21世纪高等院校教材

微积分

（下册）

刘迎东 ◎ 编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

微　积　分

（下册）

刘迎东　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书对传统的微积分内容的写作次序作了较大调整，贯彻把数学建模思想融入大学数学基础课程教学的想法，强调微分的概念和应用，叙述精炼，选材及示例经典，习题丰富. 本书分上、下两册，本部分是下册，下册内容是多元函数微积分学和无穷级数，包括多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分和无穷级数等内容.

本书适合用作大学工科各专业微积分或高等数学教材或参考书，也可供相关的科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 下册/刘迎东编. —北京：科学出版社，2010
21世纪高等院校教材
ISBN 978-7-03-027833-3

Ⅰ.①微… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 103358 号

责任编辑：赵 靖 张中兴 / 责任校对：刘小梅
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010年6月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010年6月第一次印刷 印张：37 1/4
印数：1—5 000 字数：740 000

定价：58.00 元(上、下册)
(如有印装质量问题，我社负责调换)

目　　录

第 8 章　多元函数微分法及其应用

在此以前，本书讨论的函数都是只依赖于一个自变量的函数，即**一元函数**. 但是，在许多问题中，经常会遇到多个自变量的情形，因此需要研究**多元函数**.

多元函数微分学是一元函数微分学的推广和发展，这两者既有许多类似之处，又有不少本质差别. 这里着重讨论二元函数，因为从一元函数发展到二元函数，许多方法和结论有着本质的不同，但是从二元函数到三元函数或更多元函数，却没有重大差别.

8.1　多元函数的基本概念

8.1.1　平面点集

当在平面上引入了一个直角坐标系后，平面上的点 P 与有序二元实数组 (x,y) 之间就建立了一一对应关系. 于是，常把有序实数组 (x,y) 与平面上的点 P 看成是等同的. 这种建立了坐标系的平面称为**坐标平面**.

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 是某一正数. 与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为**点 P_0 的 δ 邻域**，记作 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\},$$

也就是

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

点 P_0 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P \mid 0<|PP_0|<\delta\}.$$

在几何上，$U(P_0,\delta)$ 就是 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心、$\delta>0$ 为半径的圆内部的点 $P(x,y)$ 的全体.

如果不需要强调邻域的半径 δ，则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域，点 P_0 的去心邻域记作 $\mathring{U}(P_0)$.

任意一点 $P\in\mathbf{R}^2$ 与任意一个点集 $E\subset\mathbf{R}^2$ 之间必有以下三种关系中的一种：

(1) **内点**　如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的内点（如图 8.1 中，P_1 为 E 的内点）；

(2) **外点**　如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\cap E=\varnothing$，则称 P 为 E 的外点（如图 8.1 中，P_2 为 E 的外点）；

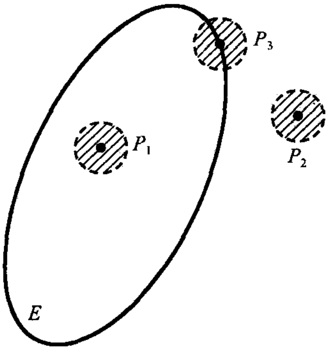

图 8.1

(3) **边界点**　如果点 P 的任一邻域内既含有属于 E 的点，又含有不属于 E 的点，则称 P 为 E **的边界点**(如图 8.1 中，P_3 为 E 的边界点).

E 的边界点的全体，称为 E **的边界**，记作 ∂E.

E 的内点必属于 E；E 的外点必不属于 E；而 E 的边界点既可能属于 E，也可能不属于 E.

任意一点 $P\in\mathbf{R}^2$ 与任意一个点集 $E\subset\mathbf{R}^2$ 之间也可以用另外一种关系来刻画，即**聚点**.

聚点　如果对于任意给定的 $\delta>0$，点 P 的去心邻域 $\mathring{U}(P,\delta)$ 内总有 E 中的点，则称 P 是 E 的**聚点**.

点集 E 的聚点 P 本身，可以属于 E，也可以不属于 E.

例如，设平面点集

$$E=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2<2\}.$$

满足 $1<x^2+y^2<2$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的内点；满足 $x^2+y^2=1$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的边界点，它们都属于 E；满足 $x^2+y^2=2$ 的一切点 (x,y) 也都是 E 的边界点，它们都不属于 E；点集 E 以及它的边界 ∂E 上的一切点都是 E 的聚点.

下面再定义一些平面点集的概念.

开集：如果点集 E 的点都是 E 的内点，则称 E **为开集**.

闭集：如果点集 E 的边界 $\partial E\subset E$，则称 E **为闭集**.

例如，集合 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$ 是开集；集合 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ 是闭集；而集合 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2<2\}$ 既非开集，也非闭集.

连通集：如果点集 E 内任何两点，都可用折线连接起来，且该折线上的点都属于 E，则称 E **为连通集**.

区域(或开区域)：连通的开集称为**区域**或**开区域**.

闭区域：开区域连同其边界一起所构成的点集称为**闭区域**.

例如，集合 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$ 是区域；而集合 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ 是闭区域.

有界集：对于平面点集 E，如果存在某一正数 r，使得

$$E\subset U(O,r),$$

其中 O 是坐标原点，则称 E **为有界集**.

无界集：一个集合如果不是有界集，就称这集合为**无界集**.

例如，集合 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ 是有界闭区域；集合 $\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 是无界开区域，集合 $\{(x,y)\mid x+y\geqslant 0\}$ 是无界闭区域.

8.1.2　多元函数概念

在很多自然现象以及实际问题中，经常会遇到多个变量之间的依赖关系，举例

如下：

例 8.1 一定质量的理想气体，其压强 p 和容积 V 以及热力学温度 T 之间满足关系式(称为**气态方程**)

$$p=\frac{RT}{V},\quad T>T_0,V>0,R\text{ 是摩尔气体常数.}$$

当 T,V 的值分别给定时，按照这个关系式，p 就有一个确定的值与它们对应.

例 8.2 设 R 是电阻 R_1,R_2 并联后的总电阻，由电学知道，它们之间具有关系

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2},\quad R_1>0,R_2>0.$$

当 R_1,R_2 取定后，R 的值就唯一确定了.

由上面两个例子，可以归纳出**二元函数**的定义.

定义 8.1 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个非空子集，称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的二元函数，通常记为

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D$$

或

$$z=f(P),\quad P\in D,$$

其中点集 D 称为**该函数的定义域**，x、y 称为**自变量**；z 称为**因变量**. 函数值 $f(x,y)$ 的全体构成的集合称为**函数 f 的值域**，记作 $f(D)$，即

$$f(D)=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}.$$

类似地，可以定义**三元函数** $u=f(x,y,z)$，$(x,y,z)\in D$ 以及**三元以上的函数.**

当 $n=1$ 时，n 元函数就是**一元函数**. 当 $n\geqslant 2$ 时，n 元函数统称为**多元函数.**

关于多元函数的定义域，与一元函数相类似，我们作如下约定：一般在讨论用算式表达的多元函数 $u=f(P)$ 时，就以使这个算式有意义的变元 P 所组成的点集为这个**多元函数的自然定义域.**

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，对于 D 中的每一点 $P(x,y)$，依照函数关系 $z=f(x,y)$，有空间中一点 M 与之对应，M 的坐标为 $(x,y,f(x,y))$. 在空间中，点 M 的全体称为**函数 $z=f(x,y)$ 的图形.** 一般说来，它是一张曲面，任何一条平行于 z 轴且通过区域 D 的直线与它都有且只有一个交点(图 8.2).

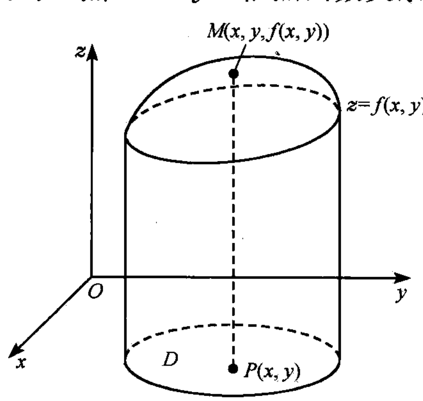

图 8.2

例 8.3 求函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域，并作函数的图形.

解 定义域为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ (图 8.3). 函数的图形是**上半球面**(图 8.4).

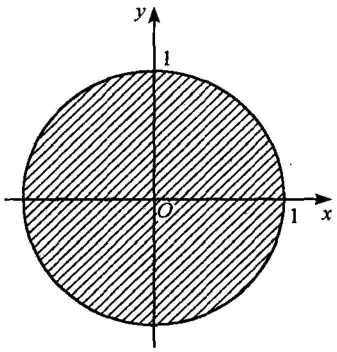

图 8.3

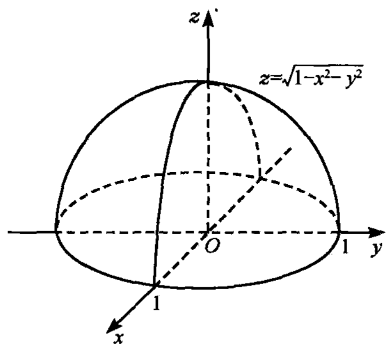

图 8.4

例 8.4　研究函数 $z=x^2+y^2$ 的定义域和图形.

解　定义域为整个 xOy 平面. 函数的图形是**旋转抛物面**.

对于一般的二元函数 $z=f(x,y)$，其图形往往难以画出. 在实际工作中，有时利用"**等值线**"来了解函数的图形. 可用函数值 $z=$ 常数(即一组与水平面平行的平面)去截曲面 $z=f(x,y)$，所得到的截痕是一组平面曲线，把它们投影到 xOy 平面上，就是**等值线**，或称**等高线**(图 8.5，图 8.6).

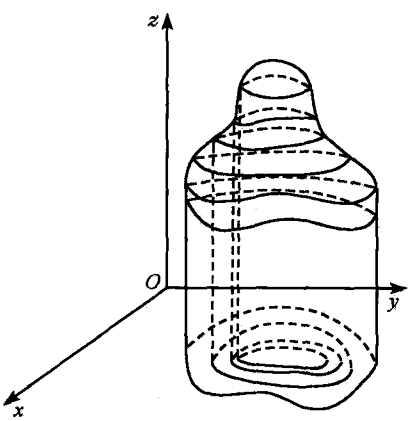

图 8.5

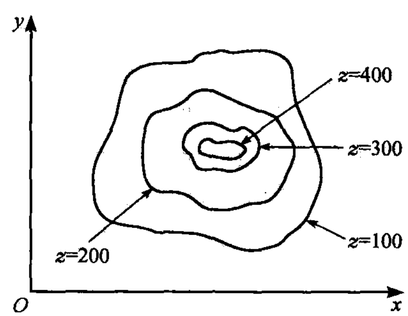

图 8.6

8.1.3　多元函数的极限

先讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$，即 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限.

这里 $P\to P_0$ 表示点 P 以任何方式趋于点 P_0，也就是点 P 与点 P_0 间的距离趋于零，即

$$|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0.$$

如果在 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$的过程中,对应的函数值 $f(x,y)$无限接近于一个确定的常数 A,就说 A 是**函数** $f(x,y)$ **当** $(x,y)\to(x_0,y_0)$**时的极限**.

定义 8.2 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$的定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$是 D 的聚点.如果存在常数 A,对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得当点 $P(x,y)\in D\cap \mathring{U}(P_0,\delta)$时,都有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立,就称**常数** A **为函数** $f(x,y)$**当** $(x,y)\to(x_0,y_0)$**时的极限**,记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \quad 或\ f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0)),$$

也记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad 或\ f(P)\to A(P\to P_0).$$

为了区别于一元函数的极限,把二元函数的极限叫做**二重极限**.

例 8.5 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$,求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

证 因为

$$|f(x,y)-0|=\left|(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant x^2+y^2,$$

可见,$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$,则当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta,$$

即 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(O,\delta)$时,总有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon$$

成立,所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

必须注意,所谓二重极限存在,是指 $P(x,y)$以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$时,$f(x,y)$都无限接近于 A.因此,如果 $P(x,y)$以某一特殊方式,如沿着一条定直线或定曲线趋于 $P_0(x_0,y_0)$时,即使 $f(x,y)$无限接近于某一确定值,仍然不能由此断定函数的极限存在.但是反过来,如果当 $P(x,y)$以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$时,$f(x,y)$趋于不同的值,就可以断定这函数的极限不存在.

例 8.6 证明:函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$在点(0,0)处的极限不存在.

证 点(x,y)沿直线 $y=kx$ 趋向于点(0,0)时,有

$$\lim_{\substack{y=kx\\(x,y)\to(0,0)}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

当 k 不同时,此极限值显然不同,因此该函数在点(0,0)的极限不存在.

例 8.7 证明:函数 $f(x,y)=\sin\frac{y}{x^2}$在点(0,0)处的极限不存在.

证 点(x,y)沿直线 $y=x$ 趋向于点(0,0)时,有

$$\sin\frac{y}{x^2}=\sin\frac{1}{x},$$

而$\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$不存在,因此 $f(x,y)=\sin\frac{y}{x^2}$在点(0,0)的极限不存在.

例 8.8 证明:函数 $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$当点$(x,y)$沿任一直线趋于点(0,0)时,极限都为 0,但 $f(x,y)$在点(0,0)处没有极限.

证 对任意实数 k,显然有

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to0}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0,$$

它表明,点(x,y)沿除 y 轴以外的过原点的任一直线趋于点(0,0)时,极限都为 0. 另外

$$\lim_{\substack{x=0\\y\to0}}f(x,y)=\lim_{y\to0}0=0,$$

即点(x,y)沿 y 轴趋于点(0,0)时,$f(x,y)$的极限也为 0. 这说明,函数 $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$当点$(x,y)$沿任一直线趋于点(0,0)时,极限都为 0. 但是

$$\lim_{\substack{y=x^2\\x\to0}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2},$$

所以,$f(x,y)$在点(0,0)处没有极限.

以上关于二元函数的极限概念,可相应地推广到 n 元函数 $u=f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$上去.

关于多元函数的极限运算,有与一元函数类似的运算法则.

例 8.9 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\frac{\sin(xy)}{x}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{\sin(xy)}{x}&=\lim_{(x,y)\to(0,1)}\left[\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y\right]=\lim_{xy\to0}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{y\to1}y\\&=1\cdot1=1.\end{aligned}$$

若 x_0 与 y_0 有一个或两个是∞或$\pm\infty$,则有类似的极限定义及其运算定理.

例 8.10 求极限 $I=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$.

解 易知,若一元函数 $f(x)$的极限存在,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则把 $f(x)$看成关于

x,y 的二元函数时，其极限也存在，且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x)=A.$$

由极限的四则运算法得

$$\begin{aligned}I&=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}[x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}+y^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}]\\&=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}x^2\mathrm{e}^{-x}\cdot\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\mathrm{e}^{-y}+\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}y^2\mathrm{e}^{-y}\cdot\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\mathrm{e}^{-x}\\&=0\cdot0+0\cdot0=0.\end{aligned}$$

8.1.4 多元函数的连续性

定义 8.3 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点，且 $P_0\in D$. 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称**函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续**.

设函数 $f(x,y)$ 在 D 上有定义，D 内的每一点都是函数定义域的聚点. 如果函数 $f(x,y)$ 在 D 的每一点都连续，就称**函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续**，或者称 **$f(x,y)$ 是 D 上的连续函数**.

以上关于二元函数的连续性概念，可相应地推广到 n 元函数 $f(P)$ 上去.

例 8.11 设

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq0,\\0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

证明：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

证 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$. 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，显然有 $r=\sqrt{x^2+y^2}\to0$，于是

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=\lim_{r\to0} r^2\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\ln r^2=0=f(0,0),$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

由于若一元函数 $f(x)$ 的极限存在：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则把 $f(x)$ 看成 x,y 的二元函数时，其极限也存在，且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x)=A.$$

所以，如果把一元连续函数看成二元函数或者二元以上的多元函数，它们在各自的定义域内都是连续的. 特别地，一元基本初等函数看成二元函数或者二元以上的多元函数时，它们在各自的定义域内都是连续的.

定义 8.4 设函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点，如果函数

$f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$不连续,则称 $P_0(x_0,y_0)$**为函数** $f(x,y)$**的间断点**.

例如,(0,0)为函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的间断点.

一元函数中关于极限的运算法则,对于多元函数仍然适用.根据多元函数的极限运算法则,可以证明**多元连续函数的和、差、积仍为连续函数;连续函数的商在分母不为零处仍连续;多元连续函数的复合函数也是连续函数**.

多元初等函数是指可用一个式子表示的多元函数,这个式子是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而得到的.

根据连续函数的和、差、积、商的连续性以及连续函数的复合函数的连续性,再利用基本初等函数的连续性,可得如下结论:

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.所谓**定义区域**是指包含在定义域内的区域或闭区域.

由多元初等函数的连续性,如果要求它在点 P_0 处的极限,而该点又在此函数的定义区域内,则极限值就是函数在该点的函数值,即

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0).$$

例 8.12　求极限

$$I=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\frac{\ln x+y^2\sin xy}{e^y\sin(x^2+y^2)}.$$

解

$$I=\frac{\ln 2+1^2\sin(2\cdot 1)}{e^1\sin(2^2+1^2)}=\frac{\ln 2+\sin 2}{e\sin 5}.$$

例 8.13　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

最后列举一些有界闭区域上多元连续函数的好的性质.

性质 8.1(有界性与最大值最小值定理)　在有界闭区域 D 上的多元连续函数,存在最大值和最小值,因而有界.

性质 8.2(介值定理)　在有界闭区域 D 上的多元连续函数必取得介于最大值

和最小值之间的任何值.

习 题 8.1

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集？并分别指出它们的聚点所成的点集(称为**导集**)和边界.

(1) $\{(x,y)\mid x\neq 0,y\neq 0\}$；(2) $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$；

(3) $\{(x,y)\mid y>x^2\}$；(4) $\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2\geqslant 1\}\cap\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2\leqslant 4\}$.

2. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$，试求 $f(tx,ty)$.

3. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

4. 已知函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$，试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

5. 求下列函数的定义域：

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$；(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；(4) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\ (R>r>0)$；

(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$；(7) $z=\sqrt{x}+\sqrt{y}$；

(8) $z=\ln(-x-y)$；(9) $z=\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{4}+\arccos\dfrac{1}{x^2+y^2}$；

(10) $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$；(11) $u=\ln(z^2-x^2-y^2)$.

6. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\tan(xy)}{y}$；(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$；

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；(8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)}\dfrac{\sin xy}{x}$；

(9) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$；(10) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}$.

(11) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$；(12) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$；

(13) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$；　(14) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(15) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,2)}e^{xy}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}yz\right)$；　(16) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{3xy+x^2y^2}{x+y}$.

7. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$；　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.　(4) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}$在$(0,0)$点；

(5) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x+y}, & y\neq -x,\\ 0, & y=-x\end{cases}$在$(0,0)$点.

8. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$在何处是间断的？

9. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

10. 设 $F(x,y)=f(x)$，$f(x)$在 x_0 处连续，证明：对任意 $y_0\in\mathbf{R}$，$F(x,y)$在(x_0,y_0)处连续.

11. 求函数 $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$的定义域，并求 $\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},0\right)}f(x,y)$.

12. 证明：极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$不存在.

13. 证明 $f(x,y)$在区域 D 上连续，则$|f(x,y)|$在区域 D 上连续.

14. 设 $\bar{D}$ 是平面上的有界闭区域，$P_0(x_0,y_0)$为 $\bar{D}$ 外一点. 证明：在 $\bar{D}$ 内一定存在一点与 P_0 最近，也存在一点与 P_0 最远.

15. 如果在区域 D 内，函数 $f(x,y)$对变量 x 是连续，而对变量 y 满足利普希茨条件，即存在常数 k，对$\forall(x,y_1),(x,y_2)\in D$，有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<k|y_1-y_2|,$$

则函数 $f(x,y)$在区域 D 内是二元连续的.

16. 设 $f(x,y)$在区域 D 上连续，

$$(x_i,y_i)\in D,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

证明：在 D 上存在一点(ξ,η)，使得

$$f(\xi,\eta)=\frac{f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)+\cdots+f(x_n,y_n)}{n}.$$

8.2 偏　导　数

8.2.1 偏导数的定义及其计算法

在研究一元函数时，从研究函数的变化率引入了导数概念. 对于多元函数同样