新世纪高等职业教育文化基础课程教材

（五年制高职适用）

# 数学（第二册）

主 编 丁百平

Mathematics

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

## 新世纪高等职业教育文化基础课程教材

高等数学（工科类）（少学时）

高等数学学习指导与训练（工科类）（少学时）

经济数学（少学时）

经济数学学习指导与训练（少学时）

-------------------------------

高等数学

高等数学习题册

经济数学

经济数学习题册

线性代数与线性规划模型

数学建模与数学实验

-------------------------------

数学（第一册）（五年制高职适用）

★ 数学（第二册）（五年制高职适用）

数学（第三册）（五年制、三年制高职适用）

数学练习册（第一册）（五年制高职适用）

数学练习册（第二册）（五年制高职适用）

数学练习册（第三册）（五年制、三年制高职适用）

数学教学参考书（全三册）

ISBN 7-04-014801-3

9 787040 148015

定价：12.20元

新世纪高等职业教育文化基础课程教材(五年制高职适用)

# 数　　学

## (第二册)

主　编　丁百平

高等教育出版社

**内容提要**

本套书是根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》组织编写的五年制高职数学教材。本教材注重科学性、趣味性、通用性，强调“过程教学”和“问题解决”。与本教材配套的数学练习册同步出版。

本册为第二册，主要内容包括：空间图形、直线、二次曲线、排列与组合、二项式定理、数列等。

本套书适用于五年制高等职业院校各专业，也可供中职学校使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学.第2册/丁百平主编.—北京:高等教育出版社,2004.7(2006.7重印)
ISBN 7-04-014801-3

Ⅰ.数…　Ⅱ.丁…　Ⅲ.数学—高等学校:技术学校—教材　Ⅳ.01

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第061735号

责任编辑　徐　东　封面设计　吴　昊　责任印制　潘文瑞

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-58581118 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街4号 | | 021-56964871 |
| 邮政编码 | 100011 | 免费咨询 | 800-810-0598 |
| 总　　机 | 010—58581000 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 传　　真 | 021—56965341 | | http://www.hep.com.cn |
| | | | http://www.hepsh.com |
| 经　　销 | 蓝色畅想图书发行有限公司 | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 排　　版 | 南京理工出版信息技术有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| 印　　刷 | 宜兴德胜印刷有限公司 | 畅想教育 | http://www.widedu.com |
| 开　　本 | 787×1092　1/16 | 版　　次 | 2004年7月第1版 |
| 印　　张 | 9.25 | 印　　次 | 2006年7月第4次 |
| 字　　数 | 233 000 | 定　　价 | 12.20元 |

凡购买高等教育出版社图书，如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请在所购图书销售部门联系调换。



物料号　14801—00

# 前　言

根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(以下简称“两个文件”)的要求，为了更好地满足五年制高等职业教育数学教学的需要，通过推荐、遴选，高等教育出版社组织了学术水平较高、教学实践经验丰富的第一线数学教师，编写了这套五年制高等职业教育数学教材. 为适应不同专业、不同类别的高职高专学校的需要，全套教材分三册出版. 第一册内容有：集合与逻辑用语、不等式、函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数、向量与复数. 第二册内容有：空间图形、直线、二次曲线、排列、组合、二项式定理和数列. 第三册内容有：极限与连续、导数与微分、导数的应用、积分、积分的应用. 本书是第二册.

本教材的编写按照“两个文件”的要求，遵循“夯实基础、强化能力、问题解决、过程教学”的原则. 在教学内容、体例安排、教材结构、练习设置、课题探究等方面，力求体现高等职业教育专业面广、工种繁多的特点，选取现代生活和各类专业学习中均有广泛应用的基础知识作为必学内容，着重培养学生分析问题和解决问题的能力，强调过程教学，从而培养学生数学思维习惯和数学思维能力. 为了能使学生达到高中阶段的基本数学水准，适应高等数学的初步教学要求. 在内容的编写上注意学生的年龄特点，尽量做到由浅入深、由易到难、由具体到抽象、通俗直观、循序渐进. 又为了提高学生的数学素养，在每章后编有阅读材料，提供学生课外阅读，期望能拓宽视野和提高对数学的兴趣. 本教材带“*”部分为选学内容.

为方便教学，与教材配套的数学练习册同步出版发行. 在教材中，练习题附在各节内容中，供课内练习使用，复习题附在每章内容之后，供复习本章知识时使用. 练习册安排了作为基础内容的A组题与作为提高要求的B组题，供课外作业使用. 全套三册教材还配有教学参考书(共一册).

参加本教材编写的有祝小飞、余俊燕、叶鸣飞、王志勇、周雅丽、宋继环、王开洪、蒋德喜、喻栋仁、张立喜、曾文斗、丁百平. 全套教材(主教材、练习册与教学参考书)由丁百平主编. 第二册副主编为叶鸣飞、王志勇. 第二册统稿为丁百平.

本书在编写过程中，得到了教育部职业教育与成人教育司、全国职业教育教学指导委员会、中国职业技术学会教学工作委员会有关领导的热情关心和指导，在此谨表示衷心的感谢.

限于编者水平，不妥之处在所难免，衷心欢迎广大从事职业教育的教师、专家批评指正.

编　者

2004 年 5 月

# 目　　录

# 第8章 空间图形

**【在这一章】**

我们在初中学习了平面几何，研究过一些平面图形，如三角形、平行四边形等，这些图形是由在同一个平面内的点、线所构成的. 但是，在我们生活的现实世界里，我们还会遇到许多由空间的点、线、面所构成的空间图形，如黑板、桌椅、房子、足球、书本和文具盒等等.

立体几何就是研究空间图形的. 本章将在平面几何知识的基础上介绍空间图形的一些概念、性质、计算和它们的应用.

## §8.1 平面的表示法和基本性质

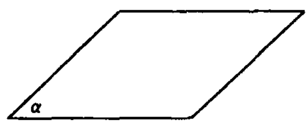
### 一、平面

在现实生活中，我们所看到的面都是物体的表面，这些面有的平，有的不平. 而平整的镜面、课桌面、黑板面都给我们以平面的形象，数学中所说的平面是从生活中抽象出来的，立体几何中所研究的平面是没有厚度且可以在空间中无限伸展的. 因此我们在生活中所看到的平整的镜面、课桌面、黑板面等，都只能看作是平面的一部分.

### 二、平面的表示法

平面的表示法，是表示空间图形的基础.

当我们站在适当的位置看长方形的课桌面时，常常感觉它们都像平行四边形. 因此，在空间表示平面时，通常用平行四边形表示平面，并用小写的希腊字母 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$、… 写在平行四边形的某一顶角的内部来表示不同的平面，如图 8-1(1)中的平面可以表示为平面 $\alpha$，有时我们也用标注平行四边形顶点位置的字母来表示一个平面，如图 8-1(2)中的平面可以表示为平面 $ABCD$ 或平面 $AC$.



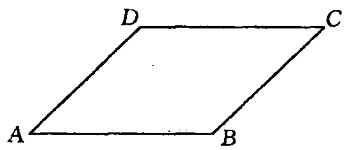
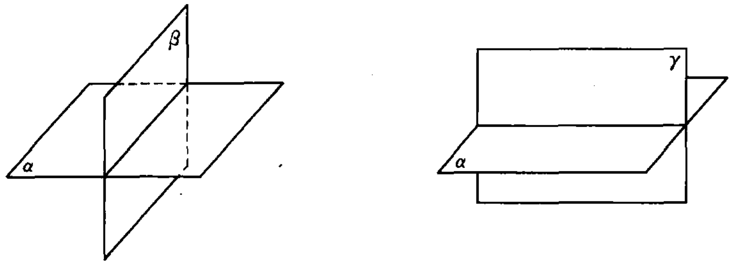




**图 8-1**

当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，通常把被遮住部分的线段画成虚线或者不画出来，如图 8-2 所示.

我们在画一个直立的平面时，一般可以把平面画成平行四边形或者矩形，并且要使它们的一条竖边与水平平面的横边垂直，如图 8-2(1)平面 $\beta$ 和图 8-2(2)平面 $\gamma$.




(1) (2)

**图 8-2**

## 三、平面的基本性质

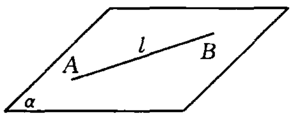
在生产与生活中，人们经过长期的观察与实践，总结出关于平面的三个基本性质，它们是研究空间直线、平面的位置关系的理论基础.

**公理 1** 如果一条直线上有两个点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

这条公理可以用来判断一条直线是否在一个平面内；或者判断一个平面是否通过某一条直线.

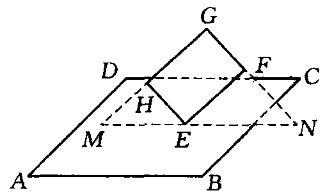
我们可以做一个实验：取一段细线，将线拉直，把线的两端放置在平整的玻璃面上，可以看到，整条细线都贴在玻璃面上了.

空间图形中的线和面都可以看成是点的集合，而点就是集合的元素. 如图 8-3 所示，点 $A$、$B$ 在直线 $l$ 上，记作 $A \in l$、$B \in l$；点 $A$、$B$ 在平面 $\alpha$ 内，记作 $A \in \alpha$、$B \in \alpha$；直线 $l$ 在平面 $\alpha$ 内，也可以说平面 $\alpha$ 经过直线 $l$，记作 $l \subseteq \alpha$ 或 $\alpha \supseteq l$.




(1)

**图 8-3**




(2)

**图 8-4**

**公理 2** 如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于经过这个公共点的一条直线.

这条公理是说空间两平面相交，一定有一条交线，不可能只相交于一点.

如图 8-4 所示，有两张矩形纸片 $ABCD$ 与 $EFGH$，把矩形 $ABCD$ 水平放置，把矩形 $EFGH$ 的顶点 $E$ 放在矩形 $ABCD$ 内，其他三个顶点在矩形 $ABCD$ 外，使我们觉得，两个矩形相交于点 $E$. 但是平面是可以无限伸展的，延长 $GF$ 交矩形 $ABCD$ 于点 $N$，延长 $GH$ 交矩形 $ABCD$ 于点 $M$，实际上平面 $ABCD$ 与平面 $EFGH$ 相交于经过点 $E$ 的一条直线 $MEN$.

如果平面 $\alpha$ 和 $\beta$ 有一条公共直线 $l$，那么 $l$ 称为平面 $\alpha$ 和 $\beta$ 的交线，记作 $\alpha \cap \beta = l$.

**公理 3** 经过不在同一条直线上的任意三点，可以作一个且只能作一个平面.

公理 3 也可以说成：不在同一条直线上的三点确定一个平面.

在日常生活中，我们看到的各种三脚支架，能在不平坦的地面上平稳支撑物体就是采用了这条公理.

**推论 1** 经过一条直线和这条直线外的一点，可以确定一个平面，如图 8-5(1)所示.

例如，门绕轴旋转，说明经过一条直线(门轴)可以作无数个平面，只要轴外有一定点(如门框

上的锁),就可以把门固定,这就是推论 1 的一个具体应用.

**推论 2** 两条相交直线可以确定一个平面,如图 8-5(2)所示.

**推论 3** 两条平行直线可以确定一个平面,如图 8-5(3)所示.

工人常用两根相交或平行的木条来固定一排木桩;营业员用彩带交叉捆扎礼品盒,便于提起,就是推论 2 和推论 3 的应用.

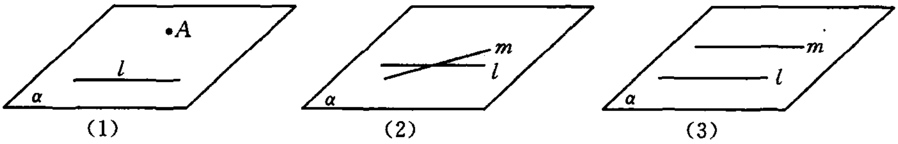



**图 8-5**

## 四、水平放置的平面图形直观图的画法

在纸上画空间图形时,不是画它的真实形状,而是画它的直观图.而要画空间图形的直观图,首先要学会水平放置的平面图形的直观图的画法.一般地,我们把水平放置的平面图形称为该图形的直观图.下面举例说明平面图形直观图的画法.

**例 1** 画已知正方形 $ABCD$ 的直观图(图 8-6).

**画法** (1) 画水平线段 $A_1B_1$,使 $A_1B_1 = AB$.

(2) 作 $\angle B_1A_1D_1 = 45°$,并且取 $A_1D_1 = \frac{1}{2}AD$.

(3) 作 $D_1C_1 \parallel A_1B_1$,且使 $D_1C_1 = A_1B_1$.

(4) 连结 $B_1C_1$,则$\square A_1B_1C_1D_1$ 就是正方形 $ABCD$ 的直观图.

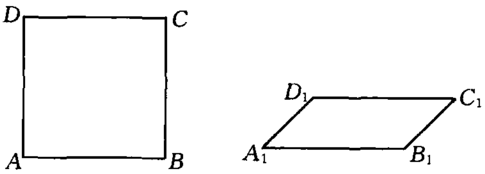



**图 8-6**

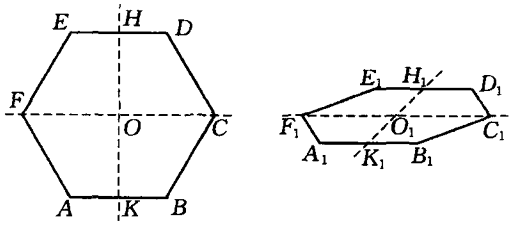



**图 8-7**

**例 2** 画已知正六边形 $ABCDEF$ 的直观图(图 8-7).

**画法** (1) 在已知正六边形 $ABCDEF$ 上作辅助线 $FC$,并取 $FC$ 的中点 $O$,过 $O$ 点作辅助线 $HK \perp FC$. 显然 $FC \parallel AB$, $OH = OK$.

(2) 画出水平辅助线 $F_1C_1$,使 $F_1C_1 = FC$.

(3) 在 $F_1C_1$ 上取中点 $O_1$,过 $O_1$ 作辅助线 $H_1K_1$,使 $\angle H_1O_1C_1 = 45°$,并且取 $O_1H_1 = O_1K_1 = \frac{1}{2}OH$.

(4) 过 $H_1$, $K_1$ 分别作 $E_1D_1 \parallel F_1C_1$, $A_1B_1 \parallel F_1C_1$,并且取 $E_1H_1 = H_1D_1 = A_1K_1 = K_1B_1 = \frac{1}{2}AB$.

(5) 连结 $B_1C_1$、$C_1D_1$、$E_1F_1$、$F_1A_1$.则六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 就是正六边形 $ABCDEF$ 的直观图.

画水平放置的平面图形直观图的一般步骤是：

(1) 把水平线段仍然画成水平线段，且长度不变.

(2) 把与水平线段垂直的线段画成与水平线段成45°角，而长度则画成原来长度的一半.

(3) 对于一般线段，要在原来的图形中从线段的各个端点向水平线段引辅助垂线，再按(2)的要求画出这些垂线，并确定其端点，从而画出线段.

以上画法我们又称它为斜二测画法.

### 练习 8.1

1. 填空题：

(1) 点 $A$ 在直线 $l$ 上，记作________；

(2) 点 $B$ 在平面 $\alpha$ 内，记作________；

(3) 平面 $\alpha$、$\beta$ 相交于直线 $l$，记作________；

(4) 平面 $\alpha$ 经过直线 $l$，记作________；

(5) 直线 $l$ 与 $m$ 是平面 $\alpha$ 内的两条相交直线，它们的交点是 $A$，记作________.

2. 选择题：

(1) 下面四句话中，说法正确的是(　　).

A. 任意三点可以确定一个平面

B. 一条直线和一个点可以确定一个平面

C. 一条直线和两条平行直线相交，则三线共面

D. 两条直线可以确定一个平面

(2) 下面四句话中，说法正确的是(　　).

A. 一个平面长 8m、宽 4m

B. 线段 $AB$ 在平面 $\alpha$ 内，则直线 $AB$ 也在平面 $\alpha$ 内

C. 四边形一定是平面图形

D. 平面 $\alpha$、$\beta$ 可以只有一个公共点

(3) 下面四句话中，说法正确的是(　　).

A. 一条直线可以确定一个平面

B. 三角形一定是平面图形

C. 相交于一点的三条直线可以确定一个平面

D. 四条线段依次首尾相接，所得的图形一定是平面图形

3. 画出边长为 2cm 的等边三角形的水平放置直观图.

4. 梯形是一个平面图形吗？为什么？

## §8.2 空间两条直线的关系

### 一、位置关系

在平面内，不重合的两条直线的位置关系只有两种：平行和相交. 在空间图形中，不重合的两条直线也同样存在着这两种位置关系，即平行和相交. 不过除此之外，还有第三种位置关系，如图 8-8 中的 $AB$ 与 $A_1C_1$ 它们既不平行也不相交，且不在任何一个平面内，我们称这两条直线为**异面直线**. 因此，空间两条不重合的直线有三种位置关系：

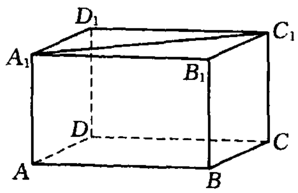


图 8-8

(1) **平行**——没有公共点,在同一个平面内;

(2) **相交**——只有一个公共点,在同一个平面内;

(3) **异面**——没有公共点,不在同一个平面内.

## 二、平行直线

在平面几何中,如果两条直线都和第三条直线平行,那么这两条直线也平行.对于空间中的三条直线也有这样的性质,我们把它称为空间平行线的传递性.

**定理 1** 平行于同一条直线的两条直线互相平行.

如图 8-8 所示,因为 $A_1D_1 \parallel B_1C_1$, $BC \parallel B_1C_1$,所以$A_1D_1 \parallel BC$.

**例 1** 如图 8-9 所示,已知 $ABCD$ 是四个顶点不在同一个平面内的空间四边形,$E$、$F$、$G$、$H$ 分别是 $AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 的中点,连结 $EF$、$FG$、$GH$、$HE$,求证 $EFGH$ 是一个平行四边形.

**证明** 因为 $EH$ 是$\triangle ABD$ 的中位线,所以 $EH \underline{\parallel} \frac{1}{2}BD$,

同理 $FG \underline{\parallel} \frac{1}{2}BD$,

所以根据定理 1 可知 $EH \underline{\parallel} FG$,

即 $EFGH$ 是一个平行四边形.

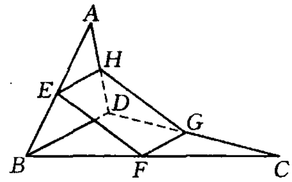


图 8-9

一般来说,平面几何中的一些定理,在空间不一定成立,有些则需要经过重新证明后才能应用.如在平面几何中我们知道:对应边互相平行的两个角相等或者互补.而在空间图形中我们则有下面的定理.

**定理 2** 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行,并且方向相同,那么这两个角相等.(证明略)

如图 8-10 所示,$A_1B_1 \parallel AB$ 且方向一致,$A_1C_1 \parallel AC$ 且方向一致,则有 $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$.

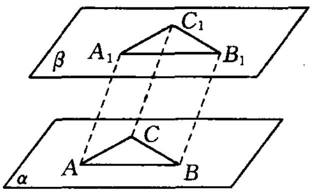


图 8-10

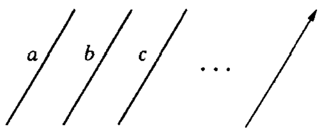


图 8-11

在几何学中,通常我们都是用互相平行的直线来表示空间中一个确定的方向.如图 8-11 所示.

## 三、异面直线所成的角

在画异面直线的图形时,要显示出它们不共面的特点,因此往往要借助一些辅助平面来画异面直线,如图 8-12 中的 $a$ 和 $b$.

当两条直线 $l_1$ 与 $l_2$ 没有公共点时,可记作 $l_1 \cap l_2 = \varnothing$,这时的 $l_1$ 与 $l_2$ 平行或异面.

在平面几何中,我们讨论两条相交直线的位置关系时,往往需要计算它们之间所成的角.同

样，在空间图形中，讨论两条异面直线的位置关系时，也要计算它们之间所成的角.

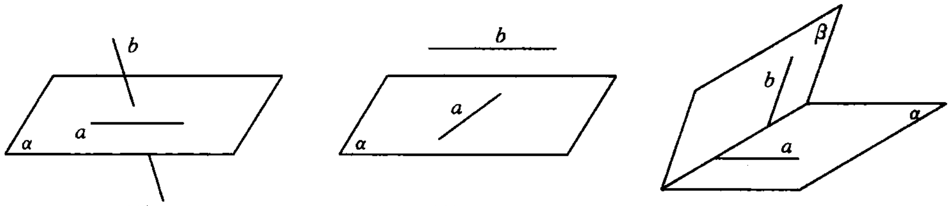



图 8-12

**定义 1** 经过空间任意一点分别作与两条异面直线平行的直线，则这两条直线相交所成的锐角(或直角)称为**两条异面直线所成的角**.

如图 8-13(1)所示，$a$、$b$ 是两条异面直线，经过空间任意一点 $O$，作直线 $a' \parallel a$，$b' \parallel b$，那么 $a'$ 和 $b'$ 相交所成的锐角 $\theta$ 就是异面直线 $a$ 和 $b$ 所成的角. 注意：如图 8-13(2) 所示，$O$ 点也可以取在直线 $a$(或 $b$) 上，然后过 $O$ 点作 $b' \parallel b$，那么 $b'$ 和 $a$ 所成的锐角 $\theta$，就是异面直线 $a$ 和 $b$ 所成的角.

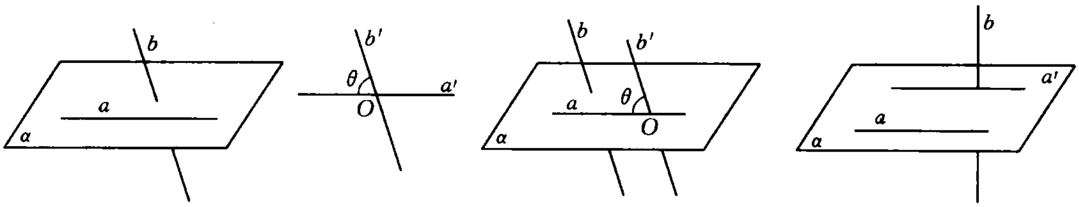



图 8-13

如果两条异面直线 $a$ 与 $b$ 所成的角是直角，就称**这两条异面直线互相垂直**，仍记作 $a \perp b$，如图 8-13(3)所示. 所以空间两条直线互相垂直，这两条直线可以是相交直线，也可以是异面直线.

**例 2** 如图 8-14 所示，观察边长为 $a$ 的正方体.

(1) 问：正方体的哪些边所在的直线与直线 $A_1C_1$ 是异面直线？

(2) 求证：$AB \perp CC_1$.

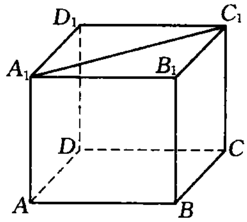



图 8-14

**解** (1) 正方体共有 12 条边，与 $A_1C_1$ 平行的边不存在，与 $A_1C_1$ 相交的边有 6 条，因此，与 $A_1C_1$ 成异面直线的边也有 6 条，它们是：$BB_1$、$DD_1$、$AB$、$BC$、$CD$、$AD$.

(2) 证：因为 $AB \parallel DC$ $DC \perp CC_1$，

所以根据定义 1 可知，$AB \perp CC_1$.

**例 3** 如图 8-15 所示，在已知长方体中，$\angle BAB_1 = 30°$，求下列各异面直线所成的角.

(1) $AB$ 和 $DD_1$； (2) $AB_1$ 和 $DC$.

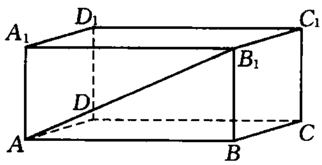



图 8-15

**解** (1) $AB$ 和 $DD_1$ 是异面直线，而 $BB_1 \parallel CC_1$，$DD_1 \parallel CC_1$，所以根据定理 1 可知，$BB_1 \parallel DD_1$.

因为 $AB \perp BB_1$，所以根据定义 1 可知 $AB$ 与 $DD_1$ 成直角.

(2) $AB_1$ 和 $DC$ 是异面直线，而 $DC \parallel AB$，$\angle BAB_1 = 30°$，根据定义 1 可知，$AB_1$ 与 $DC$ 所成的角是 $30°$.

## 练习 8.2

1. 填空题：

(1) 直线 $a$ 和直线 $b$ 相交于 $Q$，记作________；

(2) 直线 $a$ 和直线 $b$ 互相平行，记作________；

(3) 直线 $a$ 和直线 $b$ 互相垂直，记作________；

(4) 不重合的两条直线既不平行也不相交，则它们一定是____________________.

2. 选择题：

(1) 下面四句话中，说法正确的是(　　).

A. 垂直于同一条直线的两条直线互相平行

B. 平行于同一条直线的两条直线互相平行

C. 两条直线分别在两个不同的平面内，则它们一定是异面直线

D. 两条互相垂直的直线一定相交

(2) 下面四句话中，说法正确的是(　　).

A. 空间两条不相交的直线一定是异面直线

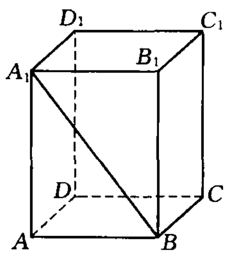
B. 一条直线和两条异面直线相交，一共可以确定 3 个平面

C. 一条直线平行于两条异面直线中的一条，则它与另一条直线也一定是异面直线

D. 如果两条异面直线所成的角是直角，那么称这两条直线互相垂直

3. 请举几个在生活中你所看到的异面直线的例子.

4. 在如图所示的长方体中，$AB = BC = 3\text{cm}$，$AA_1 = 3\sqrt{3}\text{cm}$，求线段 $A_1B$ 与 $DD_1$ 所成角的度数.



第 4 题图

# §8.3　空间直线与平面的关系

## 一、直线与平面的位置关系

在学校的田径运动场上，我们把标枪放在地上，则标枪与运动场有无数个交点，若是把标枪插在运动场上，则标枪与运动场只有一个交点，而跳高架上的横竿与运动场则没有交点. 这些都反映出直线与平面存在着不同的位置关系.

**定义 1**　如果一条直线和一个平面没有公共点，那么称**这条直线和这个平面平行.**

**定义 2**　如果一条直线和一个平面只有一个公共点，那么称**这条直线和这个平面相交.**

由此可知，一条直线和一个平面的位置关系有三种：

(1) **直线在平面内**——有无数个交点；

(2) **直线与平面相交**——有且只有一个公共点；

(3) **直线与平面平行**——没有公共点.

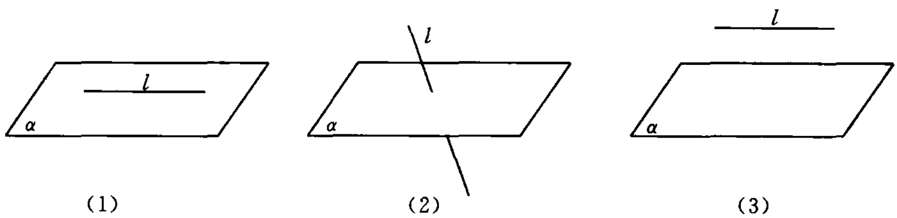


图 8-16

如图 8-16 所示是表示直线与平面三种位置关系的图形. 一般地,直线 $l$ 在平面 $\alpha$ 内,记作 $l \subsetneqq \alpha$,直线 $l$ 在平面 $\alpha$ 外,记作 $l \not\subseteq \alpha$,直线 $l$ 与平面 $\alpha$ 平行,记作 $l \parallel \alpha$,也可记作 $l \cap \alpha = \varnothing$.

## 二、直线与平面平行

### 1. 直线与平面平行的判定

我们判定一条直线是否与平面平行,有如下的判定定理.

**定理 1(直线与平面平行的判定定理)** 如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行,那么这条直线和这个平面平行.(证明略)

这个判定定理也可用下面的实例来说明:

如图 8-17 所示,$a$、$b$ 是门框的左、右两边,门所在的平面为 $\alpha$, $a \subsetneqq \alpha$, $b \not\subseteq \alpha$, $a \parallel b$. 当门 $\alpha$ 绕门框一边 $a$ 转动时,我们可以观察到门框的另一边 $b$ 始终与门 $\alpha$ 保持平行.

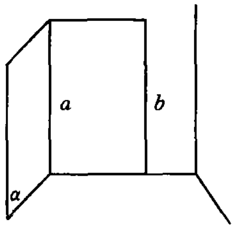


图 8-17

**例 1** 如图 8-18 所示,在已知的长方体中,问:边 $DD_1$ 所在的直线平行平面 $BCC_1B_1$ 吗? 为什么?

**解** 边 $DD_1$ 所在的直线平行平面 $BCC_1B_1$.

因为在已知的长方体中,四边形 $DCC_1D_1$ 是长方形. 所以 $DD_1 \parallel CC_1$. 又因为 $CC_1$ 在平面 $BCC_1B_1$ 内,根据定理 1 可知,$DD_1$ 所在的直线平行于平面 $BCC_1B_1$.

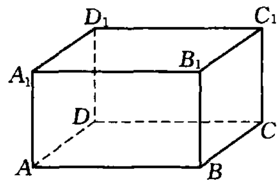


图 8-18

### 2. 直线与平面平行的性质

若已知直线与平面平行,则有如下的性质定理.

**定理 2(直线与平面平行的性质定理)** 如果一条直线与一个平面平行,经过这条直线的平面与已知平面相交,那么这条直线就与交线平行.(证明略)

如图 8-19 所示,已知 $l \parallel \alpha$, $l \subsetneqq \beta$,且 $\alpha \cap \beta = m$,则有 $l \parallel m$.

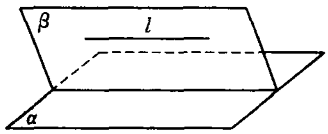


图 8-19

**例 2** 如图 8-20 所示,已知 $l \parallel \alpha$, $AB$、$CD$ 是夹在直线 $l$ 与平面 $\alpha$ 间的任意两条平行线段,求证:$AB = CD$.

**证明** 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $AB$、$CD$ 确定一个平面 $\beta$, 由于 $B$、$D$ 既在平面 $\alpha$ 内,又在平面 $\beta$ 内,所以 $BD$ 是平面 $\alpha$ 与平面 $\beta$ 的交线,又因为 $A \in l$、$B \in l$,所以 $l \subsetneqq \beta$.

已知 $l \parallel \alpha$, 因此根据定理 2 可知, $l \parallel BD$, 即 $AC \parallel BD$,

所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

所以 $AB = CD$.

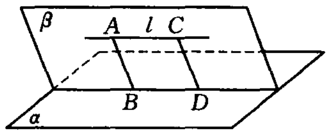


图 8-20

例 2 给我们展示了这样一个命题:如果一条直线与一个平面平行,那么夹在这条直线与这个平面间的平行线段都相等.

## 三、直线与平面垂直

### 1. 直线和平面垂直的定义

直线与平面相交一般分为两种情况,一种是斜交,而另一种就是垂直. 下面我们给出直线与平面垂直的定义.

**定义 3** 如果一条直线和平面内的任何一条直线都垂直,那么称这条直线和这个平面**互相**

**垂直**.这条直线称为这个平面的**垂线**;这个平面称为这条直线的**垂面**;垂线和垂面的交点称为**垂足**.

如图 8-21(1)所示,直线 $l$ 与平面 $\alpha$ 垂直,交点是 $A$ 点,记作 $l \perp \alpha$,点 $A$ 是垂足.

例如道路边的电线杆与地面的关系,下垂的电灯吊线和天花板的关系等等,都给我们以直线和平面垂直的直观形象.

在画直线和平面垂直时,我们通常总是把直线画成和表示平面的平行四边形的一边垂直,如图 8-21 所示.

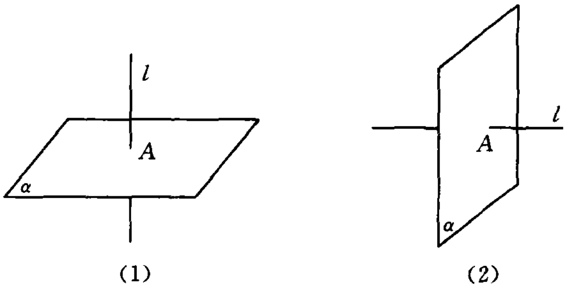


**图 8-21**

**2. 直线与平面垂直的判定**

由于平面内包含无数条直线,所以利用定义 3 来证明直线与平面垂直是不现实的.下面我们来介绍直线与平面垂直的判定定理.

**定理 3(直线与平面垂直的判定定理 1)** 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直,那么这条直线垂直于这个平面.(证明略)

如图 8-22(1)所示,直线 $l$、$m$、$n$、点 $O$、平面 $\alpha$,有如下关系:$m \cap n = O$, $m \subsetneqq \alpha$, $n \subsetneqq \alpha$, $l \perp m$, $l \perp n$,则有 $l \perp \alpha$.

注意:如果直线只与一个平面内的一条直线垂直,则这条直线不一定垂直于这个平面.

**定理 4(直线与平面垂直的判定定理 2)** 如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面,那么另一条也垂直于这个平面.

如图 8-22(2)所示,已知 $a \parallel b$, $a \perp \alpha$,求证 $b \perp \alpha$.

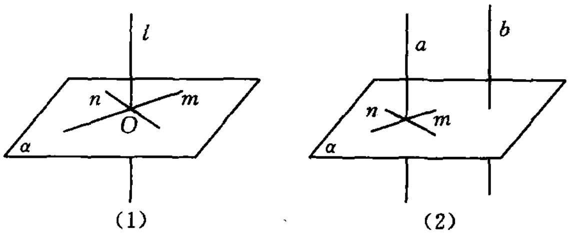


**图 8-22**

**证明** 在平面 $\alpha$ 内,过 $a$ 与 $\alpha$ 的交点作两条相交直线 $m$ 和 $n$.

因为 $a \perp \alpha$、$m \subsetneqq \alpha$、$n \subsetneqq \alpha$,

所以根据定义 3 可知 $a \perp m$、$a \perp n$.

由于 $a \parallel b$,根据异面直线交角的定义可以得到 $b \perp m$、$b \perp n$.

所以由定理 3 可知,$b \perp \alpha$.

**例 3** 如图 8-23 所示,平面 $\alpha$ 内有直角三角形 $BAC$, $\angle BAC = 90°$, $AB = 5\text{cm}$, $AC = 2\sqrt{14}\text{cm}$, $PB \perp \alpha$, $PB = 12\text{cm}$,求 $PA$ 和 $PC$ 的长.

**解** (1) 因为 $PB \perp \alpha$, $AB \subsetneqq \alpha$,

所以 $PB \perp AB$.

在直角三角形 $PBA$ 中

有 $PA = \sqrt{PB^2 + AB^2}$

$= \sqrt{12^2 + 5^2} = 13\text{cm}$.

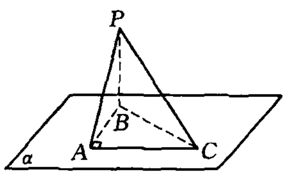


**图 8-23**

(2) 因为 $PB \perp \alpha$, $AC \subsetneqq \alpha$,

所以 $PB \perp AC$.

又因为 $AB \perp AC$,由定理 3 可得 $AC \perp$ 平面 $PAB$,

所以 $AC \perp PA$.

在直角三角形 $PAC$ 中，

有 $PC = \sqrt{PA^2 + AC^2} = \sqrt{13^2 + (2\sqrt{14})^2} = 15\text{cm}$.

**3. 直线与平面垂直的性质**

我们在观察道路两边的电线杆时，可以发现：这些电线杆都垂直于地面，并且这些电线杆相互之间也是互相平行的. 这一现象启发我们得出直线与平面垂直的性质定理.

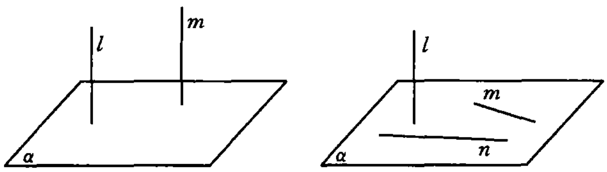
**定理 5(直线与平面垂直的性质定理 1)** 如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线互相平行.

如图 8-24(1)所示，已知直线 $l$、$m$ 和平面 $\alpha$，且 $l \perp \alpha$，$m \perp \alpha$，则有 $l \parallel m$.（证明略）

虽然我们不能用定义 3 来证明直线与平面垂直，但是我们却往往把定义 3 当作性质定理来使用. 这就是

**定理 6(直线与平面垂直的性质定理 2)** 如果一条直线垂直于一个平面，那么这条直线就和这个平面内所有的直线都垂直.

如图 8-24(2)所示，已知直线 $l$、$m$、$n$ 和平面 $\alpha$，且 $l \perp \alpha$，$m \subsetneq \alpha$，$n \subsetneq \alpha$，则有 $l \perp m$，$l \perp n$.




(1)　　(2)

**图 8-24**

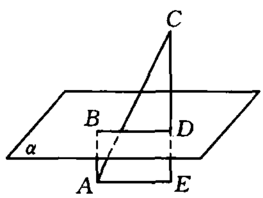



**图 8-25**

**例 4** 如图 8-25 所示，$AB$ 和 $CD$ 都是平面 $\alpha$ 的垂线，垂足分别为 $B$、$D$，$AB = 4\text{cm}$，$CD = 8\text{cm}$，$BD = 5\text{cm}$，求 $AC$ 的长.

**解** 因为 $AB \perp \alpha$，$CD \perp \alpha$.

所以根据定理 5 可知 $AB \parallel CD$.

又因为 $BD \subsetneq \alpha$，所以根据定理 6 可知 $AB \perp BD$，$CD \perp BD$.

在平行线 $AB$、$CD$ 所确定的平面内，过 $A$ 点作 $AE \parallel BD$，与 $CD$ 的延长线交于点 $E$.

则四边形 $ABDE$ 是矩形，即 $AB = DE$，$BD = AE$.

在直角三角形 $ACE$ 中，

$AE = BD = 5\text{cm}$，$CE = CD + DE = CD + AB = 8 + 4 = 12\text{cm}$，

所以 $AC = \sqrt{AE^2 + CE^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13\text{cm}$.

## 四、直线与平面所成的角

**1. 斜线及其在平面内的射影**

一条直线和一个平面相交，但不和这个平面垂直，我们称这条直线和这个平面**斜交**，称这条直线是这个**平面的斜线**；斜线和平面的交点称为**斜足**；斜线上一点和斜足间的线段称为**这点到这个平面的斜线段**.

如图 8-26 所示，在已知长方体中，$A_1$ 为平面 $ABCD$ 外一点，$A_1A$ 和平面 $ABCD$ 垂直相交，垂足为 $A$. 而 $A_1B$、$A_1C$、$A_1D$ 都是点 $A_1$ 到平面 $ABCD$ 的斜线段，其斜足分别是 $B$、$C$、$D$.