化设计

0.2.1 传统设计

一项产品的设计一般需要经过调查分析、方案拟订、技术设计、零件工作图绘制等环节。

传统设计方法通常在调查分析的基础上，参照同类产品进行估算、经验类比或试验来确定初始设计方案，然后根据初始设计方案的设计参数进行强度、刚度、稳定性等性能分析计算，检查各项性能是否满足设计指标要求，如果不完全满足性能指标要求，设计人员对参数进行重新修改，重新校验。这样反复进行分析计算—性能校验—参数修改，直到性能完全满足设计指标要求为止。

从以上过程可以看出，整个传统设计过程就是人工试凑和定性分析比较的过程，主要的工作是性能的重复分析，至于每次的参数修改，都是凭经验或直观判断，并不是根据某种理论精确计算出来的。

实践证明，按照传统设计方法作出的设计方案，都有很大改进提高的余地。因此，这些设计方案仅仅是一种可行方案，而不是最佳方案。

由此可见，传统设计方法只是被动地重复分析产品的性能，而不是主动地设计产品的参数。从这个意义上来讲，它没有真正体现设计的含义。“设计”一词本身就包含优化的概念。作为一项设计不仅要求方案可行、合理，而且应该是某些指标达到最优的理想方案。

0.2.2 优化设计

设计中的优化思想在古代就有所体现。宋代建筑师李诫在其著作《营造法

式》一书中曾指出：圆木做成矩形截面梁的高宽比应为三比二。这一结论和抗弯梁理论推出的结果十分接近。

如图 0-1 所示，根据梁弯曲理论，最佳截面尺寸应使抗弯截面系数 W 最大。即

$$W = \frac{bh^2}{6} \rightarrow \max$$

由图可知：

$$d^2 = b^2 + h^2$$

而 $W = \frac{b}{6}(d^2 - b^2)$

$$\frac{dW}{db} = \frac{1}{6}(d^2 - 3b^2) = 0$$

由此可得： $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ 时， W 取极大值 $\left(\frac{d^2 W}{db^2} = -b < 0\right)$ ，则

$$h = \sqrt{\frac{2}{3}}d \quad \frac{h}{b} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}d}{\frac{1}{\sqrt{3}}d} = \sqrt{2} \approx 1.414$$

这与 $h/b = 3/2 = 1.5$ 很相近。

像这样简单的优化问题用古典的微分方法很容易求解，但对于一般工程优化问题的求解，需用数学规划理论并借助于电子计算机才能完成。

现代化的设计工作已不再是过去那种凭经验或直观判断来确定结构方案，也不是像过去的安全寿命可行设计方法那样，只要满足使用要求即可。而是借助电子计算机，用一些精度较高的力学的数值分析方法进行分析计算，并从大量的可行方案中寻找出一种最优的设计方案，从而实现用理论设计代替经验设计，用精确计算代替近似计算，用优化设计代替一般的安全寿命的可行性设计。

机械优化设计在机械设计中的应用，既可以使方案在规定的设计要求下达到某些优化的结果，又不必耗费过多的计算工作量。因此，产品结构、生产工艺等的优化已经成为市场竞争的一种手段。

例如，在机械设计方面，如果对具有 10 个变速档的机床主轴箱进行优化设计，和常规设计相比，中心距总和可以从 578mm 减小到 482.3mm，减少 16.5%。在结构设计方面，目前我国对简单结构物进行优化设计，比常规设计节约材料 7%；对较复杂结构物进行优化设计可节约材料 20%；对复杂结构物进行优化设计能节约材料 35% ~ 40%。

机械优化设计不仅用于产品结构设计、工艺方案的选择，也用于运输路线的

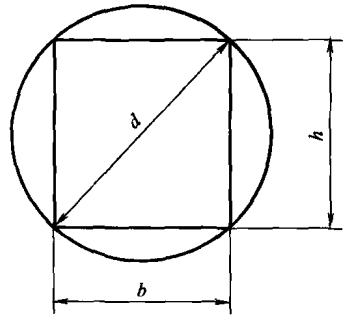


图 0-1

确定、商品流通量的调配、产品配方的配比等。目前，机械优化设计在机械、冶金、石油、化工、电机、建筑、宇航、造船、轻工等部门都已得到广泛的应用。

0.3 机械优化设计的特点

应用计算机进行优化设计，与传统设计相比，具有如下三个特点：

1) 设计的思想是最优设计，需要建立一个正确反映设计问题的数学模型。

2) 设计的方法是优化方法，一个方案参数的调整是计算机沿着使方案更好的方向自动进行的，从而选出最优方案。

3) 设计的手段是计算机，由于计算机的运算速度快，分析和计算一个方案只需几秒以至千分之一秒钟，因而可以从大量的方案中选出最优方案。

这种设计是设计方法上的一个很大的变更，它使许多较为复杂的问题得到最完善的解决，而且它可以提高设计效率，缩短设计周期，还可以为设计人员提供大量的设计分析数据，有助于考察设计结果，从而可以提高机械产品的设计质量。

0.4 优化设计在机械设计中的作用

机械设计工作的任务就是既要使设计的产品具有优良的技术性能指标，又能满足生产的工艺性、使用的可靠性和安全性，且消耗和成本最低。机械设计一般需要经过以下的工作过程：①调查研究，需求预测（资料检索）；②拟订方案（设计模型）；③分析计算（论证方案）；④选择设计参数，绘图及编制技术文件等。

在最后确定设计参数时，既要使设计方案满足预定的设计要求，又要使之具有优良的技术性能指标，设计者往往需要经过详细的分析计算和比较，才能从几个或多个的可行方案中找出一个较好的方案。

但是，若采用的计算工具比较落后，在完成这一设计过程时，设计者不得不依靠经验，以及类比、推理和直观判断等一系列智力过程。实际上，这是很难找出最优设计方案的。

另外，随着生产的日益增长，要求机器向着高速、高效、低消耗方向发展，并且由于商品的竞争，要求不断缩短设计周期。

在这种情况下，所谓传统的设计方法已越来越显得适应不了发展的需要。因此，在近30年来，计算机在机械设计领域中已产生了深刻的影响，如用理论设计代替经验设计、用精确设计代替近似设计、用优化设计代替一般设计、用动态分析代替静态分析等；所有这一切，都需要用高速度、高精度、大存储量的计算

机来完成，所以计算机已成为设计工作者进行创造性活动的得力工具。如果设计过程不需人参与，由计算机根据用户编制的程序自动地完成各个设计阶段，直至获得最优设计方案，这种以机器为中心的设计方法称为自动设计（AD）。

但是在设计过程中，往往要求随时审查计算结果和设计方案，并且要对设计模型作必要的修改。这种工作如果由设计人员运用设计经验和直觉知识完成，要比由计算机完成好。因而又出现了一种人、机结合的交互式的作业过程，并且成为当前设计技术发展中的一个重要方向——计算机辅助设计（CAD）。

随着设计过程的计算机化，自然就要为设计过程能自动择取最优方案建立一种迅速而有效的方法。机械优化设计就是在这种情况下产生和发展起来的一种自动探优的方法。它在现代分析方法的基础上进行最佳的综合，通过计算机进行大量的分析计算，从众多的方案中选出一个既满足设计要求，又能使设计指标达到最好的最佳方案来。因此，这种设计方法，无论在一般设计工作过程中，还是在计算机辅助设计中都有重要的作用。

无论是传统设计还是计算机辅助设计，优化设计有两种情况：一种是已经有了一个好的初始方案，但这个设计方案尚待进一步改进，特别是要使某项设计指标达到最佳值；另一种情况是还没有初始方案，或者有一个不太好的初始方案，同样需要通过优化设计寻求一个可以使某项设计指标达到最佳值的最优设计方案。

不论是哪一种情况，最优设计方案必须依赖于某一种方案所建立的数学模型。实践证明，优化设计在大批量产品和单件产品的设计中，对提高和改进产品技术和经济指标都起到了重要的作用。可以预言，这种设计方法将会使机械设计技术提高到新的水平。

0.5 机械优化设计的发展概况

近几十年来，以计算机为工具、数学规划理论为方法发展起来的优化设计方法，首先在结构设计、化学工程、航空、造船等部门的设计中得到应用，而在机械设计方面的应用稍晚些。从国际范围来说，是在20世纪60年代后期才得到迅速的发展。从国内范围来说，只是在近30年来才开始重视起来。优化设计方法虽然发展历史很短，但进展迅速，无论在机构综合、机械的通用零部件设计，还是在各种专用机械设计和工艺设计方面，都很快地得到应用，并取得了一定的成果。究其原因，一方面是由于生产和工程设计中确实存在着大量的设计问题亟待优化解决；另一方面是由于电子计算机的日益广泛使用，为采用优化技术提供了有力的计算工具。

机构优化设计是机械优化设计中开展较早的领域之一。在平面连杆机构设计

方面,再现函数、轨迹和构件位置的优化设计,目前已进行了较多的研究,其中包括结构误差最小化、最佳的灵敏度、构件长度总和最小化、最小传动角最大化、运动副中的摩擦功率最小化等。在工程应用中,对轧钢厂飞剪机的剪切机构、液压挖掘机铲斗机构、港口起重机的变幅机构和高炉料钟悬挂装置中的四杆机构等都进行了优化设计。此外,在空间连杆机构、凸轮机构及组合机构的优化设计等方面也进行了一些探讨。近几年来,影响机械传动平稳性的许多机械动力学问题也越来越受到人们重视,如平面机构输入轴转矩波动的最小化、压印机振动平衡的最优化、织布机动力学综合最优化、机构质量的最优分布等;构件的弹性、运动副间隙的机构动力学等优化问题也开始引起科技工作者的重视。

机械零部件的最优设计在最近 10 多年来也有一定发展,例如,对液体动压轴承的优化设计,齿轮在最小接触应力情况下的齿廓最佳几何形状,轮齿在满足弯曲和接触强度条件下具有最佳承载能力的非渐开线正齿轮副的设计,定轴齿轮传动在限定最大接触应力、齿面最高温升和保证齿面最小油膜厚度下使单位体积所能传递的转矩最大的优化设计,二级齿轮减速器在满足强度和一定体积下的单位功率所占的减速器重量最小的设计,双功率流齿轮减速传动的最佳级数、传动比和参数的设计,多级齿轮装置传动比的最佳分配,机床齿轮变速箱各轴中心距总和最小化的设计,轴的优化设计,摩擦离合器的优化设计,齿轮泵的优化设计,弹簧的优化设计等问题都进行过一些研究,并有机械零件优化设计的专门著作。

机械结构参数和形状的优化设计,也是近代机械设计发展的重要内容之一。优化方法在结构设计中的应用,既可使方案在规定的设计要求下达到某些好的性能指标,又不必耗费过多的材料,使机器的重量降低。例如起重机主梁、塔架、雷达接收天线结构、机床多轴箱方案、建筑结构等,利用优化设计,可使重量减轻 15% 以上。在国外,如美国贝尔(Bell)飞机制造公司,采用优化方法解决 450 个设计变量的大型结构问题。在一个机翼进行设计中,减轻重量 35%。波音(Boeing)公司也有类似经验,在 747 机身的设计中,得到了减轻重量、缩短设计周期、降低成本的效果。我国某厂所引进的 1700 薄板轧机是 DMAG 公司提供的,该公司在对此产品进行优化设计修改后,就多盈利几百万马克。

最优化技术近年来在机械设计中的应用取得了初步的成果,但是还面临着许多问题需要解决。例如,标准零部件系列参数的制定,整机优化设计模型及方法的研究,机械设计问题的多目标决策问题,以及动态系统、随机模型、可靠性优化设计等一系列问题,尚需作较大的努力,才能适应机械工业发展的需要。

总地看来,机械优化设计是适应生产现代化要求发展起来的一门崭新的学科。它是在现代机械设计理论发展基础上产生的一种新的设计方法。因此,在加强现代机械设计理论研究的同时,必须进一步加强机械工程问题的优化设计数学

模型的研究,以便能与计算机的应用等更加紧密地联系起来,进一步提高我国机械产品的设计水平。

0.6 本课程的主要内容

机械优化设计包括建立最优化设计的数学模型和选择恰当的优化方法与程序两方面的内容。由于机械优化设计是应用数学方法寻求设计的最优方案,所以首先要根据实际设计问题建立相应的数学模型,即用数学形式来描述实际设计问题。建立数学模型时需要应用专业知识确定设计的限制条件和所追求的目标,确立各设计变量之间的相互关系等。

机械优化设计问题的数学模型可以是解析式、试验数据或经验公式。虽然它们给出的形式不同,但都是反映设计变量之间的数量关系。

数学模型一旦建立,机械优化设计问题就变成一个数学求解问题。应用数学规划方法的理论,根据数学模型的特点,可以选择适当的优化方法,进而可以选取或自行编制计算机程序,以计算机作为工具求得最佳参数。

本课程将着重介绍数学规划理论的基本概念、技术术语与基本方法以及当前最为流行的优化软件 LINGO,并通过实例介绍用机械优化设计解决设计问题的过程。

第 1 章 机械优化设计概述

1.1 工程中的机械优化设计问题

在工程实际中有许多机械优化设计问题，这里列举几个简单例子，以便对“什么是机械优化设计”有一个初步的认识。

【例 1-1】 汽车驾驶室刮水装置往往存在玻璃四个角落不易探到、刮水范围较小的缺点，因此视线达不到最优。通过采用四连杆传动装置（见图 1-1），可以使刮水范围变成不是圆弧形，从而克服上述缺点。

优化的目标：合理确定四连杆的几何尺寸，使刮水范围尽可能大。

显然，通过改变传动装置的几何尺寸，例如改变连杆长度 L_1 、 L_2 、 L_3 和固定点坐标 x_1 、 y_1 等设计参数，就能改变刮水范围的形状和大小。

限制条件是刮水臂不能超出玻璃窗框的范围以及传动装置所占的空间不宜太大。

图 1-2 示出了刮水范围常规方案和优化方案的比较。

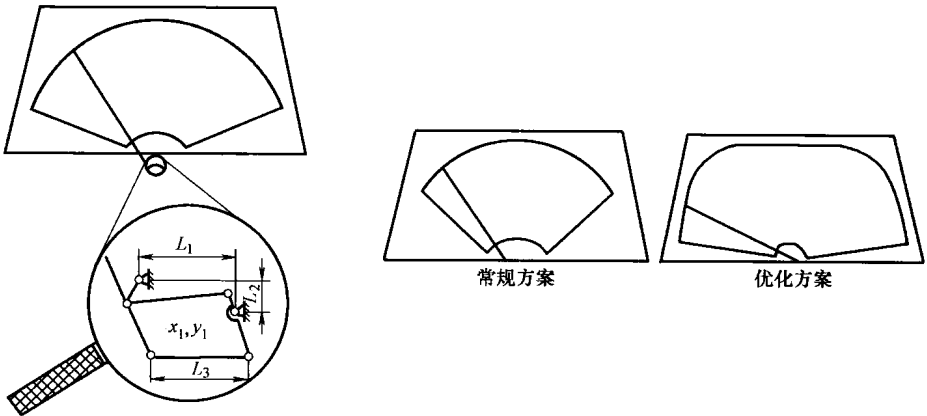


图 1-1 汽车刮水器的传动装置

图 1-2 刮水范围常规方案与优化方案的比较

【例 1-2】 图 1-3 表示一个承载系统的重量最优化问题。该系统由一根管子和一个矩形截面梁组成。

优化目标：在给定的载荷情况下，使承载系统的重量最轻。

管子内外直径和矩形截面梁的宽度和高度可以变化，视为设计参数。

限制条件：承载系统的总变形和最大应力不能超过允许值。

【例 1-3】 平面四连杆机构的优化设计。

平面四连杆机构的设计主要是根据运动学的要求，确定其几何尺寸，以实现给定的运动规律。

图 1-4 所示是一个曲柄摇杆机构。图中 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 分别是曲柄 AB 、连杆 BC 、摇杆 CD 和机架 AD 的

长度。 φ 是曲柄输入角， ψ_0 是摇杆输出的起始位置角。这里，规定 φ_0 为摇杆在右极限位置角 ψ_0 时的曲柄起始位置角，它们可以由 x_1 、 x_2 、 x_3 和 x_4 确定。通常规定曲柄长度 x_1 ，而机架 x_4 是给定的，所以只有 x_2 和 x_3 是设计变量。设计时，可在给定最大和最小传动角的前提下，当曲柄从 φ_0 位置转到 $\varphi_0 + 90^\circ$ 时，要求摇杆的输出角最优地实现一个给定的运动规律。例如，要求

$$\psi = f_0(\varphi) = \psi_0 + \frac{2}{3\pi}(\varphi - \varphi_0)^2$$

【例 1-4】 图 1-5 是一个二级齿轮减速器的优化设计问题。优化目标是重量或费用最小。设计参数是小齿轮齿数 z_1 和 z_2 、齿轮宽度 b_1 和 b_2 、两级齿轮轴的中心距 a_1 和 a_2 以及传动比的分配。限制条件应考虑材料的强度、制造的可能性以及各种有关的设计标准等。和前面的优化设计例子相比，齿轮箱的优化设计问题具有较多的设计参数（这里有 7 个）和限制条件（通常多于 20 个）。

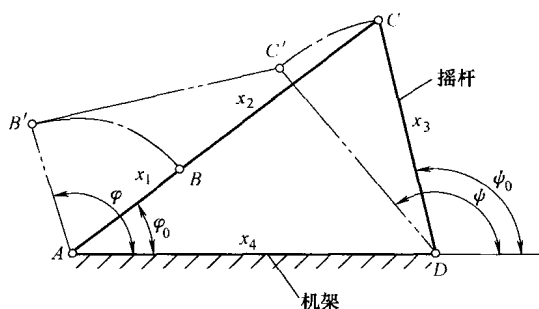


图 1-4 曲柄摇杆机构

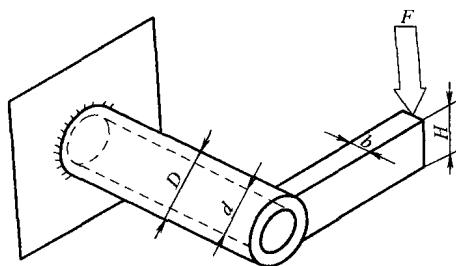


图 1-3 由管子和矩形截面梁组成的承载系统

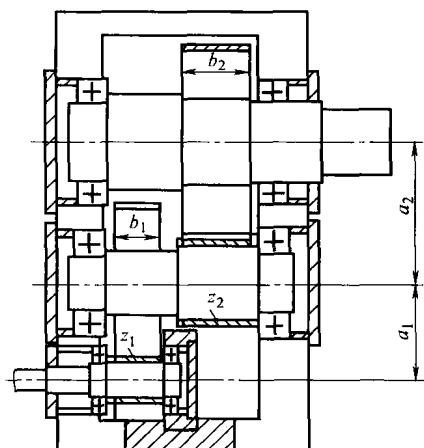


图 1-5 二级齿轮减速器

【例 1-5】 生产计划的优化示例。

某车间生产甲、乙两种产品。生产甲种产品每件需要用材料 9kg, 3 个工时, 4kW 电, 可获利 60 元。生产乙种产品每件需用材料 4kg, 10 个工时, 5kW 电, 可获利 120 元。若每天能供应材料 360kg, 有 300 个工时, 能供 200kW 电, 问每天生产甲、乙两种产品各多少件, 才能够获得最大的利润。

1.2 机械优化设计中的数学模型

1.2.1 引例

图 1-6 所示的人字架由两个钢管构成, 其顶点受外力 $2F = 3 \times 10^5 \text{ N}$ 。已知人字架跨度 $2B = 152 \text{ cm}$, 钢管壁厚 $T = 0.25 \text{ cm}$, 钢管材料的弹性模量 $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$, 材料密度 $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 许用压应力 $\sigma_y = 420 \text{ MPa}$, 求在钢管压应力 σ 不超过许用压应力 σ_y 和失稳临界应力 σ_e 的条件下, 人字架的高 h 和钢管平均直径 D , 使钢管总重量 m 为最小。

根据以上所述, 可以把人字架的优化设计问题归结为

求 $x = [D \ h]^T$, 使结构重量

$$m(x) \rightarrow \min$$

但应满足强度约束条件

$$\sigma(x) \leq [\sigma_y]$$

和稳定约束条件

$$\sigma(x) \leq [\sigma_e]$$

(1) 强度、稳定性条件

钢管所受的压力:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{L}{h} \Rightarrow F_1 = \frac{FL}{h} = \frac{F(B^2 + h^2)^{1/2}}{h}$$

压杆失稳的临界力 (见图 1-7):

$$F_e = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

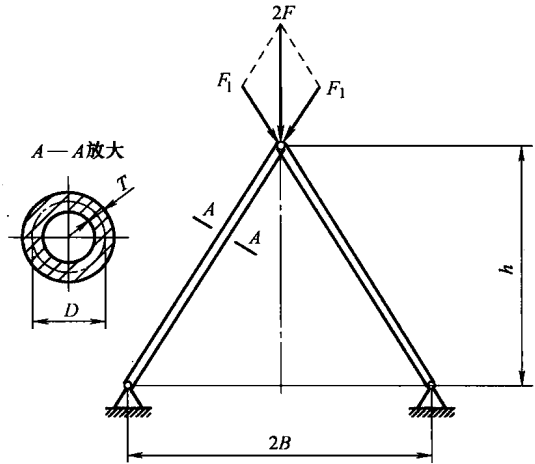


图 1-6 人字架的受力

$$F_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

钢管所受的压应力:

$$\sigma = \frac{F_1}{A} = \frac{F(B^2 + h^2)^{1/2}}{\pi DT} = \frac{F(B^2 + h^2)^{1/2}}{\pi TDh}$$

式中, I 为钢管截面惯性矩, A 为钢管截面面积, 故

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4) = \frac{\pi}{4}(R^2 - r^2)(R^2 + r^2) = \frac{A}{4}(R^2 + r^2) \\ &= \frac{A}{4} \left[\left(\frac{D}{2} + \frac{T}{2} \right)^2 + \left(\frac{D}{2} - \frac{T}{2} \right)^2 \right] = \frac{A}{4} \left(\frac{D^2}{2} + \frac{T^2}{2} \right) \\ &= \frac{A}{8}(T^2 + D^2) \end{aligned}$$

$$A = \pi(R^2 - r^2) = \pi DT$$

钢管所受的临界力:

$$[\sigma_e] = \frac{F_e}{A} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 A} = \frac{\pi^2 EA(T^2 + D^2)}{8L^2 A} = \frac{\pi^2 E(T^2 + D^2)}{8L^2} = \frac{\pi^2 E(T^2 + D^2)}{8(B^2 + h^2)}$$

因此, 强度约束条件 $\sigma(x) \leq [\sigma_y]$ 可写成

$$\frac{F(B^2 + h^2)^{1/2}}{\pi TDh} \leq [\sigma_y]$$

稳定性约束条件 $\sigma(x) \leq [\sigma_e]$ 可写成

$$\frac{F(B^2 + h^2)^{1/2}}{\pi TDh} \leq \frac{\pi^2 E(T^2 + D^2)}{8(B^2 + h^2)}$$

(2) 解析法

上述优化问题是以 D 和 h 为设计变量的二维问题, 而且只有两个约束条件, 可以用解析法进行求解。

假定使人字架总重量

$$m(D, h) = 2\rho AL = 2\pi\rho TD(B^2 + h^2)^{1/2}$$

为最小的最优解时, 刚好满足强度条件, 即

$$\sigma(D, h) = [\sigma_y]$$

从而可将设计变量 D 用设计变量 h 表示为

$$D = \frac{F(B^2 + h^2)^{1/2}}{\pi T[\sigma_y]h}$$

代入 $m(D, h)$ 中得

$$m(h) = \frac{2\rho F}{[\sigma_y]} \cdot \frac{B^2 + h^2}{h}$$

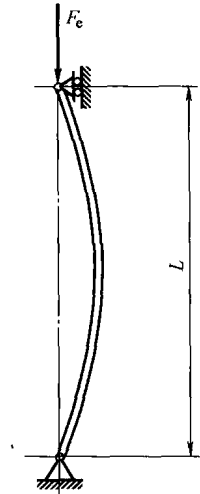


图 1-7 压杆的稳定

根据极值必要条件 $\frac{dm}{dh} = 0$, 即

$$\frac{2\rho F}{[\sigma_y]} \cdot \frac{d}{dh} \left(\frac{B^2 + h^2}{h} \right) = \frac{2\rho F}{[\sigma_y]} \left(1 - \frac{B^2}{h^2} \right) = 0$$

得

$$h^* = B = \frac{152}{2} \text{cm} = 76 \text{cm}$$

$$D^* = \frac{\sqrt{2F}}{\pi T [\sigma_y]} = 6.43 \text{cm}$$

$$m^* = \frac{4\rho FB}{[\sigma_y]} = 8.47 \text{kg}$$

把所得参数带入稳定性条件, 可以证明

$$\sigma(D^*, h^*) \leq \sigma_e(D^*, h^*)$$

即稳定约束条件得到满足, 所以 D^* 、 h^* 这两个参数是满足强度约束和稳定约束且使结构最轻的最佳参数。

(3) 作图法

在设计平面 $D-h$ 上画出代表 $\sigma(D, h) = [\sigma_y]$ 和 $\sigma(D, h) = \sigma_e(D, h)$ 的两条曲线, 如图 1-8 所示。

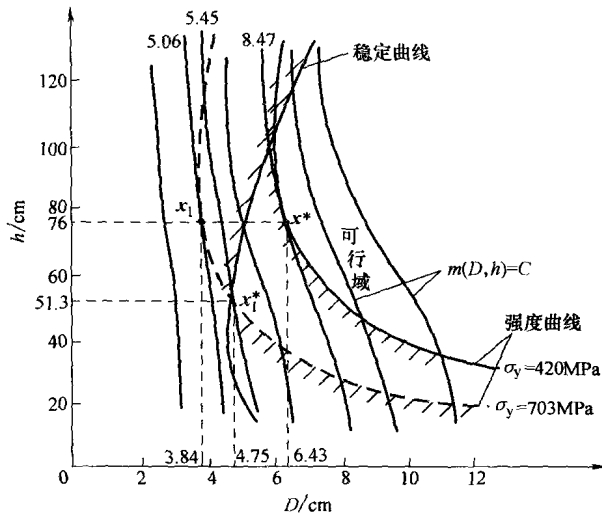


图 1-8 人字架优化设计的图解

两曲线将设计平面分成两部分, 其中不带阴影线的区域是同时满足 $\sigma(x) \leq [\sigma_\psi]$ 和 $\sigma(x) \leq [\sigma_e]$ 两个约束条件的区域, 称为可行域。然后再画出一族重量等值线: