图解

中国学生解题方法全书

全国教育科学"十一五"规划教育部课题
图解策略提高教与学超越性和实效性的应用研究

ZHONGGUOXUESHENGJIETIFANGFAQUANSHU

初中数学

主编/钟山

辽宁教育出版社

图解

中国学生解题方法全书

初中数学

主　　编　钟　山

本册主编　刘文成

本册副主编　马振元

辽宁教育出版社

目录 CONTENTS

第一篇　常考知识点解题方法篇

第二篇　中考数学能力解题方法篇

第三篇　中考题型解题方法篇

第一篇　常考知识点解题方法篇

专题一　有理数

学点 重点 考点

课标考点记心中 应对考试很轻松

1. 通过实际例子，感受引入负数的必要性，会用正负数表示实际问题中的数量.

2. 理解有理数的意义，能用数轴上的点表示有理数，借助数轴理解相反数和绝对值的意义，会求有理数的相反数和绝对值(绝对值符号内不含字母)，会比较有理数的大小.通过上述内容的学习，体会从数与形两方面考虑问题的方法.

3. 掌握有理数的加、减、乘、除运算，理解有理数的运算律，并能运用运算律简化运算，会合并含有相同字母因数的式子，会去括号、能运用有理数的运算解决简单的问题.

4. 理解乘方的意义，会进行乘方的运算及简单的混合运算(以三步为主).

5. 理解科学记数法的含义，会用科学记数法表示一个较大的数，了解近似数与有效数字的概念.

知识 规律 方法

知识规律是基础 解决问题是关键

1. 表解"正数、负数、零"与"数轴、相反数、绝对值"

正数、负数	带有正号的数叫做正数(正号可以省略不写)；带有负号的数叫做负数
零	"0"表示正数与负数的分界点，既不是正数也不是负数，它是介于正数和负数之间的唯一整数
数轴	规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴
相反数	只有符号不同的两个数叫做互为相反数，特别地，0的相反数是0.几何意义：数轴上分居原点两旁，到原点等距离的两点所对应的两个数互为相反数
绝对值	(1)几何意义：数轴上表示数a的点与原点的距离叫做这个数a的绝对值，记作$\|a\|$.$\|a\|\geqslant 0$，$\|a\|$是非负数. (2)代数意义：一个正数的绝对值是它本身，一个负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零. $\|a\|=\begin{cases}a(a>0),\\0(a=0),\\-a(a<0)\end{cases}$

2. 加法歌诀

(1)同号两数相加，取相同的符号，并把绝对值相加；

(2)异号两数相加，取绝对值较大加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值；

(3)互为相反数的两个数的和为0；

(4)一个数同0相加，仍得这个数.

3. 减法歌诀

减去一个数，等于加上这个数的相反数，即$a-b=a+(-b)$.

4. 乘法歌诀

(1)两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘；

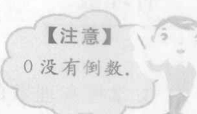
(2)任何数同 0 相乘，都得 0；

(3)几个数(0 除外)相乘，积的符号由负因数的个数决定，口诀：奇负偶正.

5. 除法歌诀

(1)两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除；

(2)零除以任何一个不等于零的数都得零；



(3)除以一个数(0 除外)等于乘这个数的倒数，即 $a\div b=a\times\frac{1}{b}(b\neq0)$.

6. 乘方歌诀

(1) $\underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}_{n个a}=a^n$，反之，$a^n=\underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}_{n个a}$

(2)注意：$2^3\neq3^2$，$(-2)^4\neq-2^4$，$\left(\frac{2}{3}\right)^2\neq\frac{2^2}{3}$.

7. 混合运算歌诀

(1)先算乘方，再算乘除，最后算加减；

(2)有括号时，先算括号里的，按照小括号、中括号、大括号(或大括号、中括号、小括号)的顺序进行运算；

(3)同一级运算按从左到右的先后顺序进行运算.

说明 加法和减法是一级运算，乘法和除法是二级运算，乘方和开方是三级运算；运算的顺序是先算三级运算，再算二级运算，最后算一级运算.

8. 运算律

(1)加法交换律：$a+b=b+a$；

(2)加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$；

(3)乘法交换律：$ab=ba$；

(4)乘法结合律：$(ab)c=a(bc)$；

(5)分配律：$a(b+c)=ab+ac$.

题型 范例 精析

题目类型归纳全 解答习题不困难

题型 1　正数和负数

考例 1　**(2008・陕西)**零上 13 ℃记作 +13 ℃，零下 2 ℃可记作(　　)

A. 2　　B. −2　　C. 2 ℃　　D. −2 ℃

思路图解：

答案：D

误区警示：不要漏掉单位"℃"，防止错选成 B.

题型 2　数轴与相反数、绝对值、倒数

考例 2　**(2009・威海)**实数 a，b 在数轴上的位置如图 1-1-1 所示，则下列结论正确的是(　　)

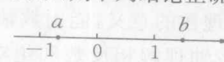
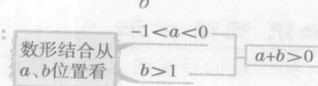


图 1-1-1

A. $a+b>0$　　B. $a-b>0$

C. $ab>0$　　D. $\frac{a}{b}>0$

思路图解：



答案：A

考例 3　**(2009・吉林)**如图 1-1-2，数轴上 A、B 两点所表示的有理数的和是______.

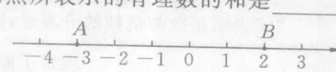
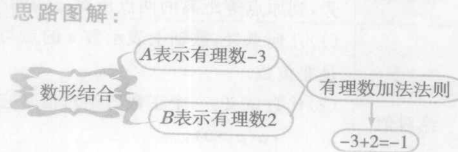


图 1-1-2

思路图解：

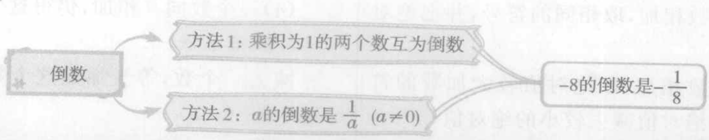


答案：−1

考例 4　**(2008・河北)**−8 的倒数是(　　)

A. 8　　B. −8　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $-\frac{1}{8}$

思路图解：



答案：D

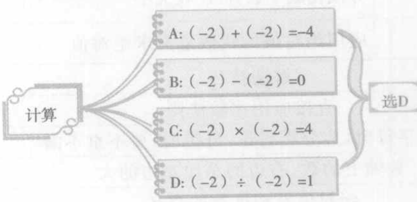
题型 3　有理数的运算

考例 5　**(2008·绍兴)**下列计算结果等于 1 的是(　　)

A. $(-2)+(-2)$　　B. $(-2)-(-2)$

C. $(-2)\times(-2)$　　D. $(-2)\div(-2)$

思路图解：



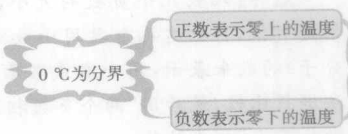
答案：D

考例 6　**(2009·河北)**$(-1)^3$ 等于(　　)

A. -1　　B. 1　　C. -3　　D. 3

解析　$(-1)^3=(-1)\times(-1)\times(-1)=-1.$

思路图解：



答案：D

考例 9　下表列出国外几个城市与北京的时差(带正号的数表示同一时刻比北京时间早的时数).

城市	时差/时
东京	+1
纽约	−13
巴黎	−7
芝加哥	−14

(1)如果现在是北京时间 8:30，那么现在纽约时间是多少？东京时间是多少？

(2)小刚现在想给远在巴黎的表哥打电话，你认为合适吗？

解：(1)由题意知，纽约时间为 19:30，东京时间为 9:30.

(2)此时巴黎时间为凌晨 1:30，小刚此时想给巴黎的表哥打电话是不太合适的.

题型 5　有理数与几何图形

考例 10　**(山西模拟)**计算：$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}-\frac{1}{64}-\frac{1}{128}-\frac{1}{256}$.

答案：A

考例 7　**(2008·武汉)**小怡家的冰箱冷藏室温度是5 ℃，冷冻室的温度是-2 ℃，则她家冰箱冷藏室温度比冷冻室温度高(　　)

A. 3 ℃　　B. -3 ℃　　C. 7 ℃　　D. -7 ℃

解析　$5-(-2)=7.$　　答案：C

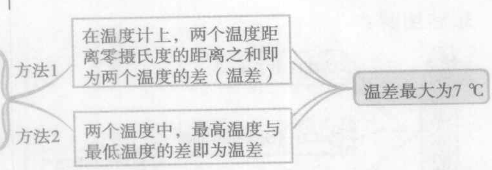
考例 8　**(2008·武汉)**某地今年 1 月 1 日至 4 日每天的最高气温与最低气温如下表：

日期	1月1日	1月2日	1月3日	1月4日
最高气温	5 ℃	4 ℃	0 ℃	4 ℃
最低气温	0 ℃	−2 ℃	−4 ℃	−3 ℃

其中温差最大的是(　　)

A. 1 月 1 日　　B. 1 月 2 日

C. 1 月 3 日　　D. 1 月 4 日



解：如图 1-1-3，把面积为 1 的正方形等分成两个面积为$\frac{1}{2}$的矩形，把面积为$\frac{1}{2}$的矩形等分成两个面积为$\frac{1}{4}$的矩形，再把面积为$\frac{1}{4}$的矩形等分成两个面积为$\frac{1}{8}$的矩形，…，如此下去，利用图形揭示的规律可以得出

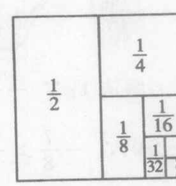


图 1-1-3

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}=1-\frac{1}{256}.$$

所以原式$=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}\right)=1-\left(1-\frac{1}{256}\right)=1-1+\frac{1}{256}=\frac{1}{256}.$

点拨：本题巧妙地利用数形结合，利用图形揭示的规律进行计算，从而化繁为简. 因此，解题过程中要注意分析，发现规律.

方法 技巧 绝招

方法技巧是个宝 解决问题离不了

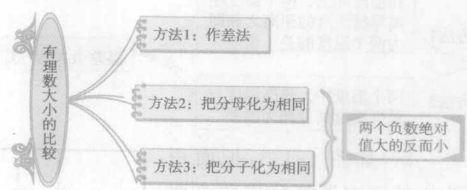
方法 1 有理数大小比较的技巧方法

任意有理数的大小比较	正数大于 0，负数小于 0，正数大于负数；对于两个负数，绝对值大的反而小	多个有理数比较大小时，注意先区分正数、负数、0，然后再分别比较大小，有分数时，要先通分或化成小数，再比较大小
两个负数的大小比较	绝对值大的反而小	应用绝对值的代数意义求绝对值

解题方法	解法技巧
先求负数的绝对值，再比较大小	直接应用比较法则
分类讨论	涉及字母时，应分类讨论，分类时，要不重不漏
利用数轴比较有理数大小	数轴上的数，右边的总比左边的大
有多重符号时，先化简符号，再比较大小	绝对值及相反数的意义
作差法	若 $a-b>0$，则 $a>b$；若 $a-b<0$，则 $a<b$

例 1 （山西模拟）比较 $-\frac{7}{8}$ 与 $-\frac{8}{9}$ 的大小.

思路图解：



解法 1：$\because -\frac{7}{8}-\left(-\frac{8}{9}\right)=-\frac{7}{8}+\frac{8}{9}=\frac{1}{72}>0$，$\therefore -\frac{7}{8}>-\frac{8}{9}$.

解法 2：$\because \left|-\frac{7}{8}\right|=\frac{7}{8}=\frac{63}{72}$，$\left|-\frac{8}{9}\right|=\frac{8}{9}=\frac{64}{72}$，又 $\because \frac{63}{72}<\frac{64}{72}$，$\therefore -\frac{7}{8}>-\frac{8}{9}$.

解法 3：$\because \left|-\frac{7}{8}\right|=\frac{7}{8}=\frac{56}{64}$，$\left|-\frac{8}{9}\right|=\frac{8}{9}=\frac{56}{63}$，又 $\because \frac{56}{64}<\frac{56}{63}$，$\therefore -\frac{7}{8}>-\frac{8}{9}$.

点评：比较几个负数的大小，一般先求它们的绝对值，再把这几个数用小数或同分母（或同分子）的数来表示，用小数或分数比较大小的方法进行比较，最后用“两个负数相比较，绝对值大的反而小”作出结论.

方法 2 非负数性质的应用

在初中数学中，实数的绝对值、偶次幂、偶次算术根、偶次方根的被开方数均是常见的非负数，非负数的性质如下：

1. 非负数以零为最小值；

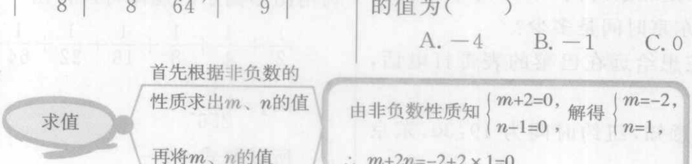
2. 有限个非负数的和或积为非负数；

3. 若有限个非负数的和为零，则必然有每个非负数同时为零.

例 2 若 $|m+2|+(n-1)^2=0$，则 $m+2n$ 的值为（　　）

A. -4　B. -1　C. 0　D. 4

思路图解：



答案：C

点拨：若 $a^2+b^2=0$，则 $a=0$ 且 $b=0$；若 $|a|+|b|=0$，则 $a=0$ 且 $b=0$.

技巧：非负数在解题中的应用非常广泛，这里不再赘述. 但必须牢记，凡是涉及非负数的问题，一般地，只要我们抓住非负数的概念和性质，认真分析，灵活应用，不难找到解题的途径，得到较满意的结果.

方法 3 数字规律题的解题方法

解答数字规律问题，应该从最简单的数字开始，分析探索数字之间存在的内在联系规律，然后利用

规律解决问题，体现了从特殊到一般的数学思想.

例3 把数字按如图 1-1-4 所示排列起来，从上开始，依次为第一行，第二行，第三行，…，中间用虚线围成的一列，从上至下依次为 1，5，13，25，…，则该列的第 10 个数为______.

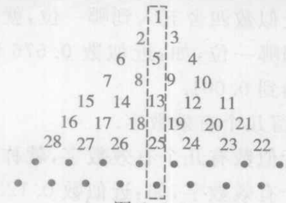
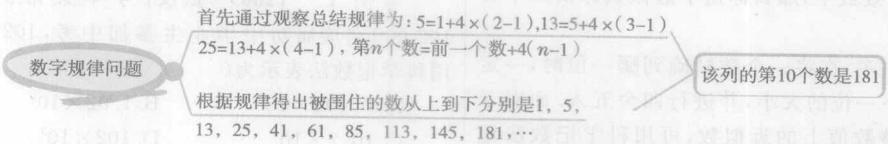


图 1-1-4

思路图解：



答案：181

绝招：数阵规律探索题应该从数阵的行列以及数阵变化中发现其中的规律，然后根据规律解答问题.

专题二 科学记数法、近似数、有效数字

学点 重点 考点

课标考点记心中 应对考试很轻松

1. 能把大于 10 的数正确地用科学记数法表示出来.

2. 了解近似数和有效数字的概念；对给出的由四舍五入得到的近似数，能说出它的精确度(即精确到哪一位).

3. 明确有效数字是反映近似程度的一种新的方法，能说出它的精确度，有几个有效数字.

4. 会求符合一定精确度要求的近似数.

5. 感受纯数学问题的近似数与生活问题中的近似数的区别和联系.

知识 规律 方法

知识规律是基础 解决问题是关键

1. 科学记数法：把一个数表示成 $a\times10^n$ 的形式(其中 $1\leqslant|a|<10$，n 是整数)，这种记数方法叫做科学记数法.

金点子：①科学记数法把一个数表示成 $a\times10^n$ 的形式时，$1\leqslant|a|<10$，必须是只有一位整数的数.

②大于 10 的数用科学记数法表示时，n 为正整数，10 的指数 n 比原数的整数位数少 1，熟记这条规律，用科学记数法表示大于 10 的数时，只要先查一下原数的整数位数，即可求出 10 的指数 n.

③小于 1 的数用科学记数法表示时，n 为负整数，10 的指数 n 的绝对值为第一个不为零的数字前面所有 0 的个数，包括小数点前面的那个 0，例如：0.000 302 5 用科学记数法表示为 3.025×10^{-4}.

2. 近似数：在生活中，有的量很难或者没有必要用准确数表示，而是用一个有理数近似地表示出来，这个数接近于准确数，我们就称这个有理数为这个量的近似数.

巧突破：近似数一般是四舍五入得到的数，在四舍五入取近似数时，不要随便地将小数点末尾的 0 去掉. 例如近似数 2.3 与 2.30 的精确度不同，2.3 精确到十分位，而 2.30 精确到百分位.

3. 有效数字：从一个数的左边第一个非零的数字起，到末位数字止，所有数字都叫做这个数的有效数字.

巧突破：有效数字是从左边第一个非零数字起，所以有效数字不包括前面的 0，但是非零数字后面不管有多少个 0，都叫原数的有效数字，例如，0.000 004 8 中 4 前面的 6 个 0 都不是这个数的有效数字，这个数的有效数字是 4 和 8；再如 1 090 090 中，1 后面的 0 都是这个数的有效数字，这个数有 7 个有效数字：1，0，9，0，0，9，0.

4. 近似数的精确度

精确度是近似数的精确程度，一般有两种形式：

(1)精确到哪一位.

一个近似数四舍五入到哪一位，就称这个近似数精确到哪一位，如：近似数 0.576 精确到千分位或精确到 0.001.

(2)保留几个有效数字.

一个近似数有几个有效数字，就称这个近似数保留几个有效数字，如：近似数 0.123，有 1，2，3 三个有效数字，那么称这个近似数保留三个有效数字.

金点子：在将一个数精确到哪一位时，一定要看到下一位的大小，并进行四舍五入. 而对于精确到整数值上的近似数，可用科学记数法记数，如将 12 960 000 精确到十万位可写成 1.30×10^7.

题型范例精析

题目类型归纳全 解答习题不困难

题型 1　用科学记数法表示绝对值较大的数

考例 1　**(2009·武汉)** 今年某市约有 102 000 名应届初中毕业生参加中考，102 000 用科学记数法表示为(　　)

A. 0.102×10^6　　B. 1.02×10^5

C. 10.2×10^4　　D. 102×10^3

思路图解：

答案：B

规律总结：把普通数字写成科学记数法的形式，一般有两种方法：(1)把已知数的小数点向左移动几位，就乘 10 的几次方；(2)查出已知数的整数部分的位数，整数部分的位数减去 1，就等于 10 的指数 n. 如 47 136.5 的整数部分的位数是 5，则 $n=5-1=4$，故 $47\ 136.5=4.713\ 65\times10^4$.

题型 2　利用科学记数法求原数

考例 2　把下列用科学记数法表示的数写成原数.

(1)2×10^5；(2)6.25×10^6；(3)-2.345×10^7.

解：(1)$2\times10^5=200\ 000$；

(2)$6.25\times10^6=6\ 250\ 000$；

(3)$-2.345\times10^7=-23\ 450\ 000$.

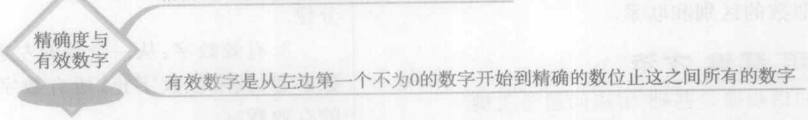
规律总结：把科学记数法形式的数还原为原数，有两种思路：(1)按照乘方和乘法的运算进行；(2)逆用上面的方法，即原数的整数部分的位数等于 10 的次数 n 加上 1. 另外还要注意符号不要遗漏.

题型 3　确定精确度，数清有效数字

考例 3　下列由四舍五入法得到的近似数，各精确到哪一位？各有几个有效数字？

(1)25 140；(2)3.01；(3)2.5 万；(4)1.2×10^3.

思路图解：



解：(1)25 140 精确到个位(精确到 1)，共有 5 个有效数字：2，5，1，4，0；

(2)3.01 精确到百分位(精确到 0.01)，共有 3 个有效数字：3，0，1；

(3)2.5 万精确到千位，共有两个有效数字：2，5；

(4)1.2×10^3 精确到百位，共有两个有效数字：1，2.

规律总结：2.5 万中 5 在千位上，1.2×10^3 中 2 在百位上，故它们分别精确到千位，百位，而不是十分位；它们有效数字的个数都是两个，只看前面数字的个数即可.

题型 4　按要求取近似数

考例 4　用四舍五入法，按括号中的要求对下列各数取近似数.

(1)7.153 247(精确到万分位)；

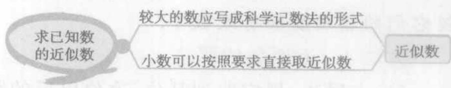
(2)8 057(精确到百位)；

(3)2.03×10^4(精确到千位)；

(4)20 373(保留 3 个有效数字)；

(5)1.363(精确到 0.01).

思路图解:



解:(1)7.153 247≈7.153 2;

(2)8 057≈8.1×10^3;

(3)$2.03\times10^4\approx2.0\times10^4$;

(4)20 373≈2.04×10^4;

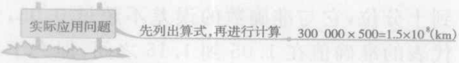
(5)1.363≈1.36.

规律总结:用四舍五入法取近似值时,如果这一位上的数大于或等于5,则向前进1,否则不进位.

题型5 运用近似数、有效数字和科学记数法解决生活中的问题

考例5 **(2009·泰安)**光的传播速度约为300 000 km/s,太阳光照射到地球上大约需要500 s,则太阳到地球的距离用科学记数法可表示为________km.

思路图解:



答案:1.5×10^8

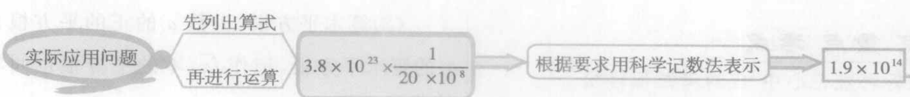
点评:让学生了解光的传播速度,为今后的学习打下基础.

考例6 **(2009·潍坊)**太阳内部高温核聚变反应释放的辐射能功率为3.8×10^{23}千瓦,到达地球的仅占20亿分之一,到达地球的辐射能功率为(　　)(用科学记数法表示,保留两个有效数字)

A. 1.9×10^{14}千瓦　　B. 2.0×10^{14}千瓦

C. 7.6×10^{15}千瓦　　D. 1.9×10^{15}千瓦

思路图解:

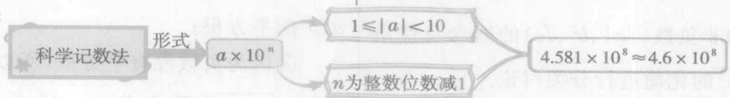


答案:A

点评:科学记数法是把一个数写成$a\times10^n$的形式,其中$1\leqslant|a|<10$.本题既考查了精确度的确定,又考查了科学记数法,从而提高学生分析问题、解决问题的能力.

考例7 **(2008·德州)**在2008年北京奥运会国家体育场的"鸟巢"钢结构工程施工建设中,首次使用了我国科研人员自主研制的强度为4.581亿帕的钢材.4.581亿帕用科学记数法表示为________帕(保留两个有效数字).

思路图解:



答案:4.6×10^8

方法 技巧 绝招

方法技巧是个宝 解决问题离不了

方法1　纳米知多少

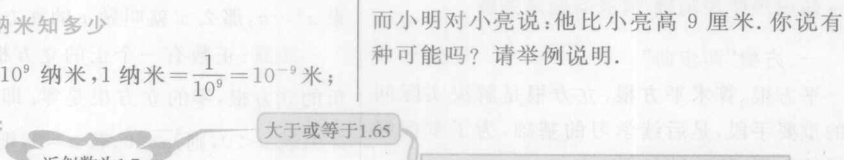
(1)1米$=10^9$纳米,1纳米$=\frac{1}{10^9}=10^{-9}$米;

(2)一般地,当$a\neq0$,n是正整数时,$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

方法2　一切皆有可能

例1　小明和小亮的身高大约都是1.7米,而小明对小亮说:他比小亮高9厘米.你说有这种可能吗?请举例说明.

思路图解:



解:有可能.例如小明身高为1.74米,小亮身高为1.65米,则1.74−1.65=0.09(米).

点评:此题主要考查近似数的意义.

方法3　近似数的比较方法

例2　小明和小红测量同一张课桌的高度,小明测得的高度是1.1米,小红测得的高度是1.10米,两人测得的结果是否相同?为什么?

解:可以从精确度和有效数字两个方面去说明区别.

(1)两人测量结果的有效数字不同,1.1有

2个有效数字，分别是1，1；而1.10有3个有效数字，分别是1，1，0.

(2)两个测量结果的精确度不同，1.1精确到十分位，它与准确数的误差不超过0.05，它所代表的准确值在1.05到1.15之间，即大于等于1.05，而小于1.15；1.10精确到百分位，它与准确数的误差不超过0.005，它所代表的准确值在1.095到1.105之间，即大于等于1.095，而小于1.105.

由此可见，1.10的精确度比1.1的精确度要高.

点评：(1)必须注意：近似数末尾的"0"不能随便去掉；(2)比较两个近似数的大小，要注意比较它们的精确度和有效数字.

方法4 近似数的取法

(1)去尾法，规定取到某位，这位以后的数字一律舍去，这种方法叫去尾法，如用去尾法求π的取4位近似数的结果为3.141.

(2)收尾法，规定取到某位，把某位以后的数字全部舍去，若舍去的数字不全是零，则在所保留数字的末位加上一个1，此即收尾法，如用收尾法求8.134的精确到百分位的近似数是8.14.

专题三 数的开方

学点 重点 考点

课标考点记心中 应对考试很轻松

1.理解平方根、算术平方根、立方根的概念，会根据概念及有关性质解题.

2.了解开方与乘方为互逆运算，会用平方运算求某些非负数的平方根，会用立方运算求某些数的立方根.

3.会借助非负数($|a|$、b^2、$\sqrt{c}$)的概念及性质解题，会将$\sqrt{a^2}$的化简进行分类讨论.

4.理解实数的分类，实数和数轴上的点一一对应关系，体会数形结合的思想.

知识 规律 方法

知识规律是基础 解决问题是关键

一、方根"两步曲"

平方根、算术平方根、立方根是解决实际问题的重要手段，是后续学习的基础，为了掌握好方根的知识，特总结如下：

1.理解概念，掌握性质

(1)平方根：如果一个数的平方等于a，这个数就叫做a的平方根(或二次方根).

注意：①一个正数有两个平方根，它们互为相反数；

②零有一个平方根，它是零本身；

③负数没有平方根.

(2)算术平方根：正数a的正的平方根也叫a的算术平方根，记作$\sqrt{a}$，零的平方根也叫零的算术平方根.

注意：①$\sqrt{a}$表示a的算术平方根，这里$a\geqslant 0$，$\sqrt{a}\geqslant 0$，即a是非负数，算术平方根也是非负数；

②$a\geqslant 0$时，$\sqrt{a}$表示a的算术平方根，$\pm\sqrt{a}$表示a的平方根；

③因为负数没有平方根，所以被开方数$a\geqslant 0$.如$\sqrt{x-3}$中隐含着$x-3\geqslant 0$，即$x\geqslant 3$这一条件.

(3)立方根：如果一个数的立方等于a，这个数就叫做a的立方根(或三次方根).就是说，如果$x^3=a$，那么x就叫做a的立方根.

注意：正数有一个正的立方根，负数有一个负的立方根，零的立方根是零.即若$a>0$，则$\sqrt[3]{a}>0$；若$a<0$，则$\sqrt[3]{a}<0$；若$a=0$，则$\sqrt[3]{a}=0$.

2.双重非负数

算术平方根$\sqrt{a}$具有双重非负性，一是被开方数必须是非负数，即$a\geqslant 0$；二是算术平方根的值是非负数，即$\sqrt{a}\geqslant 0$.

二、实数

1.实数的定义：有理数和无理数统称为实数.

2.无理数的概念:无限不循环小数叫做无理数.

3.“物以类聚,数以群分”掌握实数的分类:

(1)按定义分类

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数:如}1,2,3,\cdots\\0\\\text{负整数:如}-1,-2,-3,\cdots\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

(2)按性质分类:(或按大小)

$$\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\begin{cases}\text{正有理数}\\\text{正无理数}\end{cases}\\0\\\text{负实数}\begin{cases}\text{负有理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

4.实数与数轴上的点之间的对应关系

实数与数轴上的点一一对应,所有的有理数都可以用数轴上的点来表示,但数轴上的点不全表示有理数,因此数轴上的点与有理数之间不是一一对应;所有的无理数都能用数轴上的点来表示,但数轴上的点并不都表示无理数,所以无理数和数轴上的点也不是一一对应关系;数轴上的每一个点都表示实数,且所有的实数都能用数轴上的点来表示,所以实数与数轴上的点是一一对应关系.

5.实数的有关概念及运算

(1)有理数的大小比较法则在实数范围内仍成立,有理数的一些概念,如相反数、绝对值、倒数在实数范围内仍适用.

(2)对于实数 a、b,有如下性质:

①若 a 与 b 互为相反数,则 $a+b=0$;

②a 与 b 互为倒数$\Leftrightarrow ab=1$;

③任何实数的绝对值都是非负数,即 $|a|\geqslant 0$;

④互为相反数的两个数的绝对值相等,即 $|a|=|-a|$;

⑤正数的倒数是正数,负数的倒数是负数;

⑥零没有倒数.

(3)实数的混合运算顺序与有理数运算顺序基本相同,先算乘方、开方,再算乘除,最后算加减,同级运算按从左到右的顺序进行,有括号先算括号里的.

三、二次根式

1.二次根式的概念

形如$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$的式子叫做二次根式.

巧突破:二次根式$\sqrt{a}$有意义的条件是 $a\geqslant 0$,即只有被开方数 $a\geqslant 0$ 时,式子$\sqrt{a}$才是二次根式,$\sqrt{a}$才有意义.

2.二次根式的性质

(1)二次根式的非负性:$\sqrt{a}\geqslant 0(a\geqslant 0)$.

(2)$(\sqrt{a})^2=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0).\end{cases}$

巧突破:①一个非负数 a 可以写成它的算术平方根的形式,即 $a=(\sqrt{a})^2(a\geqslant 0)$.

②$\sqrt{a^2}$中 a 的取值范围可以是任意实数,即不论 a 取什么数,$\sqrt{a^2}$一定有意义.

③化简$\sqrt{a^2}$时,先将它化成$|a|$,再根据绝对值的意义来进行化简.

④$\sqrt{a^2}$与$(\sqrt{a})^2$的异同:

不同点:$\sqrt{a^2}$中 a 可以取任何实数,而$(\sqrt{a})^2$中的 a 必须取非负数;

$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$,而$\sqrt{a^2}=|a|$.

相同点:被开方数都是非负数.当 a 取非负数时,$\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$.

3.二次根式乘除法

(1)二次根式的乘除法法则:

类型	法则	逆用法则
二次根式的乘法	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$	积的算术平方根化简公式:$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$
二次根式的除法	$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0,b>0)$	商的算术平方根化简公式:$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0,b>0)$

巧突破:①当二次根式前面有系数时,可类比单项式与单项式相乘(或相除)的法则,如 $a\sqrt{b}\cdot c\sqrt{d}=ac\sqrt{bd}$;$\frac{a\sqrt{b}}{c\sqrt{d}}=\frac{a}{c}\sqrt{\frac{b}{d}}$.

②被开方数 a、b 一定是非负数(在分母上时只能为正数).

金点子:将二次根式化成最简二次根式时,可利用公式① $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$;② $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant0,b>0)$;③ $\sqrt{a^2}=|a|$ 进行变形.当被开方数中有分母时,还要利用分式的基本性质将分母变形成完全平方数,再开方.如 $\sqrt{\frac{a^3b}{3}}=\sqrt{\frac{3a^2ab}{3^2}}=\frac{\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{3ab}}{\sqrt{3^2}}=\frac{|a|}{3}\sqrt{3ab}$.

4.二次根式的加减法

(1)同类二次根式:几个二次根式化成最简二次根式以后,如果被开方数相同,则这几个二次根式是同类二次根式.

金点子:判断几个二次根式是不是同类二次根式,应先将每个二次根式进行化简,化成最简二次根式后,再看被开方数是否相同,如判断 $\sqrt{3}$、$\sqrt{12}$、$\sqrt{\frac{1}{3}}$ 是否为同类二次根式,应先化简:$\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$,$\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{3}{3^2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.此时为 $\sqrt{3}$、$2\sqrt{3}$、$\frac{\sqrt{3}}{3}$,显然是同类二次根式.

(2)合并同类二次根式

将同类二次根式的系数相加减,被开方数和根指数不变.

合并同类二次根式,可以与合并同类项的法则作比较.只有同类二次根式才可以合并,不是同类二次根式就不能合并.如 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 就是最简结果,不能再合并.

(3)二次根式的加减法

二次根式的加减,实质上就是合并同类二次根式.

金点子:二次根式相加减时,要先将各个二次根式化成最简二次根式,再找出同类二次根式,最后合并同类二次根式.

(4)二次根式的混合运算

① $\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})$ 型,运用乘法对加法的分配律化简.

② $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{d})$ 型,可类比多项式相乘法则进行计算,即 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{c}+\sqrt{d})=\sqrt{a}\cdot\sqrt{c}+\sqrt{a}\cdot\sqrt{d}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{d}=\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$.

③ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b(a\geqslant0,b\geqslant0)$,即运用平方差公式.

④ $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2=a+b\pm2\sqrt{ab}(a\geqslant0,b\geqslant0)$,即运用完全平方公式.

⑤ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\div(\sqrt{a}-\sqrt{b})=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}(a\geqslant0,b\geqslant0$,且 $a\neq b)$.

5.分母有理化

(1)概念:分母有理化就是把分母中的根号化去的一种变形.

(2)分母有理化的方法:将分母和分子都乘分母的有理化因式,化去分母中的根号.

(3)有理化因式:两个含有二次根式的代数式相乘,如果其积不含有二次根式,就说这两个代数式互为有理化因式.

①分母的有理化因式是不唯一的,但以最简为宜.

②一般地,$\sqrt{a}$ 的有理化因式为:$\pm\sqrt{a}$;$a\pm\sqrt{b}$ 的有理化因式为:$a\mp\sqrt{b}$;$a\sqrt{x}\pm b\sqrt{y}$ 的有理化因式为:$a\sqrt{x}\mp b\sqrt{y}$;$a\sqrt{x}\pm b$ 的有理化因式为:$a\sqrt{x}\mp b$.

题型范例精析

题目类型归纳全 解答习题不困难

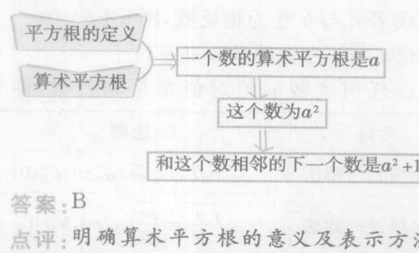
题型1 综合考查平方根与立方根的概念

考例1 **(2009·潍坊)**一个自然数的算术平方根为 a,则和这个自然数相邻的下一个自然数是( )

A. $a+1$ B. a^2+1

C. $\sqrt{a^2+1}$ D. $\sqrt{a}+1$

思路图解:



答案:B

点评:明确算术平方根的意义及表示方法.

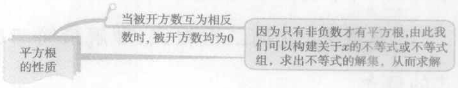
题型2 算术平方根与不等式、绝对值的结合

考例2 **(2009·荆门)**若 $\sqrt{x-1}-\sqrt{1-x}=$

$(x+y)^2$，则 $x-y$ 的值为(　　)

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 3

思路图解：



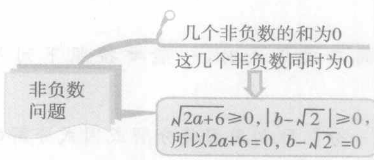
解析 由题意知 $\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\1-x\geqslant 0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x\geqslant 1,\\x\leqslant 1.\end{cases}$

所以 $x=1$. 由 $(x+y)^2=0$，得 $y=-x=-1$. 所以 $x-y=1-(-1)=2$.　　答案：C

点评：在算术平方根中，当被开方数是相反数时，只有它们都等于0，这两个式子才有意义，根据这个特点，我们可以列出不等式组，从而求出这个不等式组的解集.

考例 3　已知 a、b 是实数，且 $\sqrt{2a+6}+|b-\sqrt{2}|=0$，解关于 x 的方程 $(a+2)x+b^2=a-1$.

思路图解：



解：因为 a、b 是实数，$\sqrt{2a+6}+|b-\sqrt{2}|=0$，

所以 $\sqrt{2a+6}\geqslant 0$，$|b-\sqrt{2}|\geqslant 0$，

所以 $2a+6=0$，$b-\sqrt{2}=0$.

所以 $a=-3$，$b=\sqrt{2}$. 把 $a=-3$，$b=\sqrt{2}$ 代入 $(a+2)x+b^2=a-1$，得 $-x+2=-4$，

所以 $x=6$.

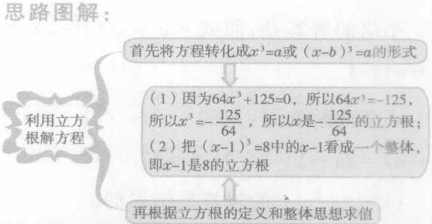
点评：此类题主要是考查完全平方式、算术平方根、绝对值三者的非负性，只需令每项分别等于零即可.

题型 3　利用立方根的知识解方程

考例 4　求下列各式中的 x.

(1) $64x^3+125=0$；(2) $(x-1)^3=8$.

思路图解：



解：(1) 因为 $64x^3+125=0$，所以 $x^3=-\frac{125}{64}$，所以 $x=\sqrt[3]{-\frac{125}{64}}$，所以 $x=-\frac{5}{4}$；

(2) 因为 $(x-1)^3=8$，所以 $x-1=\sqrt[3]{8}$，所以 $x-1=2$，所以 $x=3$.

方法点拨：①求立方根的运算，需转化为 $x^3=a$ 的简便形式.

②常常将 $(x-a)^2$ 或 $(x-a)^3$ 中的 $x-a$ 看成一个整体.

题型 4　利用数轴比较实数的大小

考例 5　实数 x、y、z 在数轴上对应点的位置如图 1-3-1，则下列关系正确的是(　　)

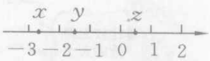
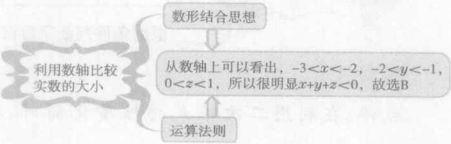


图 1-3-1

A. $x+y+z>0$　　B. $x+y+z<0$

C. $xz>yz$　　D. $xy<xz$

思路图解：



答案：B

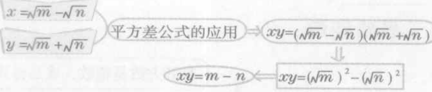
点评：借助数轴来比较两数或几个数的大小是常用的方法.

题型 5　对非负数意义的考查

考例 6　(2009·新疆) 若 $x=\sqrt{m}-\sqrt{n}$，$y=\sqrt{m}+\sqrt{n}$，则 xy 的值是(　　)

A. $2\sqrt{m}$　　B. $2\sqrt{n}$　　C. $m+n$　　D. $m-n$

思路图解：



答案：D

方法点拨：本题主要考查了平方差公式在二次根式中的应用.

题型 6　对有关实数运算及大小比较问题的考查

考例 7　计算：$3^2\div(-3)^2+\left|\frac{1}{6}\right|\times(-6)+\sqrt{49}$.

解：原式 $=9\div 9+\frac{1}{6}\times(-6)+7=1-1+7=7$.

方法点拨：按运算顺序一步步运算．先算乘方、开方，再算乘除，最后算加减，有括号的要先算括号里的．

考例 8 $-\pi,-3,\sqrt[3]{3},\sqrt{3}$的大小顺序是(　　)

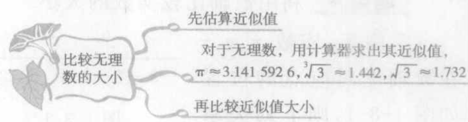
A. $-\pi<-3<\sqrt{3}<\sqrt[3]{3}$

B. $-\pi<-3<\sqrt[3]{3}<\sqrt{3}$

C. $-3<\pi<\sqrt[3]{3}<\sqrt{3}$

D. $-3<\pi<\sqrt{3}<\sqrt[3]{3}$

思路图解：



答案：B

方法点拨：正数大于 0，负数小于 0，正数大于负数，两个负数绝对值大的反而小．

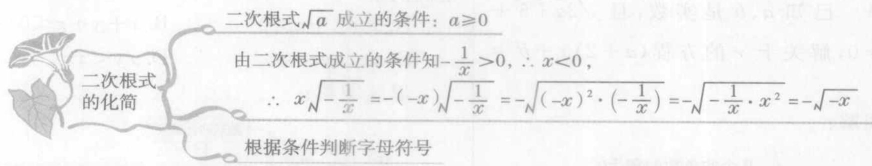
题型 7 化简二次根式，理解最简二次根式的概念

考例 9 把 $x\sqrt{-\frac{1}{x}}$ 根号外的因式移到根号内得(　　)

A. $\sqrt{-x}$　　B. $\sqrt{x}$

C. $-\sqrt{-x}$　　D. $-\sqrt{x}$

思路图解：

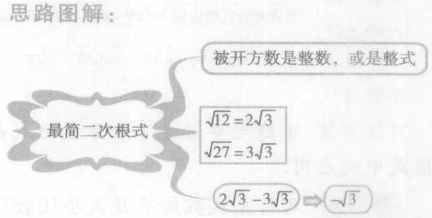


答案：C

点评：在利用二次根式的性质化简时，要时刻注意其符号，要明确$\sqrt{a}$是非负数，所以凡是二次根号里开出来的数一定是非负数，即$\sqrt{a^2}=|a|$．反过来，将根号外的因式移到根号内时，也必须向里移非负数．如(2)题中，因为$x<0$，所以只能向根号里移$-x$，而且到根号里面要变成$(-x)^2$．在这里容易出错，要特别注意．

考例 10 **(2009·绥化)** 计算：$\sqrt{12}-\sqrt{27}=$________．

思路图解：



答案：$-\sqrt{3}$

点评：对最简二次根式的意义的理解和记忆有两个要求：(1)被开方数不含分母；(2)被开方数中每一个因式的指数都小于根指数 2．

根据最简二次根式的两个条件，把二次根式化为最简二次根式时，一般要按照下列步骤进行：

①"一分"，即利用因数分解或因式分解的方法把被开方数(或式)的分子、分母都化成质因数(或因式)的幂的积的形式；

②"二移"，即把能开得尽方的因数(或因式)，用它的算术平方根代替，移到根号外，其中把根号内的分母中的因式移到根号外时，要注意应写在分母的位置上；

③"三化"，即化去被开方数中的分母．

题型 8 解二次根式的化简求值题

考例 11 小明和小芳解答题目"先化简，再求值：$a+\sqrt{1-2a+a^2}$，其中$a=9$"时，得出了不同的答案．

小明的解答是：原式$=a+\sqrt{(1-a)^2}=a+(1-a)=1$．

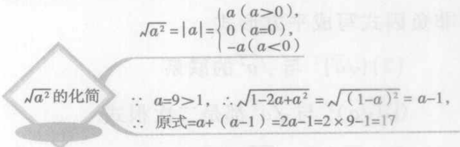
小芳的解答是：原式$=a+\sqrt{(1-a)^2}=a-(1-a)=2a-1=2\times9-1=17$．

(1)________的解答是错误的．

(2)错误的解答错在未能正确运用二次根式

的性质______.

思路图解：

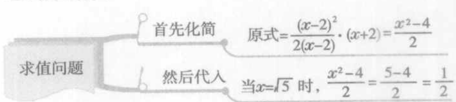


答案：(1)小明 (2)$\sqrt{a^2}=|a|=-a(a<0)$

点评：通过二次根式的性质$\sqrt{a^2}=|a|$，把算术平方根的问题转化成绝对值的问题，进而再根据绝对值的意义去掉绝对值符号．解题时，为避免产生错误，应写出转化的步骤．另外，注意运用题目所给的条件．

考例 12 **(2009·安顺)** 先化简，再求值：$\dfrac{x^2-4x+4}{2x-4}\cdot(x+2)$，其中 $x=\sqrt{5}$.

思路图解：



解：$\dfrac{1}{2}$.

点评：本考题最简便的方法是先化简后代入计算较为简便.

题型 9 分母有理化

考例 13 甲、乙两人化简$\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}(a>0,b>0)$，分别作了如下变形：

甲：$\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$

$=\dfrac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

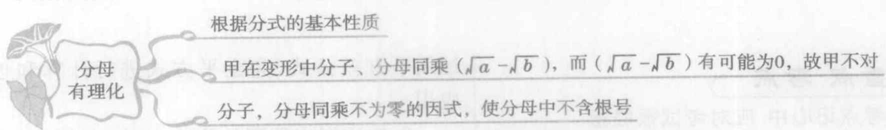
乙：$\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

关于这两种变形，正确的是(　　)

A. 甲、乙都对　　B. 只有甲对

C. 只有乙对　　D. 甲、乙都不对

思路图解：



答案：C

点评：在化简变形的过程中要保持恒等变形，这样才能保证得到正确的结果.

方法 技巧 绝招

方法技巧是个宝 解决问题离不了

1. 实数运算口诀

实数运算要注意，特别一些判断题.
有理相加都有理，无理相加实数替.
有理无理若相加，所得结果必无理.
加减原本逆运算，以上相减亦成立.
实数乘法细分析，有理相乘均有理.
有理无理做乘法，除去数零均无理.
无理相乘要注意，有理无理居其一.
乘除也为逆运算，除去数零无须提.

2. 等于"本身"的实数

在实数的学习中，我们常遇到许多关于"本身"的填空题和选择题，下面帮助同学们进行归类整理，便于大家记忆.

(1)相反数是它本身的实数是 0；

(2)倒数是它本身的实数是±1；

(3)绝对值是它本身的实数是正数和 0(即非负数)；

(4)平方是它本身的实数是 0 和 1；

(5)立方是它本身的实数是 0 和±1；

(6)平方根是它本身的实数是 0；

(7)算术平方根是它本身的实数是 0 和 1；

(8)立方根是它本身的实数是 0 和±1；

(9)非负数 a 的平方的算术平方根是它本身 a(即$\sqrt{a^2}=a,a\geq0$).

3. 辨别$(\sqrt{a})^2$与$\sqrt{a^2}$

$(\sqrt{a})^2$与$\sqrt{a^2}$是两个重要的根式，由于它们形状相似，极易混淆，下面比较它们的异同.

(1)$(\sqrt{a})^2$与$\sqrt{a^2}$的区别

①读法不同：$(\sqrt{a})^2$读作 a 的算术平方根的平

方，$\sqrt{a^2}$读作 a 的平方的算术平方根.

②写法不同：$(\sqrt{a})^2$ 有括号，$\sqrt{a^2}$没有括号.

③意义不同：$(\sqrt{a})^2$ 表示非负数 a 的算术平方根的平方，$\sqrt{a^2}$表示实数 a 的平方的算术平方根.

④取值不同：$(\sqrt{a})^2$ 中的 a 为非负数，$\sqrt{a^2}$中的 a 为一切实数.

⑤运算顺序不同：$(\sqrt{a})^2$ 是先求 a 的算术平方根，再求它的算术平方根的平方；$\sqrt{a^2}$是先求 a 的平方，再求平方后的算术平方根.

⑥运算结果不同：$(\sqrt{a})^2=a$；$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a\ (a\geqslant 0),\\ -a(a<0).\end{cases}$

⑦作用不同：$\sqrt{a^2}=|a|$正向应用可将根号内的因数或因式移到根号外，逆向应用可将一个实数或一个因式移入根号内；$(\sqrt{a})^2=a$ 正向应用可化简二次根式，逆向应用可将一个非负数或非负因式写成平方形式.

(2)$(\sqrt{a})^2$ 与$\sqrt{a^2}$的联系

①$(\sqrt{a})^2$ 与$\sqrt{a^2}$都是二次根式.

②$(\sqrt{a})^2$ 与$\sqrt{a^2}$都是非负数.

③当 $a\geqslant 0$ 时，$(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}=a$.

将$(\sqrt{a})^2=a$ 反过来就是 $a=(\sqrt{a})^2$，利用此式可使某些运算更为简便.

例　已知$(\sqrt{a})^2<1$，化简 $\sqrt{a^2(a-1)^2}$.

解：$\because (\sqrt{a})^2<1$，$\therefore 0\leqslant a<1$.

$\therefore \sqrt{a^2(a-1)^2}=|a|\cdot|a-1|$

$=a(1-a)=a-a^2$.

专题四　整　式

学点 重点 考点

课标考点记心中 应对考试很轻松

1. 理解代数式的概念、掌握代数式的求值方法，并能把简单的与数量有关的语句用代数式准确地表达出来.

2. 能理解单项式、多项式、整式的概念，准确确定单项式的次数、系数，多项式的次数、系数，并能将整式按某个字母作升、降幂排列.

3. 会识别同类项并能熟练合并，利用同类项的知识解决实际问题，能正确地去、添括号.

4. 能够正确地进行整式的加减运算，提高运算能力.

5. 掌握正整数指数幂的运算性质，能用字母、式子、语言正确地表达及运用它们熟练地进行运算.

6. 能熟练地运用整式的乘法法则进行计算.

7. 掌握平方差公式、完全平方式的结构，会运用平方差公式、完全平方式进行计算和创新应用.

8. 知道同底数幂的除法法则，并能运用它进行运算.

9. 会用零指数和负整数指数幂的意义进行相应的计算，会用科学记数法表示绝对值小于 1 的数.

知识 规律 方法

知识规律是基础 解决问题是关键

1. 代数式

(1)代数式的概念：用运算符号把数和表示数的字母连接而成的式子叫做代数式.

巧突破：①运算符号有加、减、乘、除、乘方、平方；②单独的一个数或一个字母也是代数式；③式中如果含有了“=”“<”“>”“≥”“≤”，它们不是运算符号，因此式子是等式或不等式，而不是代数式.

(2)代数式的书写规定：

①代数式中的乘号，通常简写成“·”，或者省略不写，如 $a\times b$ 写成 $a\cdot b$ 或 ab，但数字与数